

## ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

БИЛЕТ 13

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция  $f(x)$  принимает соответственно значения 6, 5 и 5. Найдите наименьшее возможное значение  $f(x)$ .

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{|x| - 12}{2 - x}} > x.$$

3. Найдите количество пар целых чисел  $(a; b)$  таких, что  $1 \leq a \leq 70$ ,  $1 \leq b \leq 50$ , и при этом площадь  $S$  фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \geq 1, \\ x \leq a, \\ y \leq b, \end{cases}$$

такова, что число  $2S$  кратно 5.

4. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ . Продолжение биссектрисы  $AA_1$  пересекает окружность, описанную около треугольника  $ABC$ , в точке  $A_2$ . Найдите площади треугольников  $OA_2C$  и  $A_1A_2C$ . ( $O$  – центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ).
5. Дано число  $5300\dots0035$  (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 495. Сколькими способами это можно сделать?

6. Лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $P$ , а лучи  $BC$  и  $AD$  пересекаются в точке  $Q$ . Известно, что треугольники  $ADP$  и  $QAB$  подобны (вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке), а четырёхугольник  $ABCD$  можно вписать в окружность радиуса 7.

а) Найдите  $AC$ .

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники  $ABC$  и  $ACD$  касаются отрезка  $AC$  в точках  $K$  и  $T$  соответственно, причём  $CK : KT : TA = 6 : 1 : 7$  (точка  $T$  лежит между  $K$  и  $A$ ). Найдите  $\angle DAC$  и площадь четырёхугольника  $ABCD$ .

7. Изобразите на плоскости фигуру  $\Phi$ , состоящую из точек  $(x; y)$  координатной плоскости таких, что выполнена система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3y^2 + 4x + 4} \leq 2x + 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

Определите, из скольких частей состоит фигура  $\Phi$ .

## ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

БИЛЕТ 14

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция  $f(x)$  принимает соответственно значения  $-9$ ,  $-9$  и  $-15$ . Найдите наибольшее возможное значение  $f(x)$ .

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{20 - |x|}{x - 3}} > x.$$

3. Найдите количество пар целых чисел  $(a; b)$  таких, что  $1 \leq a \leq 80$ ,  $1 \leq b \leq 30$ , и при этом площадь  $S$  фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \geq 1, \\ x \leq a, \\ y \leq b, \end{cases}$$

такова, что число  $2S$  кратно 5.

4. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = 4$ ,  $AC = 6$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ . Продолжение биссектрисы  $AA_1$  пересекает окружность, описанную около треугольника  $ABC$ , в точке  $A_2$ . Найдите площади треугольников  $OA_2C$  и  $A_1A_2C$ . ( $O$  – центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ).

5. Дано число  $800 \dots 008$  (80 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 198. Сколькими способами это можно сделать?

6. Лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $P$ , а лучи  $BC$  и  $AD$  пересекаются в точке  $Q$ . Известно, что треугольники  $ADP$  и  $QAB$  подобны (вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке), а четырёхугольник  $ABCD$  можно вписать в окружность радиуса 4.

а) Найдите  $AC$ .

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники  $ABC$  и  $ACD$  касаются отрезка  $AC$  в точках  $K$  и  $T$  соответственно, причём  $CK : KT : TA = 3 : 1 : 4$  (точка  $T$  лежит между  $K$  и  $A$ ). Найдите  $\angle DAC$  и площадь четырёхугольника  $ABCD$ .

7. Изобразите на плоскости фигуру  $\Phi$ , состоящую из точек  $(x; y)$  координатной плоскости таких, что выполнена система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - 8x^2 - 6y + 9} \leq 3y - 1, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Определите, из скольких частей состоит фигура  $\Phi$ .