

Олимпиада «Физтех» по физике, февраль 2022

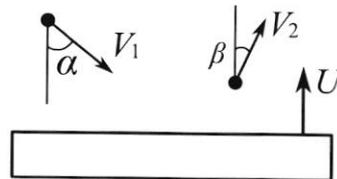
Класс 11

Вариант 11-04

Шифр

(заполняется секретарем)

1. Массивная плита движется с постоянной скоростью U вертикально вверх. К плите подлетает шарик, имеющий перед ударом скорость $V_1 = 18$ м/с, направленную под углом α ($\sin \alpha = \frac{2}{3}$) к вертикали (см. рис.). После неупругого удара о гладкую горизонтальную поверхность плиты шарик отскакивает со скоростью V_2 , составляющей угол β ($\sin \beta = \frac{3}{5}$) с вертикалью.

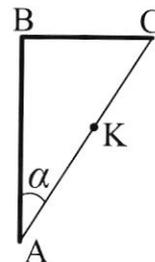


- 1) Найти скорость V_2 .
 - 2) Найти возможные значения скорости плиты U при таком неупругом ударе.
- Действие силы тяжести за малое время удара не учитывать. Ответы допустимы через радикалы из целых чисел.

2. Цилиндрический теплоизолированный горизонтально расположенный сосуд разделен на два отсека теплопроводящим поршнем, который может перемещаться горизонтально без трения. В первом отсеке находится аргон, во втором – криптон, каждый газ в количестве $\nu = 3/5$ моль. Начальная температура аргона $T_1 = 320$ К, а криптона $T_2 = 400$ К. Температуры газов начинают медленно выравниваться, а поршень начинает медленно двигаться. Оба газа одноатомные, газы считать идеальными. $R = 8,31$ Дж/(моль·К).

- 1) Найти отношение начальных объемов аргона и криптона.
- 2) Найти установившуюся температуру в сосуде.
- 3) Какое количество теплоты передал криптон аргону?

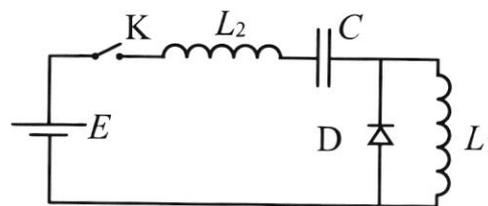
3. Две бесконечные плоские прямоугольные пластины АВ и ВС перпендикулярны друг к другу и образуют двугранный угол с ребром В. На рисунке показано сечение угла плоскостью, перпендикулярной ребру В.



1) Пластина ВС заряжена с постоянной поверхностной плотностью заряда. Угол $\alpha = \pi/4$. Во сколько раз увеличится напряженность электрического поля в точке К на середине отрезка АС, если пластину АВ тоже зарядить с такой же поверхностной плотностью заряда?

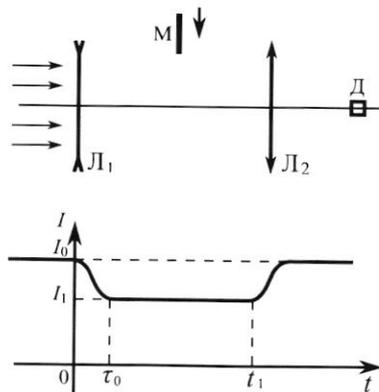
2) Пластины ВС и АВ заряжены положительно с поверхностной плотностью заряда $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = 2\sigma/7$, соответственно. Угол $\alpha = \pi/9$. Найти напряженность электрического поля в точке К на середине отрезка АС.

4. Электрическая цепь собрана из идеальных элементов: источника с ЭДС E , катушек с индуктивностями $L_1 = 5L$, $L_2 = 4L$, конденсатора емкостью C , диода D (см. рис.). Ключ K разомкнут, конденсатор не заряжен, тока в цепи нет. После замыкания ключа возникают колебания тока в L_2 .



- 1) Найти период T этих колебаний.
- 2) Найти максимальный ток I_{01} , текущий через катушку L_1 .
- 3) Найти максимальный ток I_{02} , текущий через катушку L_2 .

5. Оптическая система состоит из двух соосных тонких линз L_1 и L_2 (см. рис.) с фокусными расстояниями $-2F_0$ и F_0 , соответственно. Расстояние между линзами $2F_0$. Диаметры линз одинаковы и равны D , причем D значительно меньше F_0 . На линзу L_1 падает параллельно оси системы пучок света с одинаковой интенсивностью в сечении пучка. Прошедший через обе линзы свет фокусируется на фотодетекторе Д, на выходе которого сила тока пропорциональна мощности падающего на него света. Круглая непрозрачная мишень М, плоскость которой перпендикулярна оси системы, движется с постоянной скоростью перпендикулярно оси системы так, что центр мишени пересекает ось на расстоянии F_0 от L_1 . На рисунке показана зависимость тока I фотодетектора от времени t (секундомер включен в момент начала уменьшения тока). $I_1 = 7I_0/16$



- 1) Найти расстояние между линзой L_2 и фотодетектором.
- 2) Определить скорость V движения мишени. 3) Определить t_1 .

Известными считать величины F_0 , D , τ_0 .

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

1) Рассмотрим СЗИ на Ox
(т.к. нет сил, действующих в этой
оси):

$$m V_1 \sin \alpha = m V_2 \sin \beta$$

(m - масса шарика)

$$\Rightarrow V_2 = V_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 18 \frac{2.5}{3.3} \frac{м}{с} = 20 \frac{м}{с}$$

2) Рассмотрим СЗИ на Oy

(т.к. действие внешних сил - силы тяжести, пренебрежимо мало
во время удара):

$$-m V_1 \cos \alpha + M U = m V_2 \cos \beta + M U'$$

(M - масса пластины, $M \gg m$, U' - скорость пластины после удара)

$$\Rightarrow U' = U - \frac{m}{M} (V_1 \cos \alpha + V_2 \cos \beta)$$

$$\frac{m}{M} \ll 1 \Rightarrow U' = U$$

Тогда рассмотрим ИСО пластины:

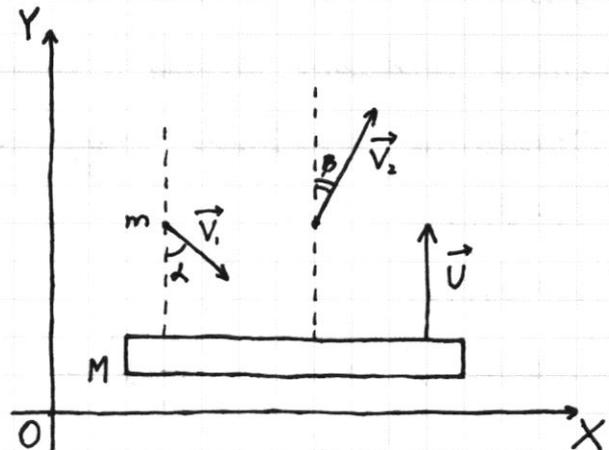
Запишем СЗЭ (т.к. удар - абсолютно упругий)

$$\frac{m(V_1^2 \sin^2 \alpha + (-V_1 \cos \alpha - U)^2)}{2} = \frac{m(V_2^2 \sin^2 \beta + (V_2 \cos \beta - U)^2)}{2}$$

$$\Rightarrow (-V_1 \cos \alpha - U)^2 = (V_2 \cos \beta - U)^2 \Rightarrow 2U = V_2 \cos \beta - V_1 \cos \alpha$$

$$\Rightarrow U = \frac{20 \cdot (\sqrt{1 - \frac{25}{33}}) - 18 \cdot (\sqrt{1 - \frac{25}{33}})}{2} = 8 - 3\sqrt{5} \frac{м}{с}$$

Ответ: $20 \frac{м}{с}$; $8 - 3\sqrt{5} \frac{м}{с}$

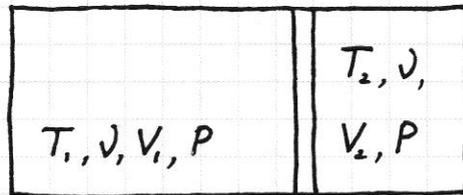


№ 2

1) V_1, V_2 - объемы аргона и криптона соответственно.

т.к. поршень движется медленно \Rightarrow в любой момент

времени давления аргона и криптона равны (P)



Запишем уравнение Менделеева - Клапейрона:

$$\begin{cases} PV_1 = \nu RT_1, \\ PV_2 = \nu RT_2; \end{cases}$$

Разделим 1 на 2 и получим

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{320}{400} = \frac{4}{5}$$

2) П.к. сосуд теплоизолирован \Rightarrow Энергия не меняется:

$U_1 + U_2 = U'_1 + U'_2$ (U_1, U_2 - начальные, U'_1, U'_2 - конечные энергии аргона и криптона соответственно)

$$\frac{3}{2} \nu RT_1 + \frac{3}{2} \nu RT_2 = \frac{3}{2} \nu RT_3 + \frac{3}{2} \nu RT_3 \quad (T_3 - \text{установившаяся температура})$$

$$\Rightarrow T_3 = \frac{T_1 + T_2}{2} = 360 \text{ K}$$

3) т.к. $U_1 + U_2 = \text{const}$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} PV_1 + \frac{3}{2} PV_2 = \text{const}$$

т.к. объем сосуда не меняется ($V_1 + V_2 = \text{const}$)

$$\Rightarrow P = \text{const}$$

П.е. процесс изобарный.

тогда:

$$\Delta U = Q + A = \frac{3}{2} P \Delta V = \frac{3}{2} A \Rightarrow Q = \frac{5}{2} A \quad (A - \text{работа над газом})$$

$$Q = \frac{5}{3} \Delta U = \frac{5}{3} \nu R \Delta T \quad (\text{для аргона}):$$

$$Q = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot 8,31 \cdot 40 \text{ Дж} = 332,4 \text{ Дж}$$

Ответ: 0,8; 360K; 332,4 Дж

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

1) BC -заряжена плотностью σ , и

в точке K - напряженность поля \vec{E}_1 ,

т.к. K - лежит на середине $AC \Rightarrow$

лежит на серединном перпендикуляре
к BC (как на средней линии $\triangle ABC$)

$\Rightarrow \vec{E}_1 \perp BC$ (т.к. при отражении отн. середины не должен измениться
ср.)

т.к. $\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow K$ - лежит на биссектрисе BK $\triangle ABC$

при отражении отн. BK $BC \rightarrow BA$, $\vec{E}_1 \rightarrow \vec{E}'_1$, причем

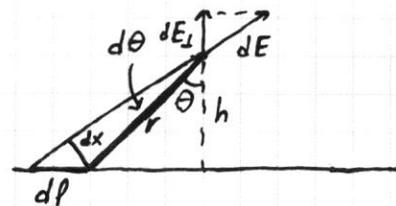
т.к. $\vec{E}'_1 \perp BA$, $BA \perp BC$, $BC \perp \vec{E}_1 \Rightarrow \vec{E}'_1 \perp \vec{E}_1$.

По принципу суперпозиции суммарное поле точкой A и BC ,
заряженной до σ будет равно $\vec{E}_2 = \vec{E}_1 + \vec{E}'_1$ (из т. Пифагора.)

$$E_2^2 = E_1^2 + E_1'^2 = 2E_1^2 \Rightarrow E_2 = \sqrt{2} E_1$$

2) Рассмотрим напряженность поля в точке D , на расстоянии
 h от равномерно заряженного, цилиндрического относительно высоты
из точки D , с линейной плотностью λ и видимым под
углом 2β отрезка

т.к. он симметричен \Rightarrow напряженность
поля будет перпендикулярна отрезку
в точке D .



Рассмотрим вклад куска провода отрезка, видимый под углом

$d\theta$.

$$r = \frac{h}{\cos\theta}$$

$$dx = r d\theta \quad dl = \frac{dx}{\cos\theta} \quad dq = \lambda \cdot dl$$

$$\Rightarrow dE_{\perp} = dE \cdot \cos\theta = k \frac{dq}{r^2} \cos\theta = \frac{\lambda d\theta}{h} \cdot k \cdot \cos\theta$$

\Rightarrow Если проинтегрировать

$$E_{\perp} = \frac{2k\lambda}{h} \cos\beta \sin\beta = E$$

Если отрезок бесконечный (т.е. прямая)

$$E_{\perp} = E = \frac{2k\lambda}{h}$$

Теперь если рассмотреть так же пластину и напряженность в точке D, на расстоянии h от нее, то

$$r = \frac{h}{\cos\theta} \quad dx = r d\theta \quad dl = \frac{dx}{\cos\theta}$$

dE (представим это как полоску с линейной плотностью $\sigma \cdot dl$, тогда)

$$dE = \frac{2k\sigma dl}{r^2} \quad dE_{\perp} = dE \cos\theta = 2k\sigma d\theta$$

$$\Rightarrow E_{\perp} = 4k\sigma\beta$$

Вернемся к решению исходной задачи имея эту формулу.

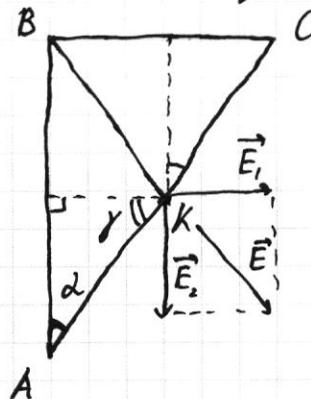
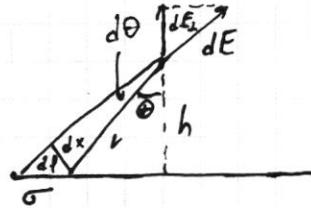
$$E_1 = 4k\sigma_1 \alpha = \frac{4k}{9} \pi \sigma$$

(для пластины BC)

$$E_2 = 4k\sigma_2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{4k}{9} \pi \sigma$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \frac{4k}{9} \pi \sqrt{2} \sigma \approx 1,26 \cdot 10^{10} \sqrt{2} \sigma$$

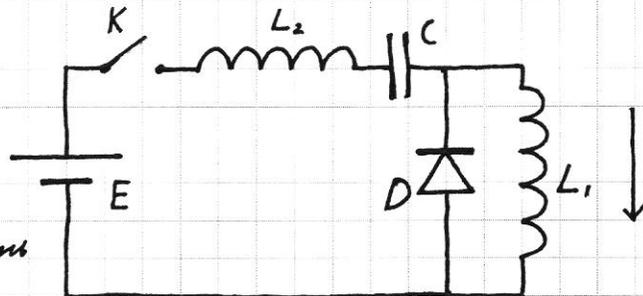
$$\text{Ответ: } \sqrt{2}; 1,26 \cdot 10^{10} \sqrt{2} \sigma$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

1) Рассмотрим момент, когда в L_1 ток - максимальный, тогда при попытке его уменьшить L_1 создаст ЭДС индукции и ток потечёт через диод D .



т.е. можно рассмотреть эквивалентную схему как наложение из схемы с диодом D и катушкой L_1 и всего остального.

тогда каждый колебательный контур состоит из E - ЭДС, L_2 и C .

А период его колебаний тогда составляет:

$$T = 4\pi \sqrt{2\pi\sqrt{L_2 C}} = 4\pi\sqrt{LC}$$

2) тогда максимальный ток через катушку (она не ускорившейся) равен максимальному току через L_2 когда через диод D ничего не идет.

3) Пусть через L_2 течет ток I , тогда т.к. $I = \dot{q}$
(где q - заряд на конденсаторе)

$$\ddot{q}L_2 = E - \frac{q}{C}$$

$$q = E + A \cos(2\sqrt{LC}t + \varphi)$$

$$I = -2\sqrt{LC}A \sin(2\sqrt{LC}t + \varphi)$$

В начальный момент времени $q_0 = 0$ $I_0 = 0 \Rightarrow$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad A = -E$$

Тогда максимальная сила тока через I_1 L_1

$$\text{то } I_{01} = \max(E \cos t)$$

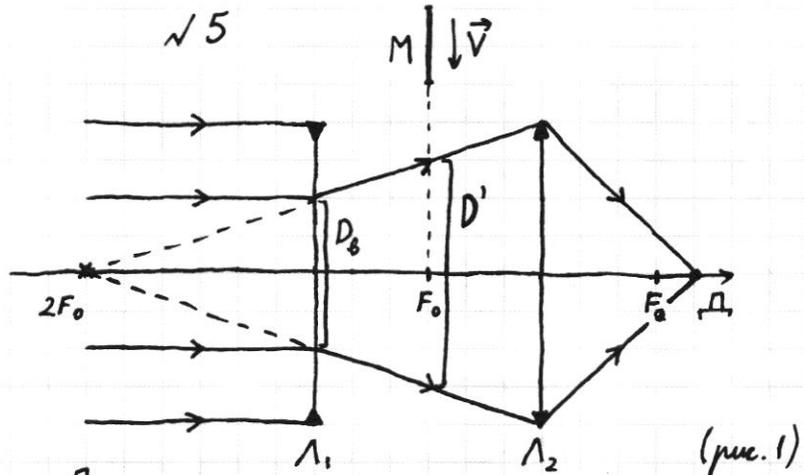
$$I_{01} = \max(E \sin(\sqrt{LC}t)) = E$$

$$3) I_{02} = \max(E \sin(2\sqrt{LC}t)) = E$$

Ответ: $4\pi\sqrt{LC}$; E ; E

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) После прохождения пучка света через линзу Λ_1 — его можно заменить на точечный источник света в ее фокусе ($2F_0$), тогда диод D_1



находится на месте изображения этого источника через Λ_2 .

Запишем формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{x} = \frac{1}{F_0} \quad (f - \text{расстояние от } \Lambda_2 \text{ до источника, } x - \text{расстояние от } \Lambda_2$$

до диода D_1)

$$x = \left(\frac{1}{F_0} - \frac{1}{4F_0} \right)^{-1} = \frac{4}{3} F_0$$

2) Пусть интенсивность света = α .

А сила тока на D_1 зависит от мощности света как:

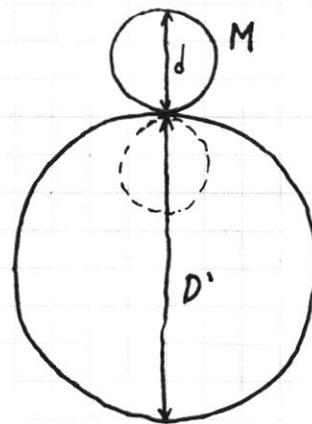
$$I = k \cdot P$$

$$\frac{D_B}{D} = \frac{2F_0}{4F_0} \Rightarrow D_B = D \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{из подобия})$$

Тогда мощность тока света в параболе

$$P_0 = \alpha \cdot \frac{\pi D_B^2}{4} \quad (\text{т.к. свет попавший только на круг диаметра } D_B \text{ попадает на диод } D_1)$$

$$\frac{D'}{D} = \frac{3F_0}{4F_0} \Rightarrow D' = \frac{3}{4} D \quad (\text{из подобия})$$



(рис.2)

~~В момент времени T_0 мишень M закрывает наибольшую площадь.~~
Рассмотрим плоскость, в которой движется мишень M. (рис 2)

Эта плоскость пересекает конус света по окр. диаметрам D' .

Найдем отношение открытой площади ко всей в момент времени T_0 .

$$S_0 = \frac{\pi D'^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} \quad (\text{открытая площадь})$$

$$S_8 = \frac{\pi D'^2}{4} \quad (\text{вся площадь})$$

$$\frac{S_0}{S_8} = \alpha = 1 - \frac{d^2}{D'^2} = 1 - \frac{16d^2}{9D^2}$$

Поскольку т.к. мощность света прямо пропорциональна площади

$$P_1 = \alpha P_0 \quad (P_1 - \text{мощность света упавшего на диод D в } T_0)$$

$$I_1 = k P_1 = \alpha k P_0 = \alpha I_0 = \frac{7}{16} I_0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{7}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{D} = \frac{9}{16} \Rightarrow d = \frac{9}{16} D$$

За время T_0 мишень сместилась на d

$$\Rightarrow V = \frac{d}{T_0} = \frac{9D}{16T_0}$$

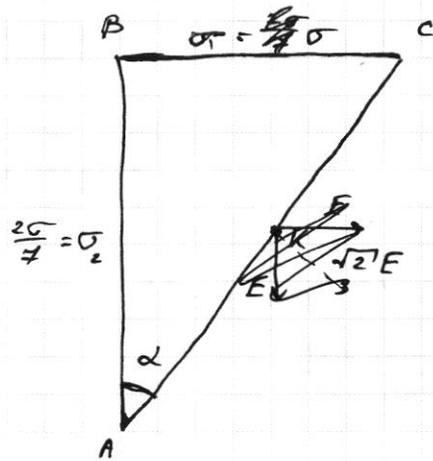
3) в момент времени t_1 мишень прошла до края круга D' диаметра.

т.е. прошла расстояние D'

$$\Rightarrow V = \frac{D'}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{D'}{V} = \frac{\frac{3}{4}D}{\frac{9D}{16T_0}} = \frac{4}{3}T_0$$

$$\text{Ответ: } \frac{4}{3}T_0; \frac{9D}{16T_0}; \frac{4}{3}T_0$$

$$\frac{q^2}{2C} \rightarrow \frac{Cv^2}{2} \Rightarrow q^2 = c^2 v^2 \Rightarrow v = \frac{q}{c}$$



$$E = 4L \frac{dI_1}{dt} + 5L \frac{dI_2}{dt} + \frac{q}{C} =$$

$$= 4L \ddot{q} + 5L \ddot{q} + \frac{q}{C} = E$$

$$9L \ddot{q} = E - \frac{q}{C}$$

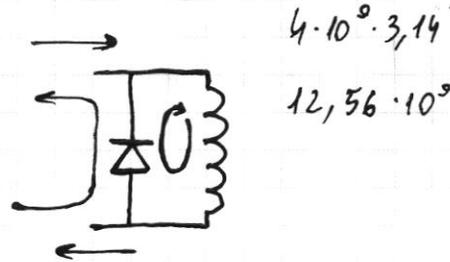
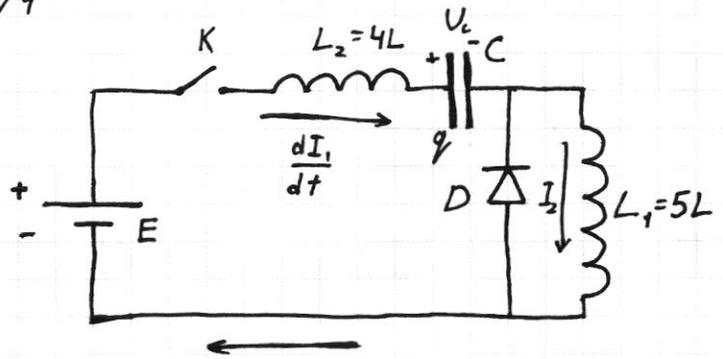
$$q - EC = X$$

$$\ddot{X} = \frac{X}{9LC}$$

$$X = A \cos(\sqrt{9LC} X t + \varphi)$$

$$q = EC + A \cos(3\sqrt{LC} q t + \frac{\pi}{2})$$

N4



N5

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F_0} \quad V = \frac{S}{f} = \frac{2D}{16 f_0}$$

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{4F_0} = \frac{1}{F_0} \quad t_1 = \frac{S}{V} = \frac{3D}{9 \frac{D}{16 f_0}}$$

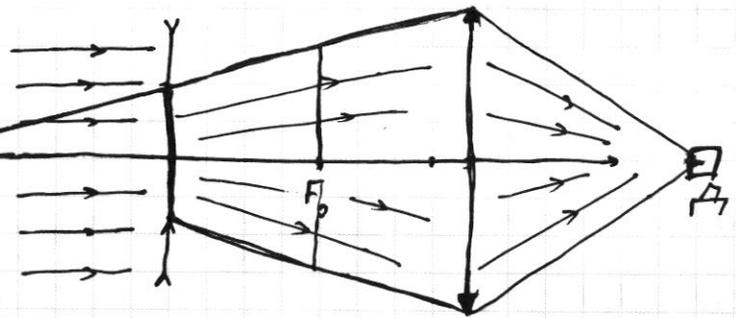
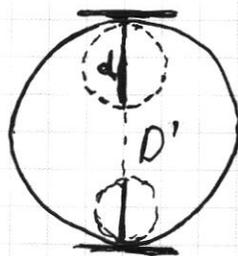
$$\Rightarrow d = \frac{4}{3} F_0 \quad t_1 = \frac{4 \cdot 16 f_0}{9 \cdot 3} = \frac{16}{9} 2 f_0$$

$$\frac{dD}{2} k = I_0$$

$$I_1 = I_0 \left(1 - \frac{16d^2}{9D^2}\right) = \frac{4}{16} I_0$$

$$\Rightarrow \frac{9}{16} = \frac{16d^2}{9D^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{D} = \frac{9}{16} \Rightarrow d = \frac{9}{16} D$$



$$\frac{D'}{3F_0} = \frac{D}{4F_0} \Rightarrow D' = \frac{3}{4} D$$

$$\frac{\pi d^2}{4} \quad \frac{\pi D'^2}{4} = \frac{9\pi D^2}{16 \cdot 4}$$

$$\frac{S_0}{S_8} = \frac{S_0 - S_8}{S_0'} = 1 - \frac{\pi d^2 \cdot 16 \cdot 4}{4 \cdot 9 \cdot \pi D^2} = 1 - \frac{16d^2}{9D^2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$v_1 \sin \alpha + U = v_2 \sin \beta - U$$

$$v_2 = \frac{v_1 \sin \alpha + 2U}{\sin \beta}$$

~~$$v_2 \sin \alpha = v_1 \sin \alpha + 2U$$~~

$$v_1 \cos \alpha = v_2 \cos \beta$$

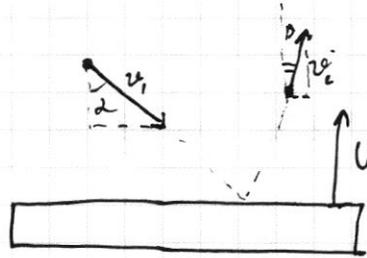
$$v_2 = \frac{v_1 \cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{v_1 \sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{2U}{\sin \beta}$$

~~$$2U = v_1 \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right) \sin \beta \cdot \frac{1}{2}$$~~

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$U = 18 \left(\frac{\sqrt{5} \cdot 5}{3 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 5} \right) \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

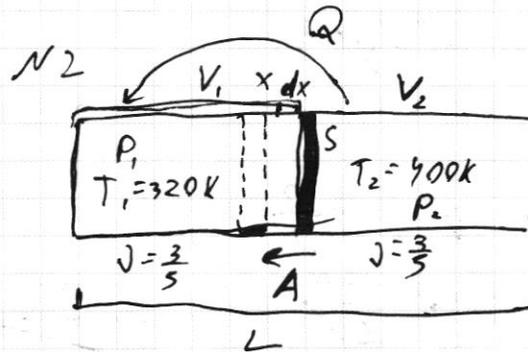


$$V_1 + V_2 = V$$

$$T_3$$

$$\frac{3}{2} J R T_3 + \frac{3}{2} J R T_3 = \frac{3}{2} J R T_2 + \frac{3}{2} J R T_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_3 = \frac{T_1 + T_2}{2}$$



$$dA_1 = -P_1 dx \cdot S \quad \frac{dA_1}{dA_2} = -\frac{P_1}{P_2} \quad \frac{3}{2} P V_1 +$$

$$dA_2 = P_2 dx \cdot S$$

$$-m V_1 + M V = m V_2 + M V'$$

$$M(V' - V) = m(V_1 + V_2)$$

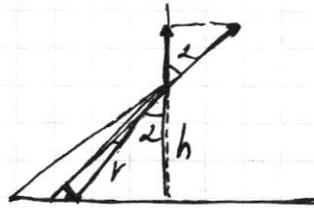
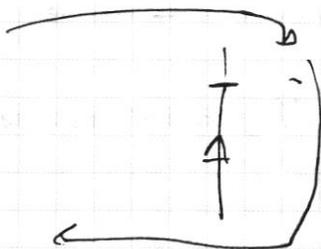
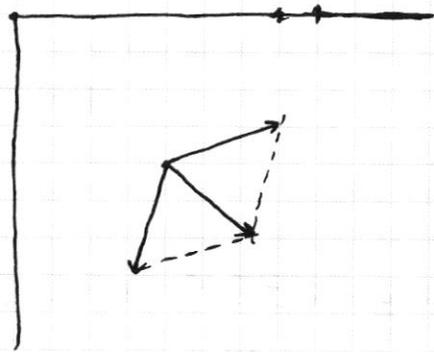
$$\Rightarrow V' - V = \frac{m(V_1 + V_2)}{M} \ll 1$$

$$\varphi = E + A \cos(\sqrt{\epsilon_0} c t + \varphi_0)$$

$$3,85 \cdot 10^{-9}$$

$$3 \cdot 10^9$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$$



$$\frac{h}{r} = \cos \alpha$$

$$\Rightarrow r = \frac{h}{\cos \alpha}$$

$$d\alpha: r \cdot dx = dx$$

$$\frac{dx}{dl} = \cos \alpha \Rightarrow dl = \frac{dx}{\cos \alpha} = \frac{h d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$dq = \sigma \cdot dl = \frac{\sigma h d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$dE_{\perp} = dE \cdot \cos \alpha = k \frac{dq \cos^2 \alpha}{h^2 \epsilon_0} \cdot \cos \alpha$$

$$E = k \frac{q}{R^2}$$

$$dE_{\perp} = k \frac{h d\alpha \cdot \cos^2 \alpha}{h^2 \epsilon_0 \cos^2 \alpha} \cdot \cos \alpha$$

$$E_{\perp} = \frac{k}{h} \sin \alpha \Big|_{\alpha_0}^{\alpha}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

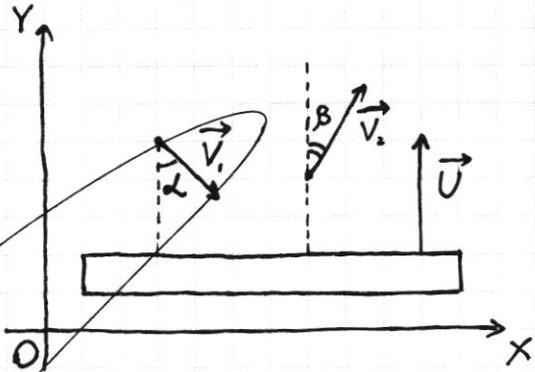
1) Рассмотрим ЗСИ на ось OX:

$$m V_1 \sin \alpha = m V_2 \sin \beta$$

(m - масса шарика)

тогда

$$V_2 = V_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 18 \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}} \frac{m}{c} = 20 \frac{m}{c}$$



2) Перейдем в ИСО плиты (т.к. $M \gg m$, где M - масса плиты)

\Rightarrow после удара ее скорость останется прежней

из СЗЭ в СО плиты до удара

$$\frac{M \cdot 0^2}{2} + \frac{m V_1^2}{2} = \frac{M \Delta U^2}{2} + \frac{m V_2^2}{2} \Rightarrow \Delta U = \sqrt{\frac{m}{M} (V_2^2 - V_1^2)} \ll 1,$$

где ΔU - изменение скорости после удара)

~~Рассмотрим ЗСИ на ось OY:~~

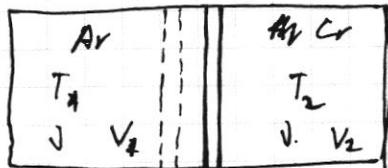
~~(т.к. действительное взаимодействие сил - силы трения, мало во время~~

~~удара)~~

~~$$m (V_1 \cos \alpha - U) = m (V_2 \cos \beta - U)$$~~

$$dQ = \frac{1}{2} P dV_2 = \frac{1}{2} dA$$

$$Q = \frac{1}{2} A$$



~~$$dU = dQ + dA$$~~

$$P dV_2 + dQ = -dU = \frac{3}{2} J R dT_2$$

$$= \frac{3}{2} d(PV_2)$$

$$dU = dQ = \frac{3}{2} P dV_2 = -\frac{3}{2} d(PV_1)$$

$$P_1 = \frac{J R T_1}{V_1} = P_2 = P = \frac{J R T_2}{V_2}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$P + \frac{dQ}{dV_2} = \frac{3}{2} \left(J R \frac{dT_2}{dV_2} \right) = P$$