Олимпиада «Физтех» по физике, февраль 2022

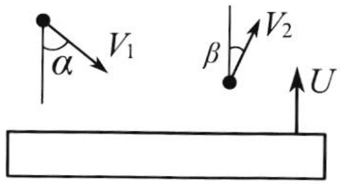
Класс 11

Вариант 11-04

Шифр

(заполняется секретарём)

1. Массивная плита движется с постоянной скоростью U вертикально вверх. К плите подлетает шарик, имеющий перед ударом скорость V_1 = 18 м/с, направленную под углом $\alpha\left(\sin\alpha = \dfrac{2}{3}\right)$ к вертикали (см. рис.). После неупругого удара о гладкую горизонтальную поверхность плиты шарик отскакивает со скоростью V_2, составляющей угол $\beta\left(\sin\beta = \dfrac{3}{5}\right)$ с вертикалью.



1) Найти скорость V_2.

2) Найти возможные значения скорости плиты U при таком неупругом ударе.

Действие силы тяжести за малое время удара не учитывать. Ответы допустимы через радикалы из целых чисел.

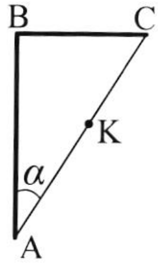
2. Цилиндрический теплоизолированный горизонтально расположенный сосуд разделен на два отсека теплопроводящим поршнем, который может перемещаться горизонтально без трения. В первом отсеке находится аргон, во втором – криптон, каждый газ в количестве $\nu = 3/5$ моль. Начальная температура аргона T_1 = 320 К, а криптона T_2 = 400 К. Температуры газов начинают медленно выравниваться, а поршень начинает медленно двигаться. Оба газа одноатомные, газы считать идеальными. R = 8,31 Дж/(моль·К).

1) Найти отношение начальных объемов аргона и криптона.

2) Найти установившуюся температуру в сосуде.

3) Какое количество теплоты передал криптон аргону?

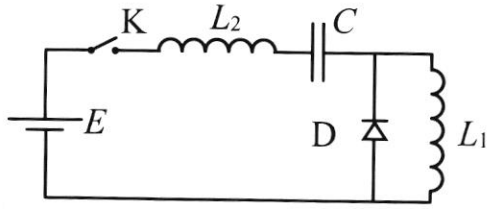
3. Две бесконечные плоские прямоугольные пластины АВ и ВС перпендикулярны друг к другу и образуют двугранный угол с ребром В. На рисунке показано сечение угла плоскостью, перпендикулярной ребру В.



1) Пластина ВС заряжена с постоянной поверхностной плотностью заряда. Угол $\alpha = \pi/4$. Во сколько раз увеличится напряженность электрического поля в точке К на середине отрезка АС, если пластину АВ тоже зарядить с такой же поверхностной плотностью заряда?

2) Пластины ВС и АВ заряжены положительно с поверхностной плотностью заряда $\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = 2\sigma/7$, соответственно. Угол $\alpha = \pi/9$. Найти напряженность электрического поля в точке К на середине отрезка АС.

4. Электрическая цепь собрана из идеальных элементов: источника с ЭДС E, катушек с индуктивностями $L_1 = 5L$, $L_2 = 4L$, конденсатора емкостью C, диода D (см. рис.). Ключ K разомкнут, конденсатор не заряжен, тока в цепи нет. После замыкания ключа возникают колебания тока в L_2.

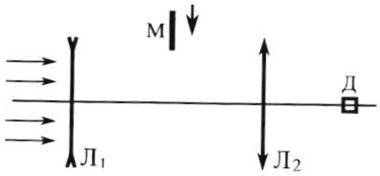


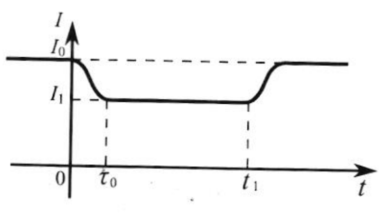
1) Найти период T этих колебаний.

2) Найти максимальный ток I_{01}, текущий через катушку L_1.

3) Найти максимальный ток I_{02}, текущий через катушку L_2.

5. Оптическая система состоит из двух соосных тонких линз Л$_1$ и Л$_2$ (см. рис.) с фокусными расстояниями -2F_0 и F_0, соответственно. Расстояние между линзами 2F_0. Диаметры линз одинаковы и равны D, причем D значительно меньше F_0. На линзу Л$_1$ падает параллельно оси системы пучок света с одинаковой интенсивностью в сечении пучка. Прошедший через обе линзы свет фокусируется на фотодетекторе Д, на выходе которого сила тока пропорциональна мощности падающего на него света. Круглая непрозрачная мишень М, плоскость которой перпендикулярна оси системы, движется с постоянной скоростью перпендикулярно оси системы так, что центр мишени пересекает ось на расстоянии F_0 от $Л_1$. На рисунке показана зависимость тока I фотодетектора от времени t (секундомер включен в момент начала уменьшения тока). $I_1 = 7I_0/16$.





1) Найти расстояние между линзой Л$_2$ и фотодетектором.

2) Определить скорость V движения мишени. 3) Определить t_1.

Известными считать величины F_0, D, τ_0.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Перейдём в СО плиты. Шарик летел со скоростью $\vec{V}_1 - \vec{u}$, а отлетел со скоростью $\vec{V}_2 - \vec{u}$. Поскольку плита была гладкая, проекция импульса на горизонтальную ось ~~со~~хранилась. Т.к $\vec{u}$ не имеет проекции на эту ось то скорость шарика до подлёта имела проекцию $V_1 \sin\alpha$, а стала иметь проекцию $V_2 \sin\beta$, тогда $V_1 \sin\alpha = V_2 \sin\beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad V_2 = V_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 18\frac{м}{с} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}} = 18\frac{м}{с} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = 18\frac{м}{с} \cdot \frac{10}{9} = 20\frac{м}{с}$$

Теперь посмотрим на изменение скорости относительно плиты по вертикальной оси. Оно должно лежать между $V_{1y}^{отн}$ - скорость шарика в СО плиты в проекции на вертикальную ось — при абсолютно неупругом ударе и ~~2V₁ при абсолютно упругом~~ $2V_1^{отн}$ — при абсолютно упругом. Запишем это:

$$\begin{cases} v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta \leq 2(V_1 \cos\alpha + u) \\ V_1 \cos\alpha + V_2 \cos\beta \geq V_1 \cos\alpha + u \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 \cos\alpha + V_2 \cos\beta \leq 2V_1 \cos\alpha + 2u \\ V_2 \cos\beta \geq u \end{cases}$$

$$\begin{cases} u \leq V_2 \cos\beta \\ 2u \geq V_2 \cos\beta - V_1 \cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} u \leq v_2 \cos\beta \\ u \geq \dfrac{v_2\cos\beta - v_1\cos\alpha}{2} \end{cases}$$

Из основного тригонометрического тождества

$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\cos\beta = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

Тогда мы получаем неравенства

$$\begin{cases} u \leq 20\frac{м}{с}\cdot\frac{4}{5} = 16\frac{м}{с} \\ u \geq \dfrac{20\frac{м}{с}\cdot\frac{4}{5} - 18\frac{м}{с}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}}{2} = 8\frac{м}{с} - 3\sqrt{5}\,\frac{м}{с} = 8 - 3\sqrt{5} \text{ м/с} \end{cases}$$

Ответ: 1) $v_2 = 20\frac{м}{с}$, 2) $8-3\sqrt{5}$ м/с $\leq u \leq 16\frac{м}{с}$

2. Пусть начальное давление P_1, объёмы – V_{ap_1}; $V_{кр_1}$ для аргона и криптона соответственно. Тогда по ур-ю Менделеева-Клайперона

$$\begin{cases} P_1 V_{ap_1} = \nu R T_1 \\ P_1 V_{кр_1} = \nu R T_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{V_{ap_1}}{V_{кр_1}} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{320\,K}{400\,K} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$$

Заметим, что работа над аргоном равна по модулю и противоположна по знаку работе над криптоном. Сосуд теплоизолирован. Тогда мы можем записать ЗСЭ/второе начало термодинамики для системы в целом: ($T_к$ – конечная температура)

$$\cancel{\tfrac{3}{2}\nu} R T_1 + \cancel{\tfrac{3}{2}\nu} R T_2 = \cancel{\tfrac{3}{2}\nu} R T_к + \cancel{\tfrac{3}{2}\nu} R T_к$$

$$T_1 + T_2 = 2T_к \Rightarrow T_к = \frac{T_1+T_2}{2} = 360\ K$$

Пусть ~~аргон~~ криптон передал аргону Q теплоты и совершил над ним работу A. Тогда по второрому началу термодинамики:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} -Q = A + \frac{3}{2}\nu R(T_к - T_2) \\ Q = -A + \frac{3}{2}\nu R(T_к - T_1) \end{cases}$$

Посчитаем конечное давление через начальное.

$$\begin{cases} P_2 V_{ар_к} = \nu R T_к \\ P_2 V_{кр_к} = \nu R T_к \end{cases} \Rightarrow P_2(V_{ар_к} + V_{кр_к}) = 2\nu R T_к \Rightarrow \cancel{P_2 V_2 = \nu R}$$

$P_2(V_{ар_1} + V_{кр_1}) = \nu R(T_1 + T_2) \Rightarrow P_2 = P_1$. Пусть в какое-то момент $P = P_3$ и температуры $T_{ар_3}$ и $T_{кр_3}$. Тогда по второму началу термодинамики

$\frac{3}{2}\nu R(T_{ар_3} + T_{кр_3}) = \frac{3}{2}\nu R(T_{ар_1} + T_{кр_1}) \Rightarrow T_{ар_3} + T_{кр_3} = T_{ар_1} + T_{кр_1}$, а по ур-ю Менделеева - Клайперона $P_3(V_{ар_3} + V_{кр_3}) = \nu R(T_{ар_3} + T_{кр_3})$

$\Rightarrow$ даваение всегда одинаково. Тогда расширение каждого газа изобарическое $\Rightarrow Q = -\frac{5}{2}\nu R(T_к - T_2) =$

$= \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot 8{,}31 \cdot 40$ Дж $= \frac{3}{2} \cdot 8{,}31 \cdot 40$ Дж $= 20 \cdot 3 \cdot 8{,}31$ Дж $= 60 \cdot 8{,}31$ Дж $=$

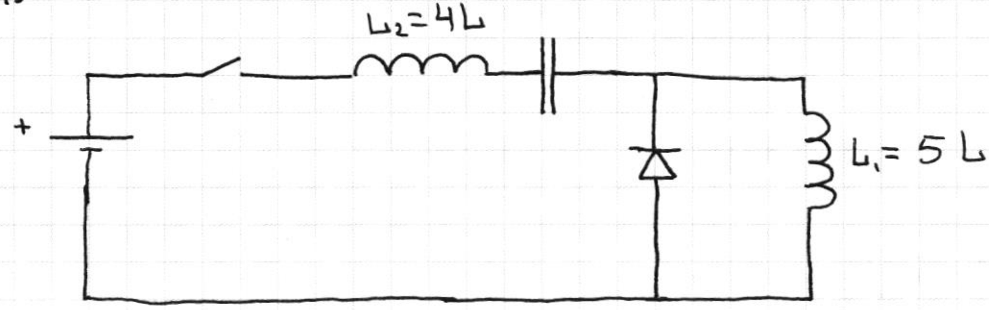
$= 6 \cdot 83{,}1$ Дж $=$ ~~498,6~~ $= 498{,}6$ Дж

$$\begin{array}{r} \times\; 83{,}1 \\ 6 \\ \hline 498{,}6 \end{array}$$

<u>Ответ:</u> 1) 4:5, 2) ~~498,6 Дж~~ 360K, 3) 498,6 Дж

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

4.



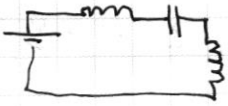
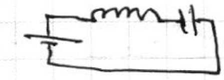
Посмотрим, как выглядит период:

1) конденсатор заряжается до ε, ток течёт через L_1 и L_2, ток течёт по часовой стрелке и достигает максимального значения

2) конденсатор заряжается до 2ε (амплитуда $= \varepsilon$, положение равновесия $= \varepsilon$), ток в катушках L_1 и L_2 течёт по часовой стрелке. Так как ток в катушке L_1 падает, то ε_{ind} направлено вниз и ~~весь ток~~ напряжение уходит через диод.

3) Конденсатор разряжается до ε, ток максимален и направлен против часовой стрелки, в связи с чем идёт через диод, а не через L_1

4) Конденсатор разряжается до 0, ток идёт против часовой стрелки, в связи с чем идёт через диод.

Таким образом период будет равен $\frac{1}{2}$ периода в схеме  и $\frac{1}{2}$ периода в схеме 

То есть $\frac{1}{2} \cdot 2\pi\sqrt{L_2 C} + \frac{1}{2} \cdot 2\pi\sqrt{(L_1 + L_2)C} = \pi\left(\sqrt{L_2 C} + \sqrt{(L_1+L_2)C}\right) =$

$= \pi\left(\sqrt{4LC} + \sqrt{9LC}\right) = 5\pi\sqrt{LC}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Максимальный ток найдём из ЗСЭ:

$\frac{LI_m^2}{2}=\frac{CU_m^2}{2} \Rightarrow LI_m^2=CU_m^2$, но это верно для колебаний

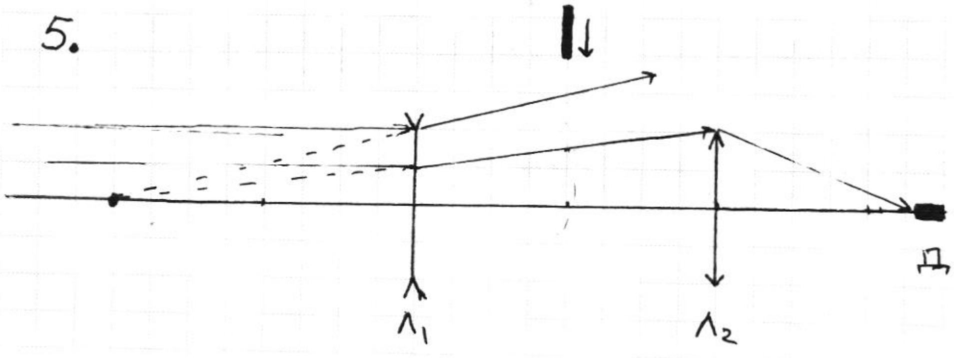
без батарейки. В колебаниях с батарейкой $U(t)$ сдвинуто на $\mathcal{E}$ вверх, а $I(t)$ неизменно. Тогда в первой схеме $I_m^1=\mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L_1+L_2}}$, а во второй $I_m^2=\mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L_2}}$. Тогда

$$I_{01}=I_m^1=\mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{9L}}=\frac{1}{3}\mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L}};\quad I_{02}=\max(I_m^1;I_m^2)=\mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L_2}}=$$

$$=\mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{4L}}=\frac{1}{2}\mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

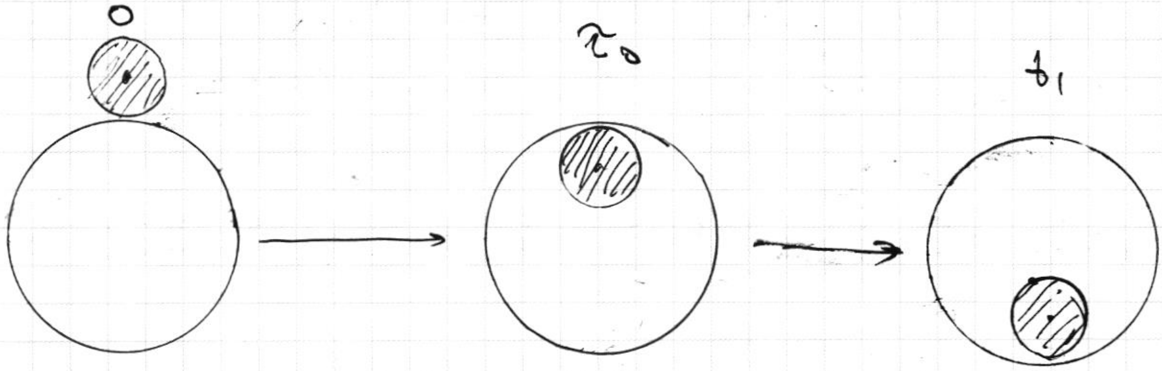
<u>Ответ</u>: 1) $5\pi\sqrt{CL}$ 2) $\frac{1}{3}\mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L}}$ 3) $\frac{1}{2}\mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L}}$

5.



Линза $Л_1$ создаст мнимое изображение на расстоянии $2F_0$ слева от неё. Оно находится на расстоянии $4F_0$ от $Л_2$. Тогда $Л_2$ сфокусирует свет на расстоянии x, где x найдём из формулы тонкой линзы $\frac{1}{x}+\frac{1}{4F_0}=\frac{1}{F_0} \Rightarrow x=\frac{4}{3}F_0$

Это и есть расстояние от $Л_2$ до фотодетектора. Теперь посмотрим, какие лучи вообще доходят до фотодетектора. Это все лучи, которые попадают на на $Л_2$. На уровне M диаметр этого пучка составляет $D_п = \frac{3}{4} D$ (из подобия). $I_1 = \frac{7}{16} I_0 \Rightarrow$ M заслоняет $\frac{9}{16}$ пучка $\Rightarrow$ её диаметр $D_M = \frac{3}{4} D_п = \frac{9}{16} D$. Она чтобы заслонить свет до I_1 должна полностью въехать в световой пучок:



То есть она должна проехать D_M. Так как она делает это за τ_0, то её скорость $V = \frac{D_M}{\tau_0} = \frac{9}{16}\frac{D}{\tau_0}$

За время t_1 мишень проходит $D_п$. Тогда время её движения $t_1 = \frac{D_п}{V} = \frac{3 \cdot 16}{4 \cdot 9}\tau_0 = \frac{4}{3}\tau_0$

<u>Ответ:</u> 1) $\frac{4}{3} F_0$ 2) $\frac{9}{16}\frac{D}{\tau_0}$ 3) $\frac{4}{3}\tau_0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. Пластина с поверхностной плотностью заряда σ создаёт поле равное $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Тогда в первом случае поле было направлено вниз, а затем по принципу суперпозиции к нему добавилось такое же, направленное под углом $\frac{\pi}{2}$ к первому. Тогда поле увеличилось в $\sqrt{2}$ раз.

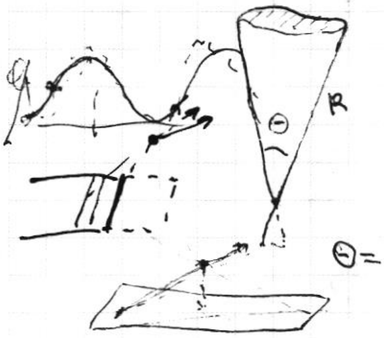
Во втором случае поле складывается из двух перпендикулярных компонент, равных $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ и $\frac{2\sigma}{7\cdot 2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{7\varepsilon_0}$. Тогда общее поле это

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{49}} = \frac{\sigma}{14\varepsilon_0}\sqrt{53}$$

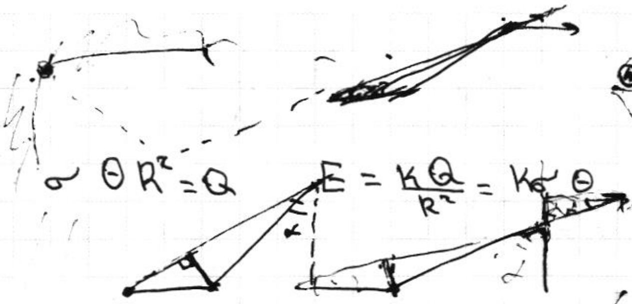
Проекция поля элемента плоскости, на ось $\perp$ ей это $k\sigma\theta$, где θ — телесный угол.

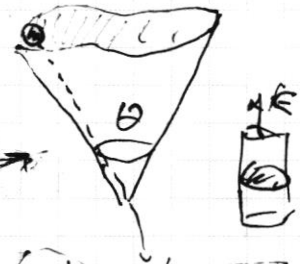
<u>Ответ:</u> 1) $\sqrt{2}$, 2) $\frac{\sigma}{14\varepsilon_0}\sqrt{53}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



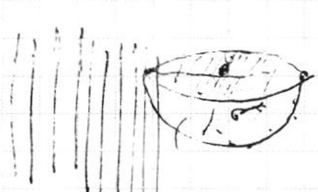
$\sigma\,\Theta R^2 = Q$ $\quad E = \frac{kQ}{R^2} = k\sigma\Theta$

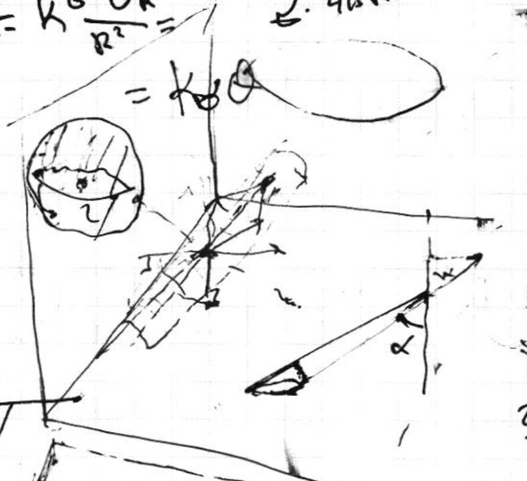




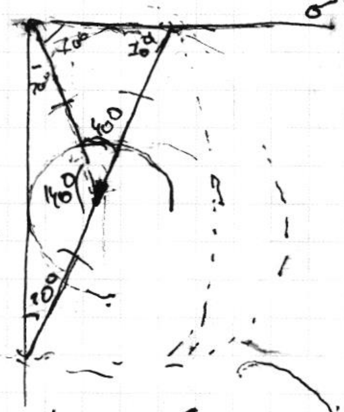
$\Theta = 2\pi$ $\quad E = k\sigma\cdot 2\pi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma\cdot 2\pi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ $\quad 2ES$

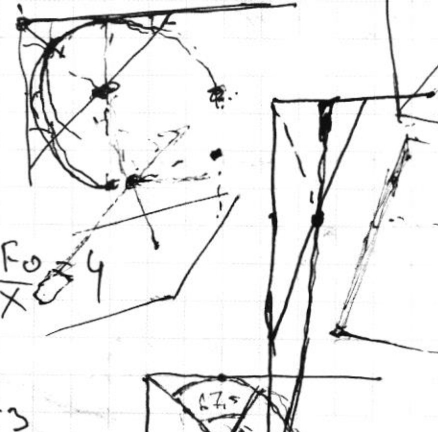
$E = k\frac{\sigma\Theta R^2}{R^2} = k\sigma\Theta$ $\quad \sigma\cdot 4\pi R^2$





$\frac{1}{4F_0} + \frac{1}{x} = \frac{1}{F_0}$





$\frac{2\sigma}{7}$

$1 + \frac{4F_0}{x} = 4$

$\sin x + \cos x =$

$\frac{4F_0}{x} = 3$

$\cos(45^\circ + 22{,}5^\circ) =$

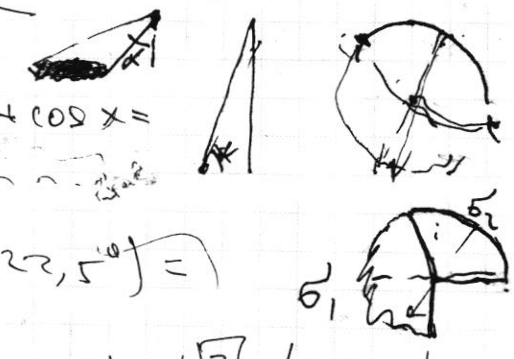
σ_2 $\quad \sigma_1$

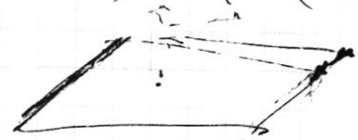
$x = \frac{4}{3}F_0$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos(22{,}5^\circ) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sin 22{,}5^\circ) =$

4π $\quad 2\pi$ $\quad \cos$ $\quad \frac{16}{3}$ км

$= \frac{S}{\cos\alpha}$



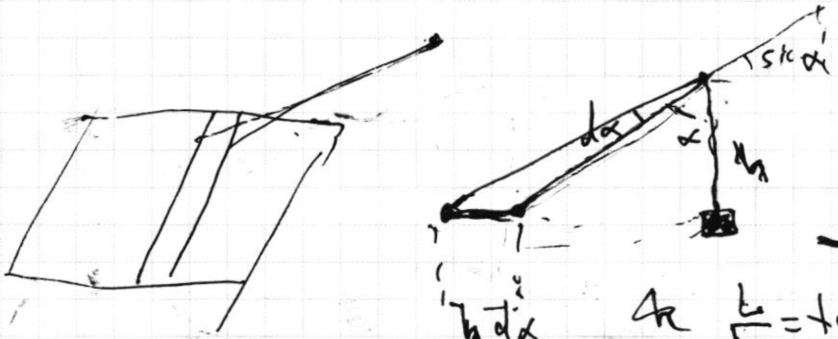


$5\,1/3$ кс

$\frac{\sigma R^2}{\cos\alpha}$ $\quad E = k\sigma\Theta.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



$tg'\alpha = \frac{\cos^2 + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{h\,d\alpha}{\cos^2\alpha}$ $\frac{L}{h} = tg\,\alpha$ $h\,tg\,\alpha$

$E \cdot 2\pi R\cancel{h} = \lambda\cancel{h}/\varepsilon_0$

$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$

$tg\,\alpha$ $[\sin^2\alpha]' = 2\sin\alpha\cos\alpha$

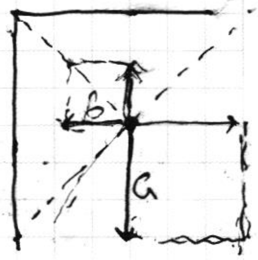
$\frac{h}{R} = \cos\alpha$

$R = \frac{h}{\cos\alpha}$

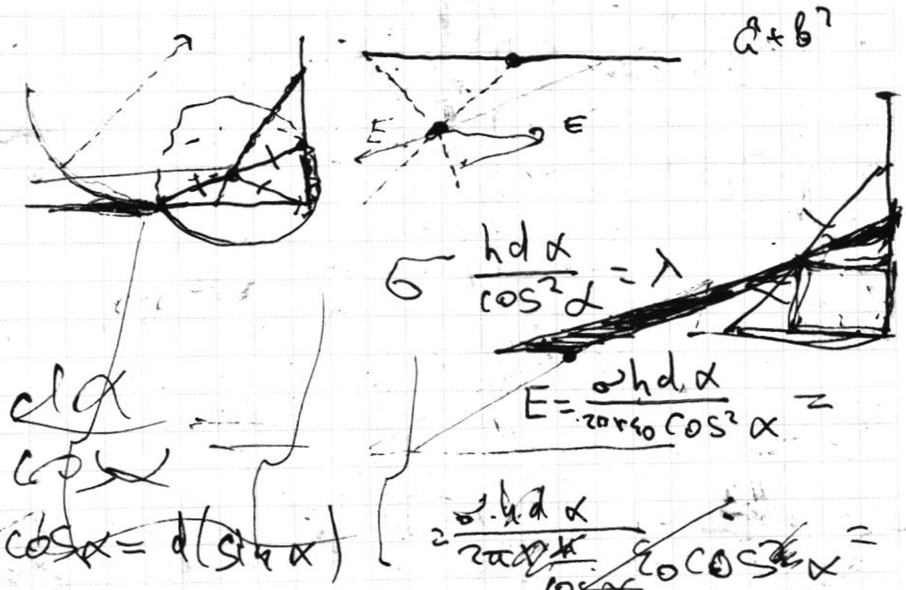
$Q = \frac{\sigma h\,d\alpha}{\cos^2\alpha}\,l \Rightarrow \lambda = \frac{\sigma h\,d\alpha}{\cos^2\alpha}$

$\frac{h\,d\alpha}{\cos^2\alpha}$

$E = \frac{\sigma h\,d\alpha}{\cos^2\alpha \cdot 2\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{h}{\cos\alpha}} = \frac{\sigma\,d\alpha}{2\pi\varepsilon_0\cos\alpha}$



$\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,d\alpha$



a^2+b^2

$\sigma\frac{h\,d\alpha}{\cos^2\alpha} = \lambda$

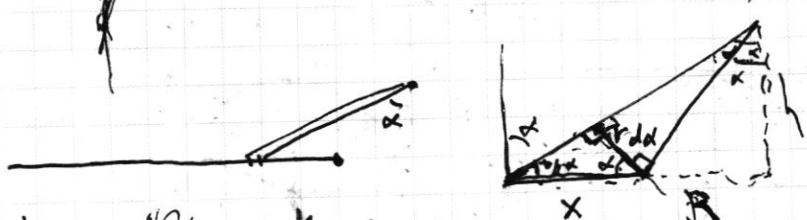
$E = \frac{\sigma h\,d\alpha}{2\pi r\varepsilon_0\cos^2\alpha} =$

$= \frac{d\alpha}{\cos\alpha}$

$d\alpha \cdot \cos\alpha = d(\sin\alpha)$

$= \frac{\sigma h\,d\alpha}{2\pi\frac{h}{\cos\alpha}\varepsilon_0\cos^2\alpha} =$

$= \frac{\sigma\,d\alpha}{2\pi\varepsilon_0\cos\alpha}$



$\frac{r\,d\alpha}{x} = \cos\alpha$

$r = \frac{h}{\cos\alpha}$ $\frac{h}{R} = h = R\cos\alpha$

$x = \frac{r\,d\alpha}{\cos\alpha} = \frac{h\,d\alpha}{\cos^2\alpha}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$Q = A + \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_3)$

$-Q = -A + \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_4)$

$T_1 + T_2 = T_3 + T_4$

$9V$

$5V \quad 4V \qquad 0{,}5V$

$p \cdot 9V = 2\nu R T_k$

$p = \frac{2\nu R T_k}{9V}$

$A = \frac{\nu R T_k}{9} = \frac{3}{5} \cdot \frac{8{,}31 \cdot 360}{9 \cdot 3} = 24 \cdot 8{,}31$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{16}{9}$

$8{,}31 \times 24$: $3224 + 1662 = 198{,}44$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot 8{,}31 \cdot 40 = 9 \cdot 4 \cdot 8{,}31 = 36 \cdot 8{,}31$

$A \quad Q_m \cos\frac{1}{\sqrt{LC}} I$

$8{,}31 \times 36$: $4986 + 2493 = 299{,}16$

$299{,}16 + 198{,}44 = 497{,}60$

$CU_m \cos\frac{1}{\sqrt{LC}}$

$\sqrt{\frac{C}{L}} U_m$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{16} =$

$16/49 \, D_M$

$D_M = \frac{16}{49}$

$\frac{9}{16} S$

$\frac{16}{49}$

$D = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{4F_0} + \frac{1}{x} = \frac{1}{F_0} \Rightarrow 1 + \frac{4F_0}{x} = 4$

$\frac{4F_0}{x} = 3$

$x = \frac{4}{3}F_0$

$\frac{9}{16} D$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

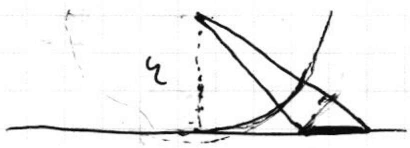
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$v_1 \sin\alpha = v_2 \sin\beta$

$v_2 = v_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = v_1 \cdot \frac{2}{3} \Big/ \frac{3}{5} = \frac{10}{9} v_1 =$

$= 20$ м/с



$\frac{k\,d\alpha}{\cos^2\alpha}$ $\frac{kq}{v^2}$ $= \frac{k\,d\alpha}{\cos^2 \frac{h^2}{\cos^2\alpha}} = \frac{k\,d\alpha}{h}$

$h = v\cos\alpha$ $v = \frac{h}{\cos\alpha}$

$0 \le v_2\cos\beta - u \le v_1\cos\alpha + u$

$u \le v_2\cos\beta$

$2u \geq v_1\cos\alpha + v_2\cos\beta$

$18 \cdot \frac{\sqrt5}{3} = 6\sqrt5$ 16

$u \le 20 \cdot \frac{4}{5} = 16$ м/с

$u \geq 8 - 3\sqrt5$

$\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt5}{3}$

$\begin{cases} P_1 V_a = \nu R T_1 \\ P_2 V_k = \nu R T_2 \end{cases}$ $\frac{V_a}{V_k} = \frac{T_a}{T_k} = \frac{400}{320} = \frac{40}{32} = 5/4$