Олимпиада «Физтех» по физике, февраль 2022

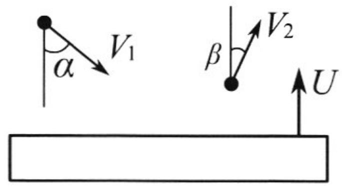
Класс 11

Вариант 11-02

Шифр

(заполняется секретарём)

1. Массивная плита движется с постоянной скоростью U вертикально вверх. К плите подлетает шарик, имеющий перед ударом скорость $V_1 = 6$ м/с, направленную под углом $\alpha\left(\sin\alpha = \frac{2}{3}\right)$ к вертикали (см. рис.). После неупругого удара о гладкую горизонтальную поверхность плиты шарик отскакивает со скоростью V_2, составляющей угол $\beta\left(\sin\beta = \frac{1}{3}\right)$ с вертикалью.



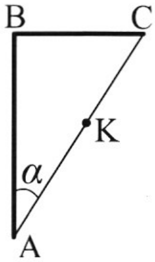
1) Найти скорость V_2.
2) Найти возможные значения скорости плиты U при таком неупругом ударе.

Действие силы тяжести за малое время удара не учитывать. Ответы допустимы через радикалы из целых чисел.

2. Цилиндрический теплоизолированный горизонтально расположенный сосуд разделен на два отсека теплопроводящим поршнем, который может перемещаться горизонтально без трения. В первом отсеке находится гелий, во втором – неон, каждый газ в количестве $\nu = 6/25$ моль. Начальная температура гелия $T_1 = 330$ К, а неона $T_2 = 440$ К. Температуры газов начинают медленно выравниваться, а поршень начинает медленно двигаться. Оба газа одноатомные, газы считать идеальными. $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

1) Найти отношение начальных объемов гелия и неона.
2) Найти установившуюся температуру в сосуде.
3) Какое количество теплоты передал неон гелию?

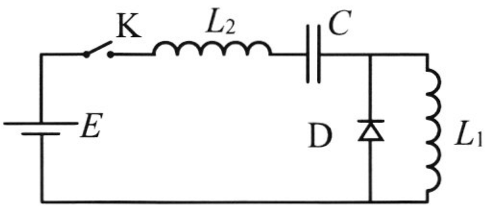
3. Две бесконечные плоские прямоугольные пластины AB и BC перпендикулярны друг к другу и образуют двугранный угол с ребром B. На рисунке показано сечение угла плоскостью, перпендикулярной ребру B.



1) Пластина BC заряжена с постоянной поверхностной плотностью заряда. Угол $\alpha = \pi/4$. Во сколько раз увеличится напряженность электрического поля в точке K на середине отрезка AC, если пластину AB тоже зарядить с такой же поверхностной плотностью заряда?

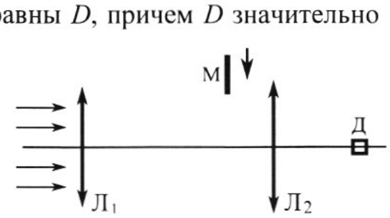
2) Пластины BC и AB заряжены положительно с поверхностной плотностью заряда $\sigma_1 = 4\sigma, \sigma_2 = \sigma$, соответственно. Угол $\alpha = \pi/8$. Найти напряженность электрического поля в точке K на середине отрезка AC.

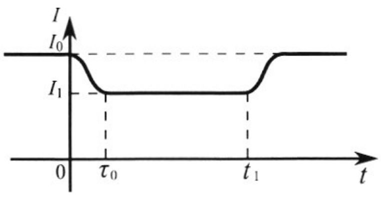
4. Электрическая цепь собрана из идеальных элементов: источника с ЭДС E, катушек с индуктивностями $L_1 = 3L$, $L_2 = 2L$, конденсатора емкостью C, диода D (см. рис.). Ключ K разомкнут, конденсатор не заряжен, тока в цепи нет. После замыкания ключа возникают колебания тока в L_2.



1) Найти период T этих колебаний.
2) Найти максимальный ток I_{01}, текущий через катушку L_1.
3) Найти максимальный ток I_{02}, текущий через катушку L_2.

5. Оптическая система состоит из двух соосных тонких линз Л$_1$ и Л$_2$ (см. рис.) с фокусными расстояниями F_0 и $F_0/3$, соответственно. Расстояние между линзами $1{,}5F_0$. Диаметры линз одинаковы и равны D, причем D значительно меньше F_0. На линзу Л$_1$ падает параллельно оси системы пучок света с одинаковой интенсивностью в сечении пучка. Прошедший через обе линзы свет фокусируется на фотодетекторе Д, на выходе которого сила тока пропорциональна мощности падающего на него света. Круглая непрозрачная мишень М, плоскость которой перпендикулярна оси системы, движется с постоянной скоростью перпендикулярно оси системы так, что центр мишени пересекает ось на расстоянии $5F_0/4$ от Л$_1$. На рисунке показана зависимость тока I фотодетектора от времени t (секундомер включен в момент начала уменьшения тока). $I_1 = 8I_0/9$.



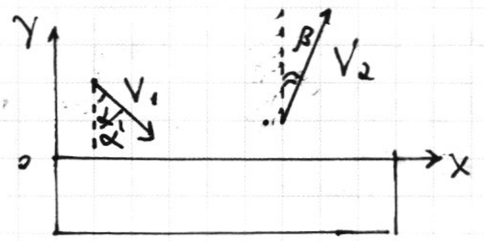


1) Найти расстояние между линзой Л$_2$ и фотодетектором.
2) Определить скорость V движения мишени. 3) Определить t_1.

Известными считать величины F_0, D, τ_0.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1



1) Так как плита гладкая =>

$V_{1x} = V_{2x}$ (нет сил трения => нет ΔV_x)

$V_1 \sin\alpha = V_2 \sin\beta$

$V_2 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot V_1 = 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{1} = 12 \frac{м}{с}$

2) Перейдём в СО плиты, тогда:

$\vartheta_{1y}' = V_1 \cos\alpha + u \qquad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\vartheta_{2y}' = V_2 \cos\beta - u \qquad \cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Крайний случай, когда столкновение можно считать упругим (потерями энергии при столкновении можно пренебречь)

и т.к. плита массивна:

$\vartheta_{1y}' = \vartheta_{2y}'$

$V_1 \cos\alpha + u = V_2 \cos\beta - u$

$2u = V_2 \cos\beta - V_1 \cos\alpha$

$u = \frac{V_2 \cos\beta - V_1 \cos\alpha}{2} = \frac{12 \cdot 2\sqrt{2}}{3 \cdot 2} - \frac{6 \cdot \sqrt{5}}{3 \cdot 2} = 4\sqrt{2} - \sqrt{5} \ \frac{м}{с}$

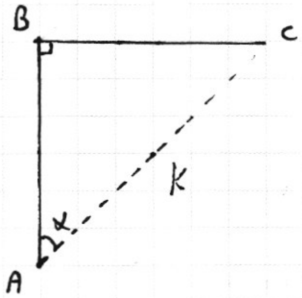
Другой крайний случай, когда столкновение можно считать абсолютно неупругим (после столкновения будут двигаться со скоростью плиты)

$\vartheta_{2y}' = 0; \ V_2 \cos\beta - u = 0$

$u = V_2 \cos\beta = 12 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 8\sqrt{2} \ \frac{м}{с}$

Ответ: $4\sqrt{2} - \sqrt{5} < u < 8\sqrt{2} \ \frac{м}{с}$

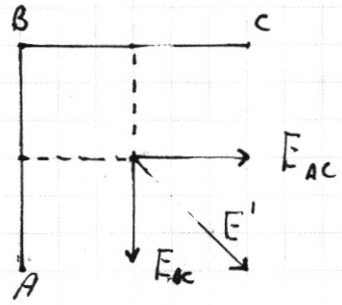
1) №3



$\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow ABC$ р/б

K - середина AC

Рассмотрим поле создаваемое каждой нитью по отдельности.



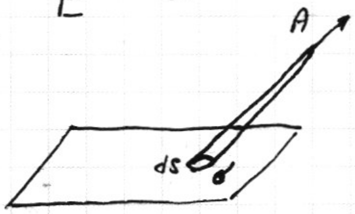
В силу симметрии $E_{AC} = E_{BC} = E$

E' - результирующая напряженность.

$E' = \sqrt{E^2 + E^2} = \sqrt{2} E \Rightarrow$

$\frac{E'}{E_{BC}} = \frac{\sqrt{2} E}{E} = \sqrt{2}$

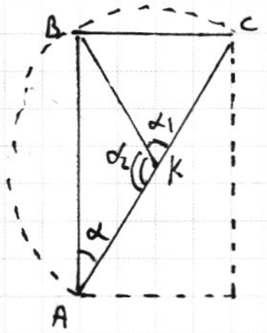
2)



Найдем напряженность в точке A, создаваемой кусочком пластины dS с плотностью заряда σ

$dE_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon R^2} = \frac{q\,dS\,\sigma}{4\pi\varepsilon R^2} = \frac{\sigma d\Omega}{4\pi\varepsilon}$, где $d\Omega$ - телесный угол под которым видна видн кусочек пластин $\Rightarrow E_A = \frac{\sigma\Omega}{4\pi\varepsilon_0}$, где Ω - телесный угол под которым видно пластину.

В нашем случае



"пластину" AC видно из точки K под телесным углом $2\pi \Rightarrow$ телесные углы $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$

$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{BC}{AB} = tg\alpha = tg\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$tg\left(\frac{\pi}{8}\right) = tg\left(\frac{\pi}{4}/2\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{4-2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = n$$

$$\alpha_1 = n\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\alpha_1}{n}$$

$$n\alpha_2 + \alpha_2 = \cancel{n}\,2\pi$$

$$\alpha_2(n+1) = 2\pi$$

$$\alpha_2 = \frac{2\pi}{n+1} \Rightarrow E_{BA} = \frac{\alpha_2 \sigma}{4\pi\varepsilon} = \frac{2\pi\sigma}{(n+1)4\pi\varepsilon_0}$$

$$\alpha_1 = 2\pi - \frac{2\pi}{n+1} = 2\pi\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) = \frac{2\pi n}{n+1} \Rightarrow E_{BC} = \frac{\alpha_1 \cdot 4\sigma}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{2\pi n\, 4\sigma}{(n+1)4\pi\varepsilon_0} = \frac{8\pi n\sigma}{(n+1)4\pi\varepsilon_0}$$

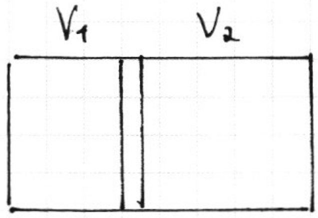
$$E = \sqrt{E_{BC}^2 + E_{BA}^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi\sigma}{(n+1)4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \cdot 64n^2 + \left(\frac{\pi\sigma}{(n+1)4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \cdot 4} = \frac{\pi\sigma}{(n+1)4\pi\varepsilon_0}\sqrt{64n^2+4}$$

где $n = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$; а $\frac{1}{4\pi\varepsilon} = 9\cdot 10^{9}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2



V_1 - объем гелия

V_2 - объем неона

1) В $t=0$

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{\nu R T_1}{V_1} \\ P_2 &= \frac{\nu R T_2}{V_2} \\ P_1 &= P_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{T_1}{V_1} = \frac{T_2}{V_2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{330}{440} = \frac{33}{44} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

2) Т.к. трения нет => потерями энергии при перемещении поршня можно пренебречь

З.с.Э

$$\frac{3}{2}\nu R T_1 + \frac{3}{2}\nu R T_2 = \frac{3}{2}\nu R T + \frac{3}{2}\nu R T$$

$$\cancel{\tfrac{3}{2}}\ T_1 + T_2 = 2T$$

$$T = \frac{T_1+T_2}{2} = \frac{330+440}{2} = \frac{770}{2} = 385\,K$$

3) $P_1 = \dfrac{\nu R T_1}{3xS}$ начальное давление гелия

$P_1' = \dfrac{\nu R T}{3{,}5xS}$ конечное давление гелия

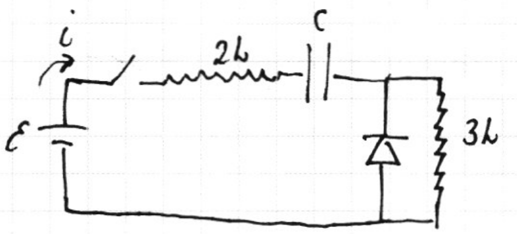
$$\frac{P_1'}{P_1} = \frac{T}{3{,}5}\cdot\frac{3}{T_1} = \frac{385\cdot 3}{3{,}5\cdot 330} = \frac{385\cdot 30}{35\cdot 330} = \frac{11}{1}\cdot\frac{1}{11} = 1 \Rightarrow$$ процесс расшир.

изобарный

$$\Delta Q = C_p \nu \Delta T = \frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}\cdot\frac{6}{25}(440-385)\cdot 8{,}31 = 274{,}23\ Дж$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



1) Зарядка конденсатора

$$\mathcal{E} = 2L\frac{di}{dt} + \frac{Q}{C} + 3L\frac{di}{dt}$$

$$\mathcal{E} = 5L\frac{di}{dt} + \frac{Q}{C}$$

$$\frac{di}{dt} = \ddot{Q}\ ;\ i = \dot{Q}$$

$$\mathcal{E} = 5L\ddot{Q} + \frac{Q}{C}$$

$$\frac{\mathcal{E}}{5L}\quad \ddot{Q} + \frac{Q}{5LC} - \frac{\mathcal{E}}{5L} = 0$$

Пусть $Q = q + q_0$, такие, что $\frac{q_0}{5LC} - \frac{\mathcal{E}}{5L} = 0 \Rightarrow \frac{q_0}{C} = \mathcal{E} \Rightarrow q_0 = \mathcal{E}C$

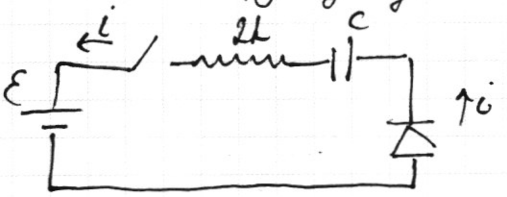
$$q\ Q = A \overset{\cos}{\sin}\left(\sqrt{\tfrac{1}{5LC}}\,t\right) + C\mathcal{E}$$

В $t=0$: $Q=0 \Rightarrow 0 = A + C\mathcal{E} \Rightarrow A = -C\mathcal{E}$

$$Q(t) = -C\mathcal{E}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{5LC}}t\right) + C\mathcal{E} = C\mathcal{E}\left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{5LC}}t\right)\right) \Rightarrow i(t) = \frac{C\mathcal{E}}{\sqrt{5LC}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{5LC}}t\right)$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{5LC}$$

Пола периода конденсатор будет заряжаться $i>0$, потом конденсатор начнет разряжаться $i<0$ $\Rightarrow$ ток потечёт по ~~конденсатору~~ диоду



$$\mathcal{E} = 2L\ddot{Q} + \frac{Q}{C}$$

соотв.

$$Q = A\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2LC}}t\right) + C\mathcal{E}$$

В $t=0$

$$Q = 2C\mathcal{E} \Rightarrow A = C\mathcal{E}$$

$$Q(t) = C\mathcal{E}\left(1 + \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2LC}}t\right)\right),\ \dot{Q}(t) = i(t) = -\frac{C\mathcal{E}}{\sqrt{2LC}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2LC}}t\right)$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{2LC}$$

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{T}_1}{2} + \frac{\tilde{T}_2}{2} = \pi\sqrt{5LC} + \pi\sqrt{2LC} = \pi\sqrt{LC}\,(\sqrt{5}+\sqrt{2})\ c$$

2) В процессе зарядки

$$i(t) = \frac{C\mathcal{E}}{\sqrt{5LC}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{5LC}}t\right) \Rightarrow i_{max} = \frac{C\mathcal{E}}{\sqrt{5LC}}$$ – максимальный ток для L_1 (т.к. во время разряд. через него не течет ток)

В процессе разрядки

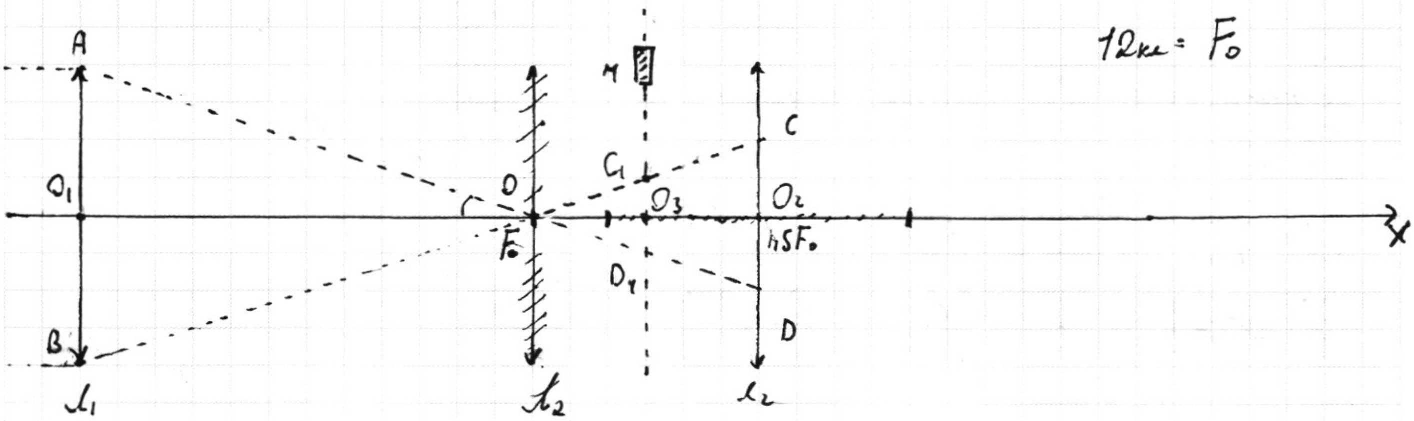
$$i(t) = \frac{C\mathcal{E}}{\sqrt{2LC}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{5LC}}t\right) \Rightarrow i_{max} = \frac{C\mathcal{E}}{\sqrt{2LC}}$$ – максимальный ток для L_2

L_1: $i_{max} = \dfrac{C\mathcal{E}}{\sqrt{5LC}}$

L_2: $i_{max} = \dfrac{C\mathcal{E}}{\sqrt{2LC}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



I) Сила тока начинает падать, когда линейка начнет пересекать OC и возрастать, когда начнет пересекать OD

Т.к. $D \ll F_0 \Rightarrow \frac{D}{F_0} \ll 1 \Rightarrow tg\, AOO_1 \approx \frac{D}{2F_0}$

Т.к. лучи проходят параллельно первой линзе => они пересекаются в фокусе этой линзы, d - расстояние от второй линзы до изобр. в точке F_0 фокуса первой линзы

$d = 1{,}5F_0 - F_0 = \frac{F_0}{2}$

$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{F_0}{3}}$

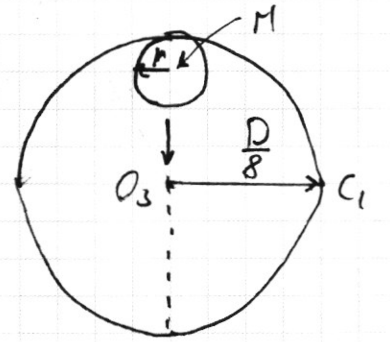
$\frac{2}{F_0} + \frac{1}{f} = \frac{3}{F_0}$

$\frac{1}{f} = \frac{1}{F_0} \Rightarrow f = F_0$ - расстояние от $Л_2$ до Д

II 2) 1) $\Delta ABO \sim \Delta OC_1D_1$ ($\angle AOB = \angle C_1OD_1$ и $AB \parallel C_1D_1$) =>

$\Rightarrow \frac{AB}{C_1D_1} = \frac{O_1O}{OO_3} \Rightarrow C_1D_1 = AB \cdot \frac{OO_3}{O_1O} = D \cdot \frac{\frac{5}{4}F_0 - F_0}{F_0} = \frac{D}{4}$

2)



Т.к $I_1 = \frac{8I_0}{9} \Rightarrow$ площадь шайбы $S_1 = \frac{8S_0}{9}$

(S_0 – площадь окружность с $R = \frac{D}{8}$)

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \pi r^2 \\ S_0 &= \pi \frac{D^2}{64} \\ \frac{S_1}{S_0} &= \frac{8}{9} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{r^2}{D^2} \cdot 64 = \frac{8}{9}$$

$$\frac{r^2}{D^2} \cdot 8 = \frac{1}{9}$$

$$r^2 = D^2 \frac{1}{8 \cdot 9}$$

Расстояние $2r$ шайба проходит за $\tau_0 \Rightarrow$ $\quad r = \frac{D}{6\sqrt{2}}$

$$\vartheta = \frac{2r}{\tau_0} = \frac{2D}{6\sqrt{2}\tau_0} = \frac{D}{3\sqrt{2}\tau_0}$$

3) $\cancel{\tau_1 = \tau_0}$ $\tau_1 = \frac{2R}{\vartheta} = \frac{D}{4} \cdot \frac{3\sqrt{2}\tau_0}{D} = \frac{3\sqrt{2}\tau_0}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА