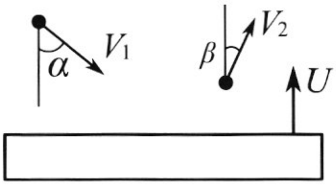
Олимпиада «Физтех» по физике, февраль 2022

Класс 11 **Вариант 11-02** Шифр

(заполняется секретарём)

1. Массивная плита движется с постоянной скоростью U вертикально вверх. К плите подлетает шарик, имеющий перед ударом скорость V_1 = 6 м/с, направленную под углом $\alpha\left(\sin\alpha = \frac{2}{3}\right)$ к вертикали (см. рис.). После неупругого удара о гладкую горизонтальную поверхность плиты шарик отскакивает со скоростью V_2, составляющей угол $\beta\left(\sin\beta = \frac{1}{3}\right)$ с вертикалью.



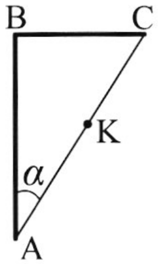
1) Найти скорость V_2.
2) Найти возможные значения скорости плиты U при таком неупругом ударе.

Действие силы тяжести за малое время удара не учитывать. Ответы допустимы через радикалы из целых чисел.

2. Цилиндрический теплоизолированный горизонтально расположенный сосуд разделен на два отсека теплопроводящим поршнем, который может перемещаться горизонтально без трения. В первом отсеке находится гелий, во втором – неон, каждый газ в количестве $\nu = 6/25$ моль. Начальная температура гелия T_1 = 330 К, а неона T_2 = 440 К. Температуры газов начинают медленно выравниваться, а поршень начинает медленно двигаться. Оба газа одноатомные, газы считать идеальными. R = 8,31 Дж/(моль·К).

1) Найти отношение начальных объемов гелия и неона.
2) Найти установившуюся температуру в сосуде.
3) Какое количество теплоты передал неон гелию?

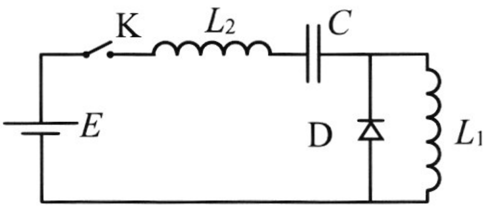
3. Две бесконечные плоские прямоугольные пластины AB и BC перпендикулярны друг к другу и образуют двугранный угол с ребром B. На рисунке показано сечение угла плоскостью, перпендикулярной ребру B.



1) Пластина BC заряжена с постоянной поверхностной плотностью заряда. Угол $\alpha = \pi/4$. Во сколько раз увеличится напряженность электрического поля в точке K на середине отрезка AC, если пластину AB тоже зарядить с такой же поверхностной плотностью заряда?

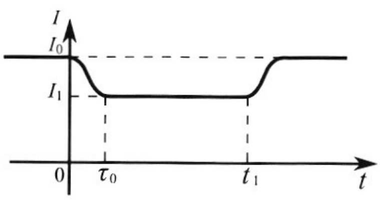
2) Пластины BC и AB заряжены положительно с поверхностной плотностью заряда $\sigma_1 = 4\sigma, \sigma_2 = \sigma$, соответственно. Угол $\alpha = \pi/8$. Найти напряженность электрического поля в точке K на середине отрезка AC.

4. Электрическая цепь собрана из идеальных элементов: источника с ЭДС E, катушек с индуктивностями $L_1 = 3L$, $L_2 = 2L$, конденсатора емкостью C, диода D (см. рис.). Ключ K разомкнут, конденсатор не заряжен, тока в цепи нет. После замыкания ключа возникают колебания тока в L_2.



1) Найти период T этих колебаний.
2) Найти максимальный ток I_{01}, текущий через катушку L_1.
3) Найти максимальный ток I_{02}, текущий через катушку L_2.

5. Оптическая система состоит из двух соосных тонких линз Л$_1$ и Л$_2$ (см. рис.) с фокусными расстояниями F_0 и $F_0/3$, соответственно. Расстояние между линзами $1{,}5F_0$. Диаметры линз одинаковы и равны D, причем D значительно меньше F_0. На линзу Л$_1$ падает параллельно оси системы пучок света с одинаковой интенсивностью в сечении пучка. Прошедший через обе линзы свет фокусируется на фотодетекторе Д, на выходе которого сила тока пропорциональна мощности падающего на него света. Круглая непрозрачная мишень М, плоскость которой перпендикулярна оси системы, движется с постоянной скоростью перпендикулярно оси системы так, что центр мишени пересекает ось на расстоянии $5F_0/4$ от Л$_1$. На рисунке показана зависимость тока I фотодетектора от времени t (секундомер включен в момент начала уменьшения тока). $I_1 = 8I_0/9$.



1) Найти расстояние между линзой Л$_2$ и фотодетектором.
2) Определить скорость V движения мишени. 3) Определить t_1.

Известными считать величины F_0, D, τ_0.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4.

1) Если ток в цепи течёт по часовой стрелке, то через диод ток не течёт и данная цепь эквивалентна цепи с источником $\mathcal{E}$, конденсатором ёмкостью C и катушкой с индуктивностью $2L+3L=5L$. Период колебаний в такой цепи по формуле Томсона равен $T_1 = 2\pi\sqrt{5LC}$. Однако, ток будет течь по часовой только на протяжении половины периода $\pi\sqrt{5LC}$. Когда ток начнёт течь против часовой стрелки, то вместо катушки L_1 ток потечёт через диод, и тогда эта цепь эквивалентна цепи с конденсатором ёмкостью C, катушкой с индуктивностью $L_2=2L$ и источником $\mathcal{E}$. Период колебаний $T_2 = 2\pi\sqrt{2LC}$, однако нам вновь нужна только половина периода, когда ток течёт против часовой. Суммарный период колебаний $T = \pi\sqrt{5LC} + \pi\sqrt{2LC}$

2) Если ток ~~[illegible]~~ в цепи I, а напряжение на катушке L_1 равно U_1, то $U_1 = L_1 I'$. Максимальный ток при $I'=0$, т.е. $U_1=0$. Тогда и напряжение на второй катушке $U_2 = L_2 I' = 0$; напряжение на конденсаторе $U=\mathcal{E}$, его заряд $q=C\mathcal{E}$. Работа источника к этому моменту $A = q\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$ ЗСЭ:

$$C\mathcal{E}^2 = \frac{q^2}{2C} + \frac{L_1 I_{01}^2}{2} + \frac{L_2 I_{01}^2}{2}$$

$$C\mathcal{E}^2 = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} + \frac{5L I_{01}^2}{2}, \quad I_{01}^2 = \frac{C\mathcal{E}^2}{5L}, \quad I_{01} = \mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{5L}}$$

3) Если ток течёт против часовой, то через L_1 тока нет. Аналогично прошлому пункту, напряжение конденсатора $\mathcal{E}$, заряд $q=C\mathcal{E}$. ЗСЭ:

$$q\mathcal{E} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} + \frac{2LI_{02}^2}{2}$$

$$\frac{C\mathcal{E}^2}{2} = LI_{02}^2, \quad I_{02}^2 = \frac{C\mathcal{E}^2}{2L}, \quad I_{02} = \mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{2L}}$$

Задача 1.

1) Направим ось X горизонтально (вправо), а ось y вертикально (вверх). Сила реакции плиты при ударе не имеет проекции на OX, а значит проекция скорости шарика на эту ось постоянна: $v_1 \sin\alpha = v_2 \sin\beta$

$$v_2 = v_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 2v_1 = 12 \text{ м/с}$$

2) Перейдем в подвижную систему отсчёта, связанную с плитой. Тогда в этой системе можно считать, что шарик ударяется о неподвижную плиту. Проекции скоростей v_1' и v_2' на ось OX равны $v_{1x}' = v_1 \sin\alpha = \frac{2v_1}{3}$ и $v_{2x}' = v_2 \sin\beta = \frac{2v_1}{3}$. Проекция v_1' на ось OY.

$$v_{1y}' = -v_1 \cos\alpha - u = -\frac{v_1\sqrt{5}}{3} - u$$

Скорость v_1' в данной СО: $v_1'^2 = v_{1y}'^2 + v_{1x}'^2 = \frac{4v_1^2}{9} + \frac{5v_1^2}{9} + \frac{2\sqrt{5}v_1u}{3} + u^2 =$
$= v_1^2 + \frac{2\sqrt{5}v_1u}{3} + u^2$

Проекция v_2' на ось OY: $v_{2y}' = v_2\cos\beta - u = 2v_1\frac{\sqrt{8}}{3} - u = \frac{4\sqrt{2}v_1}{3} - u$

Скорость v_2': $v_2'^2 = v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2$

$$v_2'^2 = \frac{4v_1^2}{9} + \frac{32v_1^2}{9} - \frac{8\sqrt{2}v_1u}{3} + u^2 = 4v_1^2 - \frac{8\sqrt{2}v_1u}{3} + u^2$$

При неупругом ударе о стенку выделяется теплота, т.е. кинетическая энергия шарика уменьшается: $\frac{mv_1'^2}{2} > \frac{mv_2'^2}{2}$, $v_1'^2 - v_2'^2 > 0$. Подставляем $v_1'^2$ и $v_2'^2$:
$$-3v_1^2 + v_1u\left(\frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{3}\right) > 0$$

$$u\left(\frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{3}\right) > 3v_1, \quad u > \frac{9v_1}{2\sqrt{5}+8\sqrt{2}}, \quad u > \frac{9v_1(2\sqrt{5}-8\sqrt{2})}{20-128},$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$u > \frac{9v_1(8\sqrt{2}-2\sqrt{5})}{108}$, $u > v_1\frac{8\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{12}$. Подставив $v_1 = 6$ м/с, получим $u > (4\sqrt{2}-\sqrt{5})$ м/с

Задача 2.

1) Чтобы поршень был в равновесии, давления гелия и неона должны быть одинаковыми. ~~Из этого~~ Обозначим это давление p, начальный объём гелия V_1, неона V_2. Тогда $pV_1 = \nu RT_1$ и $pV_2 = \nu RT_2$.

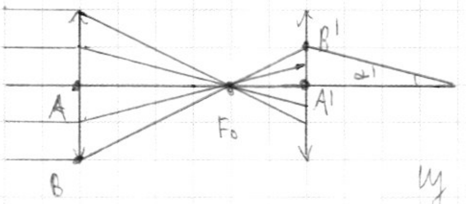
$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{4}$

2) Пусть установившаяся температура T_0, конечные объёмы гелия и неона – V_1' и V_2' соответственно. Тогда $pV_1' = \nu RT_0$ и $pV_2' = \nu RT_0$, откуда $V_1' = V_2' = V_0$. Полный объём сосуда с одной стороны равен $V_1 + V_2$, а с другой $2V_0$, откуда $V_0 = \frac{V_1+V_2}{2}$. Подставив $V_2 = \frac{4}{3}V_1$, получим:
$V_0 = \frac{V_1}{2} + \frac{2V_1}{3} = \frac{7V_1}{6}$. Уравнение состояния гелия в начальном и конечном состоянии: $pV_1 = \nu RT_1$, $pV_0 = \nu RT_0$.

$\frac{V_1}{V_0} = \frac{T_1}{T_0}$, $T_0 = T_1\frac{V_0}{V_1} = \frac{7}{6}T_1 = 385$ K

3) Начальная внутренняя энергия гелия $U_1 = \frac{3}{2}\nu RT_1$, конечная – $U_0 = \frac{3}{2}\nu RT_0$. ~~Работу газ не совершает~~ Работа гелия $A = p(V_0 - V_1) = \frac{pV_1}{6}$. Так как $pV_1 = \nu RT_1$, работа $A = \frac{\nu RT_1}{6}$. Теплота, полученная гелием
$Q = U_0 - U_1 + A = \frac{3}{2}\nu R(T_0 - T_1) + \frac{\nu RT_1}{6} = \frac{\nu RT_1}{4} + \frac{\nu RT_1}{6} = \frac{10\nu RT_1}{24} = 274{,}23$ Дж

Задача 5.



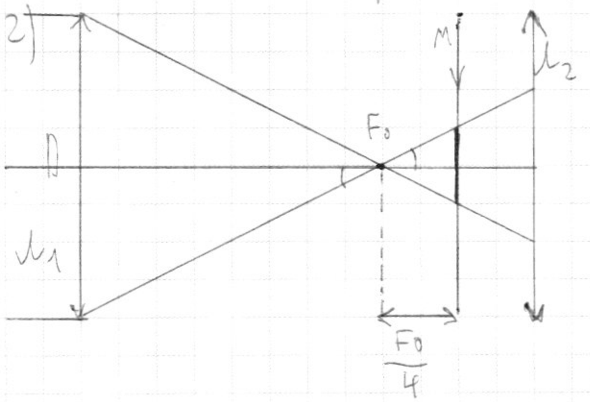
Пучок лучей соберётся в фокусе F_0 первой линзы, и далее попадёт на вторую. Рассмотрим верхний из лучей, падающих на $Л_2$. Он попадает в точку B', удалённую от оси линзы на расстояние $h = \frac{D}{4}$ (это следует из подобия $\triangle ABF_0$ и $\triangle A'B'F_0$ с коэф. 2). $\operatorname{tg}\angle B'F_0A' = \frac{h}{F_0/2} = \frac{D}{2F_0}$. Зададим этот луч матрицей $\begin{pmatrix} h \\ \operatorname{tg}\alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \equiv \angle B'F_0A'$. Матрица преломления в тонкой линзе $Л_2$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_0/3} & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{F_0} & 1 \end{pmatrix}$. Тогда, если после преломления в линзе угол между лучом и осью α', то

$$\begin{pmatrix} h \\ \operatorname{tg}\alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{F_0} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ \operatorname{tg}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ -\frac{3h}{F_0} + \operatorname{tg}\alpha \end{pmatrix},$$

откуда следует:

$\operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}\alpha - \frac{3h}{F_0}$. Подставляя $\operatorname{tg}\alpha$ и h, получаем

$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{D}{2F_0} - \frac{3D}{4F_0} = -\frac{D}{4F_0}$. При этом, так как луч выходит из точки, удалённой от оси на $\frac{D}{4}$, то он пересечёт ось на расстоянии F_0 от линзы. Это и есть расстояние между линзой $Л_2$ и детектором.



Из подобия треугольников на рисунке видно, что диаметр круга, который пересекает мишень, равен $\frac{D}{4}$. Тогда площадь этого круга $S_0 = \frac{\pi \left(\frac{D}{4}\right)^2}{4} = \frac{\pi D^2}{64}$.

Так как $I_1 = \frac{8}{9} I_0$, до детектора доходит $\frac{8}{9}$ от всех лучей света. Значит, мишень закрывает $\frac{1}{9}$ площади круга S_0. Если диаметр мишени равен d, то:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{1}{9} S_0 = \frac{\pi D^2}{64 \cdot 9}$, $d^2 = \frac{D^2}{16 \cdot 9}$, $d = \frac{D}{12}$.

Если в начальный момент времени круг пересекала нижняя часть мишени, а в момент τ_0 - ~~верхняя~~ верхняя, то $v\tau_0 = d$

$v = \frac{d}{\tau_0} = \frac{D}{12\tau_0}$

3) Ток начнёт увеличиваться, когда нижняя граница мишени выйдет из круга S_0. Значит, в момент времени t_0 нижняя точка мишени прошла расстояние $\frac{D}{4}$ (от верхней до нижней части круга). Тогда:

$t_0 = \frac{D}{4v} = \frac{12}{4}\tau_0 = 3\tau_0$

Задача 3.

1) Если $\alpha = \frac{\pi}{4}$, то $BC = AB$. Тогда, при одинаковой поверхностной плотности заряда на пластинах, они создают одинаковое по величине электрическое поле в точке K в перпендикулярных направлениях. Если пластина BC создаёт напряжённость E, то вместе пластины создают напряжённость $E_1 = \sqrt{E^2 + E^2} = E\sqrt{2}$. То есть, напряжённость возрастает в $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ раз.

2) Напряжённость бесконечной заряженной пластины $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Напряжённость от пластины BC: $E_1 = \frac{4\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0}$. Напряжённость от AB: $E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Эти напряжённости направлены перпендикулярно, поэтому суммарная ~~нап~~ напряжённость $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \frac{\sigma\sqrt{17}}{2\varepsilon_0}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

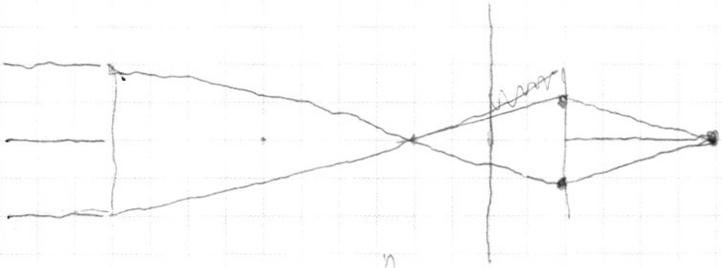
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$v_1 \sin\alpha = v_2 \sin\beta$

$v_2 = v_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 2v_1$



$T = \pi\sqrt{5LC} + \pi\sqrt{2LC}$

$q\mathcal{E} = \frac{q^2}{2C} + \frac{5LI^2}{2}$

$q = C\mathcal{E}$

$C\mathcal{E}^2 = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} + \frac{5LI^2}{2}$

$5LI^2 = C\mathcal{E}^2$

$I_{01}^2 = \frac{C\mathcal{E}^2}{5L}$

$I_{02}^2 = \frac{C\mathcal{E}^2}{2L}$

$h = \frac{D}{4}$

$S_0 = \frac{\pi D^2}{64}$ $\quad tg\,\alpha = \frac{D}{4F_0}$

$S = \frac{S_0}{9} = \frac{\pi D^2}{64 \cdot 9} = \frac{\pi d^2}{4}$ $\quad tg\,\alpha' = \frac{3h}{F_0} - tg\,\alpha =$

$d = \frac{D}{12}$ $\quad = \frac{3D}{4F_0} - \frac{D}{4F_0} = \frac{D}{2F_0}$

$\frac{60 \cdot 330}{25 \cdot 24} = 33$ $\quad \frac{60 \cdot 330}{24 \cdot 25} = \frac{12 \cdot 66}{24} = 33$

$\frac{8{,}31}{37}$

9,9

26 4

27 4,2 3

$V_1 = \frac{\nu R T_1}{p_0}$ $\quad V_2 = \frac{\nu R T_2}{p_0}$ $\quad T_0 = 385$

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{4}$ $\quad V_1 = \frac{3}{7}V$ $\quad V_2 = \frac{4}{7}V$

~~$\frac{\nu RT}{} = const$~~ $\quad V_0 = \frac{V}{2} = \frac{7}{6}V_1 = \frac{7}{8}V_2$ $\quad \Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_0 - T_1) =$

$= \frac{1}{4}\nu R T_1$

$pV_1 = \nu R T_1$ $\quad A = \frac{1}{6}pV_1 = \frac{\nu R T_1}{6}$ $\quad U_1 = \frac{3}{2}\nu R T_1$

$(p+dp)(V_1+dV) = \nu R(T_1 + dT_1)$ $\quad pdV = \nu R\, dT_1$ $\quad Q = \frac{10}{24}\nu R T_1$

$pV_2 = \nu R T_2$ $\quad pdV = \nu R\, dT_2$

$(p+dp)(V_2 - dV) = \nu R(T_1 + dT_2)$ $\quad (V_1 - V_2)dp = \nu R(dT_1 - dT_2)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$v_{1x} = v_1 \sin\alpha = \frac{2v_1}{3}$$

$$v_{1y} = v_1 \cos\alpha + u = \frac{v_1\sqrt{5}}{3} + u$$

$$v_1'^2 = \frac{4v_1^2}{9} + \frac{5v_1^2}{9} + \frac{2v_1\sqrt{5}}{3} + u^2 = v_1^2 + \frac{2v_1\sqrt{5}u}{3} + u^2$$

$$v_{2x} = \frac{2v_1}{3}$$

$$v_{2y} = 2v_1\cos\beta - u = \frac{4\sqrt{2}v_1}{3} - u$$

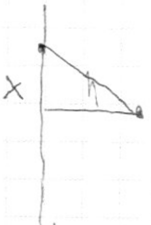
$$v_2'^2 = \frac{4v_1^2}{9} + \frac{32v_1^2}{9} - \frac{8\sqrt{2}v_1}{3} + u^2 = 4v_1^2 - \frac{8\sqrt{2}v_1u}{3} + u^2$$

$$v_2'^2 - v_1'^2 = 3v_1^2 - v_1u\left(\frac{8\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{3}\right) = 0$$

$$u = \frac{9v_1}{8\sqrt{2}-2\sqrt{5}} = \frac{9v_1(8\sqrt{2}+2\sqrt{5})}{108} = v_1\frac{8\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{12} = u\sqrt{2}+\sqrt{5}$$

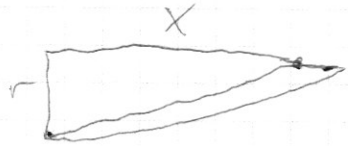
$$\frac{dq}{dS} = \sigma$$

$$dS = a\,dl$$



$$dE = \frac{k\,dq}{r^2} = \frac{k\,da}{x^2+h^2+a^2} = \frac{k\sigma x\,da}{x^2+h^2+a^2} = \frac{\sigma x}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{da}{x^2+h^2+a^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{da}{x^2+h^2+a^2} = \int \frac{d(a+t)}{a^2+t}$$



$$\int \frac{dx}{r^2+x^2}$$

$$\frac{4\sigma^2}{\varepsilon_0^2} + \frac{\sigma^2}{4\varepsilon_0^2} = \frac{17\sigma^2}{4\varepsilon_0^2}$$

$$\frac{dx}{\sin\alpha} = \frac{r^2+x^2+2x\,dx}{\sin\alpha}$$

$$\alpha = \operatorname{asin}\sqrt{\frac{r^2}{r^2+x^2}}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА