Олимпиада «Физтех» по физике, февраль 2022

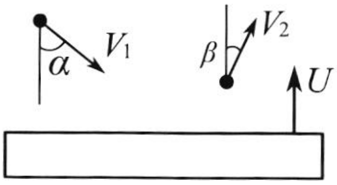
Класс 11

Вариант 11-04

Шифр

(заполняется секретарём)

1. Массивная плита движется с постоянной скоростью U вертикально вверх. К плите подлетает шарик, имеющий перед ударом скорость V_1 = 18 м/с, направленную под углом $\alpha\left(\sin\alpha=\dfrac{2}{3}\right)$ к вертикали (см. рис.). После неупругого удара о гладкую горизонтальную поверхность плиты шарик отскакивает со скоростью V_2, составляющей угол $\beta\left(\sin\beta=\dfrac{3}{5}\right)$ с вертикалью.



1) Найти скорость V_2.

2) Найти возможные значения скорости плиты U при таком неупругом ударе.

Действие силы тяжести за малое время удара не учитывать. Ответы допустимы через радикалы из целых чисел.

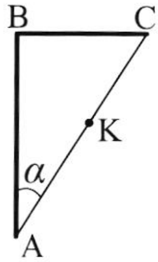
2. Цилиндрический теплоизолированный горизонтально расположенный сосуд разделен на два отсека теплопроводящим поршнем, который может перемещаться горизонтально без трения. В первом отсеке находится аргон, во втором – криптон, каждый газ в количестве $\nu=3/5$ моль. Начальная температура аргона T_1 = 320 К, а криптона T_2 = 400 К. Температуры газов начинают медленно выравниваться, а поршень начинает медленно двигаться. Оба газа одноатомные, газы считать идеальными. R = 8,31 Дж/(моль·К).

1) Найти отношение начальных объемов аргона и криптона.

2) Найти установившуюся температуру в сосуде.

3) Какое количество теплоты передал криптон аргону?

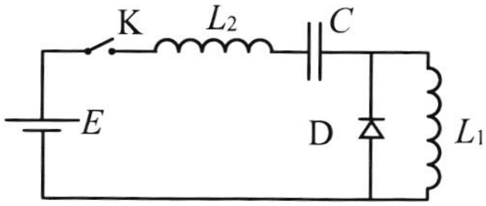
3. Две бесконечные плоские прямоугольные пластины AB и BC перпендикулярны друг к другу и образуют двугранный угол с ребром B. На рисунке показано сечение угла плоскостью, перпендикулярной ребру B.



1) Пластина BC заряжена с постоянной поверхностной плотностью заряда. Угол $\alpha=\pi/4$. Во сколько раз увеличится напряженность электрического поля в точке K на середине отрезка AC, если пластину AB тоже зарядить с такой же поверхностной плотностью заряда?

2) Пластины BC и AB заряжены положительно с поверхностной плотностью заряда $\sigma_1=\sigma, \sigma_2=2\sigma/7$, соответственно. Угол $\alpha=\pi/9$. Найти напряженность электрического поля в точке K на середине отрезка AC.

4. Электрическая цепь собрана из идеальных элементов: источника с ЭДС E, катушек с индуктивностями $L_1=5L$, $L_2=4L$, конденсатора емкостью C, диода D (см. рис.). Ключ K разомкнут, конденсатор не заряжен, тока в цепи нет. После замыкания ключа возникают колебания тока в L_2.

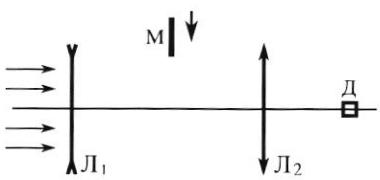


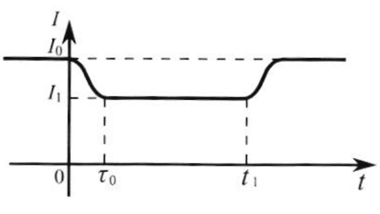
1) Найти период T этих колебаний.

2) Найти максимальный ток I_{01}, текущий через катушку L_1.

3) Найти максимальный ток I_{02}, текущий через катушку L_2.

5. Оптическая система состоит из двух соосных тонких линз Л$_1$ и Л$_2$ (см. рис.) с фокусными расстояниями $-2F_0$ и F_0, соответственно. Расстояние между линзами $2F_0$. Диаметры линз одинаковы и равны D, причем D значительно меньше F_0. На линзу Л$_1$ падает параллельно оси системы пучок света с одинаковой интенсивностью в сечении пучка. Прошедший через обе линзы свет фокусируется на фотодетекторе Д, на выходе которого сила тока пропорциональна мощности падающего на него света. Круглая непрозрачная мишень М, плоскость которой перпендикулярна оси системы, движется с постоянной скоростью перпендикулярно оси системы так, что центр мишени пересекает ось на расстоянии F_0 от Л$_1$. На рисунке показана зависимость тока I фотодетектора от времени t (секундомер включен в момент начала уменьшения тока). $I_1=7I_0/16$





.

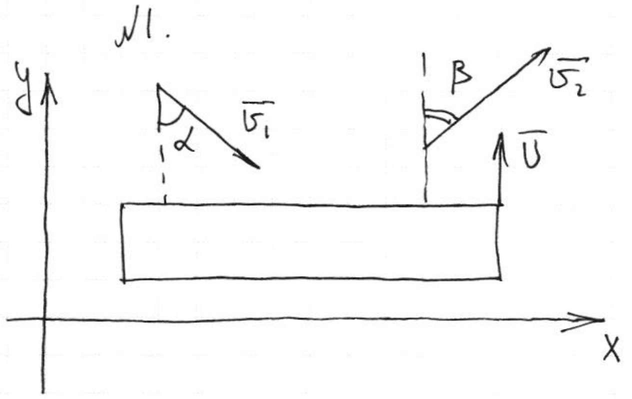
1) Найти расстояние между линзой Л$_2$ и фотодетектором.

2) Определить скорость V движения мишени. 3) Определить t_1.

Известными считать величины F_0, D, τ_0.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.



1) Введём оси координат X и Y как на рисунке. Т.к. поверхность плиты гладкая, то сил трения нет и импульс шарика в проекции на X сохраняется:

Отсюда

$v_1 \sin\alpha = v_2 \sin\beta$

$v_2 = v_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 18 \cdot \frac{2}{3} : \frac{3}{5} = 18 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = 18 \cdot \frac{10}{9} = 20 \frac{м}{с}$

2) Если бы удар был абсолютно упругим, то проекция v_2 на ось Y имела бы значение

$v_{2y}^m = \cancel{v_2 \cos\beta} = \cancel{2} v_{отн} + U$

Где $v_{отн} = v_1 \cos\alpha + U$ — скорость шарика относительно плиты (после удара она меняет направление на противоположное). Тогда

$v_{2y}^m = \cancel{v_2 \cos\beta} = \cancel{2} v_1 \cos\alpha + \cancel{3}^{2} U$

Так как удар неупругий, то реальное значение v_{2y} должно быть меньше максимального (при абсолютно упругом ударе) То есть:

$v_{2y} < v_{2y}^m$

$v_2 \cos\beta < \cancel{2} v_1 \cos\alpha + \cancel{3}^{2} U$

Отсюда

$$U \cancel{7} > \frac{v_2 \cos\beta - 2v_1 \cos\alpha}{2 \cancel{7}}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$U > \frac{20 \cdot \frac{4}{5} - 2 \cdot 18 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}}{2 \cancel{7}}$$

$$\cancel{U > \frac{16 - 12\sqrt{5}}{3}} \qquad U > \frac{16 - 6\sqrt{5}}{2}$$

$$U > (8 - 3\sqrt{5}) \frac{м}{с}$$

Ответ: $v_2 = 20 \frac{м}{с}$, $U > (8 - 3\sqrt{5}) \frac{м}{с}$.

№2.

Т. к. поршень двигается медленно, то давления обоих газов в любой момент времени равны между собой.

1) Пусть V_1 и V_2 – начальные объёмы аргона и криптона, тогда т. к. их давления равны

$$\begin{cases} PV_1 = \nu_1 R T_1 \\ PV_2 = \nu_2 R T_2 \end{cases}$$ – ур-ния Менделеева – Клапейрона

Отсюда

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\nu_1 T_1}{\nu_2 T_2} = \frac{\nu T_1}{\nu T_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{320}{400} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{5}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) В установившемся состоянии температуры газов равны. Пусть $T_{уст} = T$, тогда т.к. ~~цилиндр~~ сосуд теплоизолирован, то полная энергия всех газов сохраняется:

$$\frac{3}{2}\nu_1 RT_1 + \frac{3}{2}\nu_2 RT_2 = \frac{3}{2}\nu_1 RT + \frac{3}{2}\nu_2 RT$$

Так как $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ получим

$$\frac{3}{2}\nu RT_1 + \frac{3}{2}\nu RT_2 = \frac{3}{2}\nu RT + \frac{3}{2}\nu RT \quad \Big| \cdot \frac{2}{3}\frac{1}{\nu R}$$

$$T_1 + T_2 = T + T$$

$$2T = T_1 + T_2$$

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{720}{2} = 360\ K \quad (1)$$

3) Начальная энергия криптона:

$$U_0 = \frac{3}{2}\nu RT_2 \quad (2)$$

Конечная энергия криптона:

$$U_1 = \frac{3}{2}\nu RT \quad (3)$$

Переданная теплота:

$$Q = -\Delta U = U_0 - U_1$$

$$\begin{array}{r} \times\ 8{,}31 \\ 36 \\ \hline +\ 4986 \\ 2493\ \ \\ \hline 299{,}16 \end{array}$$

Из (1), (2) и (3)

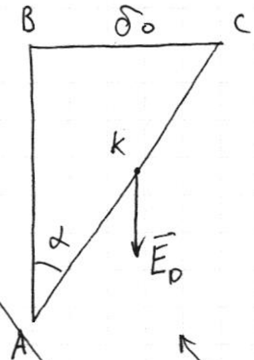
$$Q = U_0 - U_1 = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T)$$

$$Q = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot 8{,}31(400 - 360) = 36 \cdot 8{,}31 = 299{,}16\ Дж$$

Ответ: 1) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{5}$; 2) $T = 360K$; 3) $Q = 299{,}16$ Дж

№3

1)



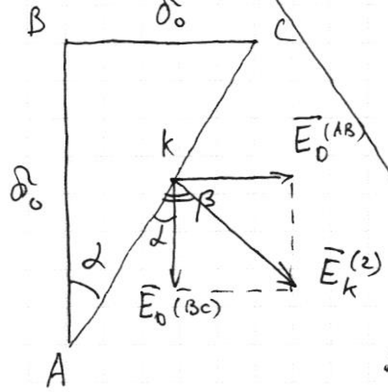
Пусть σ_0 – поверхностная плотность заряда пластины BC.

Так как пластины бесконечные, то

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} = const \quad ; \quad E_k^{(1)} = E_1$$

До зарядки пластины AB

После того как пластину AB зарядили такой же поверхностной плотностью: $\vec{E}_k^{(2)} = \vec{E}_0^{(AB)} + \vec{E}_0^{(BC)}$



$$E_k^{(2)} = \sqrt{2} E_0 = \frac{\sqrt{2}\sigma_0}{2\varepsilon_0}$$

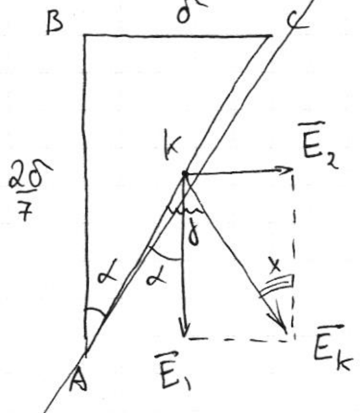
Отсюда

$$\eta = \frac{E_k^{(2)}}{E_k^{(1)}} = \sqrt{2} \quad ; \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

То есть напряжённость электрического поля в точке K увеличится в $\sqrt{2}$ раз.

2)

Пусть $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Тогда сумма напряженностей $\vec{E}_1$ от пластины BC и $\vec{E}_2$ от AC есть напряженность поля в точке K.



$$\vec{E}_k = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \qquad x = \arctg \frac{E_2}{E_1}$$

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = E \qquad x = \arctg\frac{2}{7}$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{2}{7}E$$

$$E_k^2 = E_1^2 + E_2^2$$

$$E_k = \sqrt{E^2 + \frac{4}{49}E^2} = \frac{\sqrt{53}}{7}E = \frac{\sqrt{53}\sigma}{14\varepsilon_0}$$

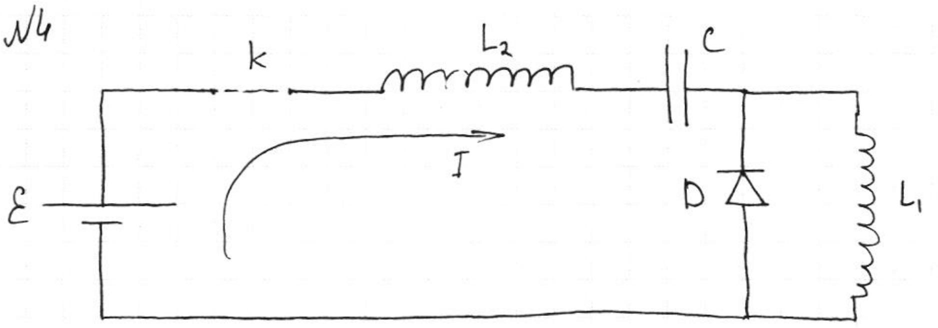
$$\gamma = \alpha + x = \frac{\pi}{9} + \arctg\frac{2}{7}.$$

Ответ: 1) $\eta = \sqrt{2}$; 2) $E_k = \frac{\sqrt{53}}{14}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ под углом $\gamma = \frac{\pi}{9} + \arctg\frac{2}{7}$ к $\overline{CA}$

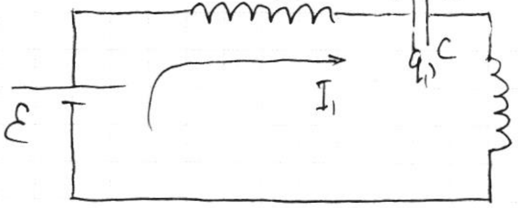
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



После замыкания ключа K ток потечёт так как показано на ~~рд~~ рисунке сверху. В этом случае диод D закрыт следовательно имеем следующий колебательный цикл:



Пусть q_1 – заряд на конденсаторе, I_1 – ток в цепи в данном цикле.

По правилам Кирхгофа получим:

$$\frac{q_1}{C} + L_2\dot{I}_1 + L_1\dot{I}_1 = \mathcal{E} \quad ; \quad \dot{q}_1 = I_1$$

$$\frac{q_1}{C} + (L_2 + L_1)\ddot{q}_1 = \mathcal{E}$$

$$\ddot{q}_1 + \frac{q_1}{C(L_2+L_1)} = \frac{\mathcal{E}}{(L_2+L_1)}$$

Получим уравнение гармонических колебаний, которое имеет решение в виде

$$q_1 = C\mathcal{E} + A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t), \text{ где } \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{C(L_1+L_2)}}$$

A, B – некоторые константы

Из начальных условий (при $t=0$ $q_1=0$, $I_1=\dot{q}_1=0$):

$$\begin{cases} A = -C\mathcal{E} \\ B = 0 \end{cases}$$

Это следует из того, что

$$q_1(0) = C\mathcal{E} + A\cos(0) + B\sin(0) = C\mathcal{E} + A = 0$$

$$\dot{q}_1 = I = -\omega_1 A\sin(\omega_1 t) + \omega_1 B\cos(\omega_1 t)$$

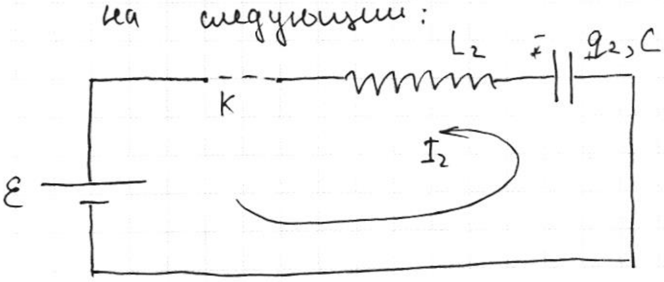
$$\dot{q}_1(0) = -\omega_1 A\sin(0) + \omega_1 B\cos(0) = \omega_1 B = 0, \quad \omega_1 \neq 0$$

Значит заряд q_1 и ток I_1 описываются формулами

$$\begin{cases} q_1 = C\mathcal{E}\,[1-\cos(\omega_1 t)] & (1) \\ I_1 = \omega_1 C\mathcal{E}\sin(\omega_1 t) & (2) \\ \omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{(L_1+L_2)C}} & (3) \end{cases}$$

(квадратные скобки не означают целую часть это просто скобки)

Как только ток I_1 начнет менять свое направление на противоположное (~~появится знак "минус"~~ достигнет нуля в формуле (2)) диод D откроется и колебательный контур сменится на следующий:



Смена циклов произойдет при $t = \tau = \frac{\pi}{\omega_1}$.

Отсюда начальный заряд в данном контуре:

$$q_2^{(0)} = -2C\mathcal{E}$$

По правилам Кирхгофа:

$$\frac{q_2}{C} + L_2\ddot{q}_2 = -\mathcal{E}$$

$$\ddot{q}_2 + \frac{q_2}{L_2 C} = -\frac{\mathcal{E}}{L_2}$$

Аналогично

$$q_2 = -C\mathcal{E} + A'\cos(\omega_2 t) + B'\sin(\omega_2 t), \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}$$

При $t=0$ $q_2 = q_2^{(0)} = -2C\mathcal{E}$ $I_2 = 0 = \dot{q}_2$, значит

$$\begin{cases} A' = -C\mathcal{E} \\ B' = 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Получим

$$\begin{cases} q_2 = -C\mathcal{E}\left(1+\cos(\omega_2 t)\right) & (5) \\ I_2 = \omega_2 C\mathcal{E}\sin(\omega_2 t) & (6) \\ \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}} & (7) \end{cases}$$

1) Далее данны колебательные будут поочерёдно сменять друг друга причём каждый из них будет действовать ровно половину своего периода (промежуток времени между нулями сил токов в цепи, а следовательно и закрытиями/открытиями диода). То есть полный цикл ~~колеб.~~ колебаний

$$T = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = \frac{\pi}{\omega_1} + \frac{\pi}{\omega_2} \overset{\text{из (7) и (3)}}{=\!=\!=} \pi\sqrt{(L_1+L_2)C} + \pi\sqrt{L_2C} =$$

$$= \pi\sqrt{9LC} + \pi\sqrt{4LC} = 3\pi\sqrt{LC} + 2\pi\sqrt{LC} = 5\pi\sqrt{LC}$$

$$T = 5\pi\sqrt{LC}.$$

2) Ток через катушку L_1 течёт только в первом цикле колебаний, следовательно

$$I_{01} = I_1^{max} \overset{\text{из (2)}}{=\!=} \omega_1 C\mathcal{E} = \frac{C\mathcal{E}}{\sqrt{(L_1+L_2)C}} = \frac{\mathcal{E}}{3}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$\cancel{I_{01} = \frac{\mathcal{E}}{3}}$ $$I_{01} = \frac{\mathcal{E}}{3}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

3) В этом случае нужно сравнить максимальные токи в первом и втором циклах

$$I_{max}^{(1)} \overset{\text{из (2)}}{=\!=} \omega_1 C\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}}{3}\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad I_{max}^{(2)} \overset{\text{из (6)}}{=\!=} \omega_2 C\mathcal{E} = \mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L_2}} = \frac{\mathcal{E}}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$I_{max}^{(1)} < I_{max}^{(2)}$

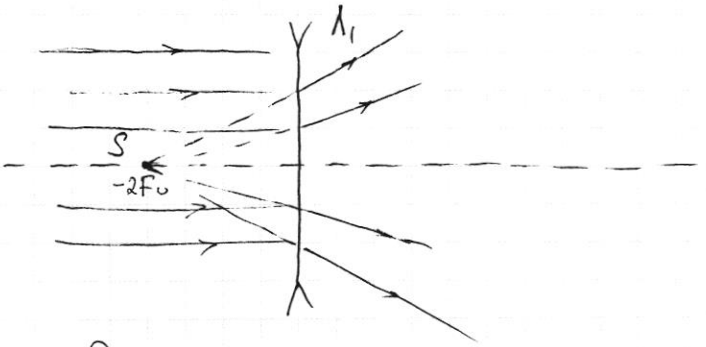
Следовательно

$I_{02} = I_{max}^{(2)} = \frac{\mathcal{E}}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$

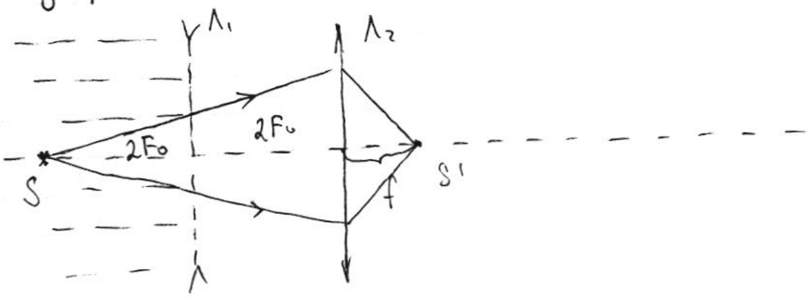
Ответ: 1) $T = 5\pi\sqrt{LC}$; 2) $I_{01} = \frac{\mathcal{E}}{3}\sqrt{\frac{C}{L}}$; 3) $I_{02} = \frac{\mathcal{E}}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$

№5.

Пройдя через рассеивающую линзу Л1 пучёк света преломится так, как если бы испускался точечным источником S находящимся в фокусе линзы Л1



Далее можно считать, что линзы Л1 нет, а вместо параллельного пучка точечный источник света S находящийся на расстоянии $2F_0$ от плоскости линзы Л1 и следовательно на расстоянии $4F_0$ от линзы Л2. Так как прошедший через обе линзы свет фокусируется на фотодетекторе Д, то он находится в изображении S' источника S от линзы Л2.



1) Расстояние от $Л_2$ до S — $4F_0$

По формуле линзы для $Л_2$

$$\frac{1}{4F_0} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F_0}$$

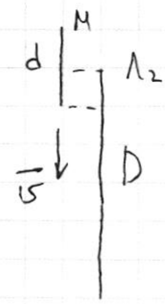
Отсюда

$$f = \frac{4}{3}F_0$$

2) ~~Интенсивность света~~, а значит

Мощность генерируемая фотодетектором пропорциональна площади на поверхности линзы $Л_2$ на которую падает свет. Время τ_0 — это время за которое мишень M полностью попадёт в область линзы $Л_2$.

Пусть d — диаметр мишени, тогда



$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{\pi(D^2-d^2)}{\pi D^2}$$

$$\frac{d^2}{D^2} = 1 - \frac{I_1}{I_0} = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

$$\frac{d}{D} = \frac{3}{4}$$

~~$D =$~~ $d = \frac{3}{4}D$.

Время τ_0:

$$\tau_0 = \frac{d}{v} = \frac{3D}{4v}$$

Отсюда

$$v = \frac{3D}{4\tau_0}$$

3) ~~Чез~~ Через время t_1 мишень начнёт выходить из области линзы, значит

$v t_1' = D - d$; $t_1' = t_1 - \tau_0$

$$t_1' = \frac{D-d}{v} = \frac{D}{4v} = \frac{\tau_0}{3}$$

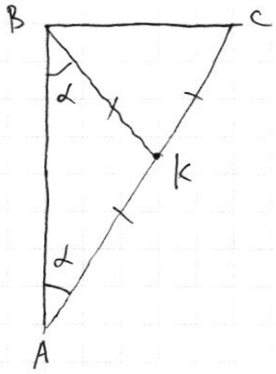
$$t_1 = t_1' + \tau_0 = \frac{4}{3}\tau_0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: 1) $f = \frac{4}{3}F_0$; 2) $v = \frac{3D}{4\tau_0}$; 3) $t_1 = \frac{4}{3}\tau_0$

№ 3

Из геометрии



BK – медиана проведённая к гипотенузе

$BK = \frac{1}{2}AC = \underset{AK}{\cancel{KB}} = KC.$

Следовательно $\triangle AKB$ – равнобедренный с основанием AB и $BK = AK$, $\angle KAB = \angle KBA = \alpha$

Далее смотри решение задачи на страницах 11–12

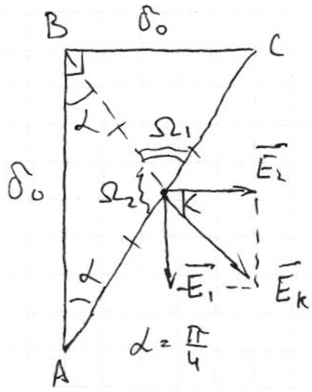
...

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

1) Напряжённость такой пластины (бесконечной в одну сторону) находится по формуле

$E = \frac{\Omega}{2\pi} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (1), где Ω угол под которым видно эту пластину.



В первом случае:

Пусть σ_0 заряд пластины BC.

До зарядки пластины AB

$\vec{E}_k^{(1)} = \vec{E_1}$

$E_k^{(1)} = E_1 = \frac{\Omega_1}{2\pi} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{2\alpha}{2\pi} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ $\cancel{(2)}$

$E_k^{(1)} = \frac{\sigma_0}{4\varepsilon_0}$ (2)

После зарядки пластины AB ~~заряд~~ зарядом σ_0:

$\vec{E}_k^{(2)} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$

$E_1 = \frac{\sigma_0}{4\varepsilon_0}$

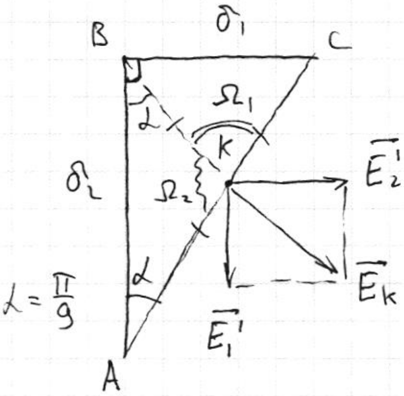
$E_2 = \frac{\Omega_2}{2\pi} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{\pi - 2\alpha}{2\pi} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{4\varepsilon_0}$

$E_k^{(2)} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \frac{\sqrt{2}\sigma_0}{4\varepsilon_0}$ (3)

$\eta = \frac{E_k^{(2)}}{E_k^{(1)}} \overset{\text{из (2) и (3)}}{=\!=} \sqrt{2}$

увеличится в $\sqrt{2}$ раз

2) В этом случае аналогично:



$\vec{E_k} = \vec{E_1'} + \vec{E_2'}$

E_1' – напряжённость от BC

E_2' – напряжённость от AB

$$E_k = \sqrt{E_1'^2 + E_2'^2} = \sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{2\pi}\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{2\pi}\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\right)^2}$$

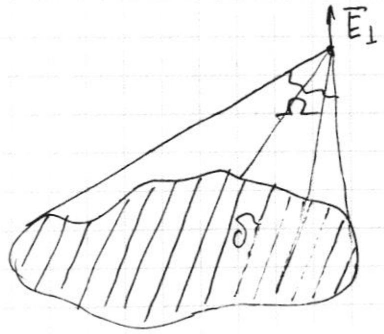
$$E_1' = \frac{\Omega_1}{2\pi}\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{2\alpha}{2\pi}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\alpha\sigma}{\pi\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{9\varepsilon_0}$$

$$E_2' = \frac{\Omega_2}{2\pi}\cdot\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{\pi - 2\alpha}{2\pi}\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{7}{18}\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{9\varepsilon_0}$$

$$E_k = \sqrt{E_1'^2 + E_2'^2} = \frac{\sqrt{2}\sigma}{9\varepsilon_0}$$

~~Ответ~~ Пояснение касательно формулы (1):

Всем известная формула из Савченко, что для любой плоской поверхности

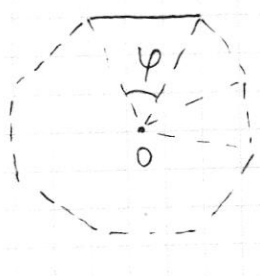


$E_\perp = k\sigma\Omega$, где $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$,

σ – поверхностная плотность заряда на этой поверхности, Ω – телесный угол ~~расст~~ под которым видна пластина из рассматриваемой точки.

В нашем случае

Если пластина видна под углом φ, то мы можем достроить многоугольник из таких пластин.



Так как суммарный угол раствора такого многоугольника 2π, а телесный угол под которым он рассматривается есть угол всего пространства 4π (замкнутая фигура), то телесный угол такой пластины равен $\Omega = \frac{\varphi}{2\pi}\cdot 4\pi = 2\varphi$. Отсюда $E = \frac{\sigma\Omega}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\varphi\sigma}{2\pi\varepsilon_0}$.

Ответ: 1) $\eta = \sqrt{2}$; 2) $E_k = \frac{\sqrt{2}\sigma}{9\varepsilon_0}$.