

# Олимпиада «Физтех» по физике, февраль 2022

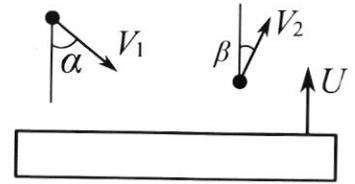
Класс 11

Вариант 11-03

Шифр

(заполняется секретарём)

1. Массивная плита движется с постоянной скоростью  $U$  вертикально вверх. К плите подлетает шарик, имеющий перед ударом скорость  $V_1 = 12$  м/с, направленную под углом  $\alpha$  ( $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ) к вертикали (см. рис.). После неупругого удара о гладкую горизонтальную поверхность плиты шарик отскакивает со скоростью  $V_2$ , составляющей угол  $\beta$  ( $\sin \beta = \frac{1}{3}$ ) с вертикалью.

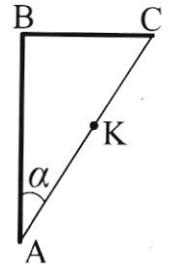


- 1) Найти скорость  $V_2$ .
  - 2) Найти возможные значения скорости плиты  $U$  при таком неупругом ударе.
- Действие силы тяжести за малое время удара не учитывать. Ответы допустимы через радикалы из целых чисел.

2. Цилиндрический теплоизолированный горизонтально расположенный сосуд разделен на два отсека теплопроводящим поршнем, который может перемещаться горизонтально без трения. В первом отсеке находится водород, во втором – азот, каждый газ в количестве  $\nu = 6/7$  моль. Начальная температура водорода  $T_1 = 350$  К, а азота  $T_2 = 550$  К. Температуры газов начинают медленно выравниваться, а поршень начинает медленно двигаться. Газы считать идеальными с молярной теплоемкостью при постоянном объеме  $C_V = 5R/2$ .  $R = 8,31$  Дж/(моль·К).

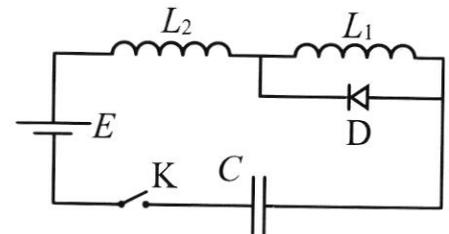
- 1) Найти отношение начальных объемов водорода и азота.
- 2) Найти установившуюся температуру в сосуде.
- 3) Какое количество теплоты передал азот водороду?

3. Две бесконечные плоские прямоугольные пластины АВ и ВС перпендикулярны друг к другу и образуют двугранный угол с ребром В. На рисунке показано сечение угла плоскостью, перпендикулярной ребру В.



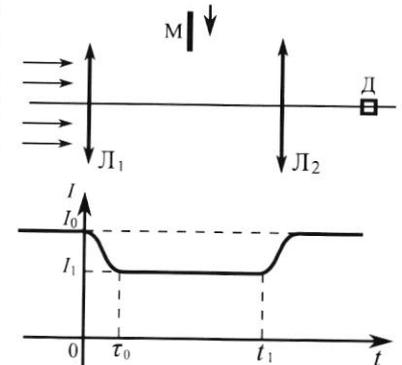
- 1) Пластина ВС заряжена с постоянной поверхностной плотностью заряда. Угол  $\alpha = \pi/4$ . Во сколько раз увеличится напряженность электрического поля в точке К на середине отрезка АС, если пластину АВ тоже зарядить с такой же поверхностной плотностью заряда?
- 2) Пластины ВС и АВ заряжены положительно с поверхностной плотностью заряда  $\sigma_1 = 3\sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma$ , соответственно. Угол  $\alpha = \pi/5$ . Найти напряженность электрического поля в точке К на середине отрезка АС.

4. Электрическая цепь собрана из идеальных элементов: источника с ЭДС  $E$ , катушек с индуктивностями  $L_1 = 4L$ ,  $L_2 = 3L$ , конденсатора емкостью  $C$ , диода D (см. рис.). Ключ  $K$  разомкнут, конденсатор не заряжен, тока в цепи нет. После замыкания ключа возникают колебания тока в  $L_1$ .



- 1) Найти период  $T$  этих колебаний.
- 2) Найти максимальный ток  $I_{M1}$ , текущий через катушку  $L_1$ .
- 3) Найти максимальный ток  $I_{M2}$ , текущий через катушку  $L_2$ .

5. Оптическая система состоит из двух соосных тонких линз  $L_1$  и  $L_2$  (см. рис.) с фокусными расстояниями  $3F_0$  и  $F_0$ , соответственно. Расстояние между линзами  $2F_0$ . Диаметры линз одинаковы и равны  $D$ , причем  $D$  значительно меньше  $F_0$ . На линзу  $L_1$  падает параллельно оси системы пучок света с одинаковой интенсивностью в сечении пучка. Прошедший через обе линзы свет фокусируется на фотодетекторе Д, на выходе которого сила тока пропорциональна мощности падающего на него света. Круглая непрозрачная мишень М, плоскость которой перпендикулярна оси системы, движется с постоянной скоростью перпендикулярно оси системы так, что центр мишени пересекает ось на расстоянии  $F_0$  от  $L_1$ . На рисунке показана зависимость тока  $I$  фотодетектора от времени  $t$  (секундомер включен в момент начала уменьшения тока).  $I_1 = 5I_0/9$ .



- 1) Найти расстояние между линзой  $L_2$  и фотодетектором.
- 2) Определить скорость  $V$  движения мишени. 3) Определить  $t_1$ .

Известными считать величины  $F_0$ ,  $D$ ,  $\tau_0$ .

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N-1.

1) Найдём горизонтальную составляющую вектора скорости шарика - она не меняется, т.к. планка гладкая:

$$V_T = V_1 \sin \alpha = V_2 \sin \beta$$

$$V_2 = V_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 18 \text{ м/с}$$

2) Найдём вертикальные составляющие в СО планки:

до удара это  $\sqrt{V_1^2 - V_T^2} + U$ , а после  $\sqrt{V_2^2 - V_T^2} - U$ ; при этом

$$\sqrt{V_1^2 - V_T^2} + U > \sqrt{V_2^2 - V_T^2} - U$$

опользуясь выражением для  $V_T$  находим:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{V_1^2 - V_T^2} + \sqrt{V_2^2 - V_T^2}}{2} < U \\ \sqrt{V_2^2 - V_T^2} > U \end{cases}$$

$$6\sqrt{8} \text{ м/с} > U > \frac{6\sqrt{8} - 6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{8} - 3\sqrt{3}$$

Ответ: 1) 18 м/с 2)  $(3\sqrt{8} - 3\sqrt{3})$  м/с,  $6\sqrt{8}$  м/с

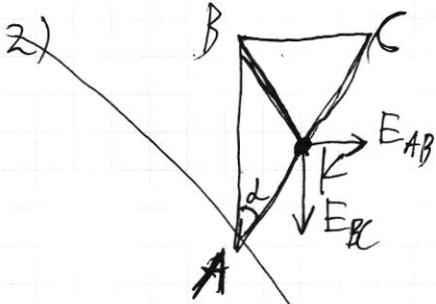
N-3

П.к. пластинки бесконечные, напряжённость в точке К - горизонтальна (лежит в м-ти рисунка).

1) При симметрии отн. сер. пер-а к ВС напряжённость в каждой т. не изменится, т.к. пластинка равномерно заряжена, К лежит на ней, значит напряжённость в К перпендикулярна ВС;  $\cos \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow BC = AB$  и СВ поворотом надо совмещается с ВА; тогда по т. Пупавина



напряжённость увеличится в  $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  раз

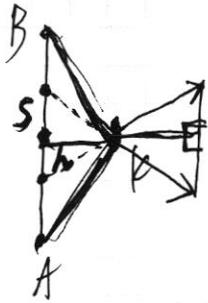


Рисунки  $E_{AB}$  - напр., создаваемое пластинкой  $AB$ ;  $E_{AB} \perp AB$

Луги выдирать узкие полоски пластинки

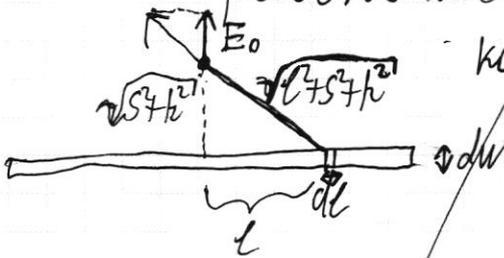
$AB$ , перпендикулярные  $h$ -м рисунка; высота  $dW$  - ширина,

$s$  - расстояние от центра  $AB$  до полоски; тогда найдём проекцию напряжённости, даваемой одной полоской на направление  $\perp AB$ ;



( $h$  - расстояние от  $K$  до середины  $AB$ )  $\sqrt{s^2+h^2}$  тогда расстояние от  $K$  до полоски. На полоске выберем

короткий участок длины  $dl$  ~~и~~ на расстоянии  $l$  до пересечения полоски с  $h$ -тью  $AB$ ; напряжённость



созданная им  $dl$ -ым на направление результир. вектора

$$E_{св} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma \cdot dl \cdot dW}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{s^2+h^2}^2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{s^2+h^2}}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{s^2+h^2}^3} \sigma \cdot dl \cdot dW; \text{интегрируем по}$$

$$dl \text{ по длине } 2 \cdot \frac{\sqrt{s^2+h^2}}{4\pi\epsilon_0} \sigma dW \int_0^\infty \frac{dl}{\sqrt{s^2+h^2}^3} = \frac{\sqrt{s^2+h^2} \sigma dW}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dl}{\sqrt{l^2 + s^2+h^2}^3}$$

см. стр. 6 и далее

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№-4.

Рассмотрим часть периода, когда ток ~~идёт~~ <sup>течёт</sup> ~~идёт~~ <sup>течёт</sup> через  $L_1$ :  $\dot{z} L_1 \dot{I} = -U - E = -\frac{Q}{C} - E$ ;  $\ddot{Q} + \frac{Q}{3CL} = -\frac{E}{L}$ ;

$(Q + CE) + \frac{Q + CE}{3CL} = 0$ , т.е.  $Q + CE$  имеет период  $\frac{1}{2\pi\sqrt{3CL}}$ ;

однако ток течёт в противоположном направлении ~~идёт~~ <sup>течёт</sup> ~~идёт~~ <sup>течёт</sup> половине периода, т.е.  $\frac{1}{4\pi\sqrt{3CL}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ; аналогично, для

сумма, когда ток течёт через  $L_1$ , т.е. суммарный период  $\frac{1}{4\pi\sqrt{3CL}} + \frac{1}{4\pi\sqrt{3CL}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{3CL}}$  ( $L_2 = 3L$  замещается на  $L + L_2 = (3+4)L$ )

и период колебаний 1) Ответ:  $\frac{1}{4\pi\sqrt{3CL}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

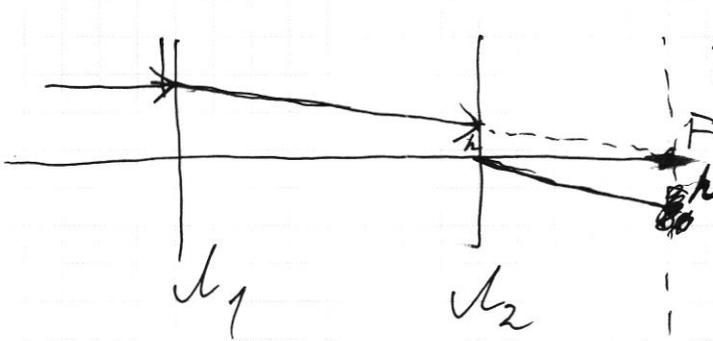
Найдём энергию системы, когда ток ~~идёт~~ <sup>течёт</sup> ~~идёт~~ <sup>течёт</sup> — это  $\frac{CE^2}{2}$ ; когда ток течёт через  $L_1$  и максимален это

$$\frac{L I_{M1}^2}{2} \Rightarrow \frac{4}{2} L I_{M1}^2 = \frac{CE^2}{2} \Rightarrow I_{M1} = \sqrt{\frac{CE^2}{4L}}$$

2) Ответ:  $I_{M1} = \sqrt{\frac{CE^2}{4L}} = \sqrt{\frac{CE^2}{L+L_2}}$

3) аналогично  $I_{M2} = \sqrt{\frac{CE^2}{L_2}}$ , поскольку когда ток

течёт в обратную сторону, то пройдёт по диагонали не по катушке.



1) Заметим, что фокусы линз совпадают; пусть какой-то луч из пучка пройдет через  $L_1$ , тогда его продолжение пройдет через совпадающий фокус  $F$ ; проведем группу, параллельную ему через опт. центр  $L_2$ ;

эти два луча продолжение выеописанного, плоскость  $L_2$  и фронтальная п-ть в сечении п-ти рисунка образуют параллелограмм; одна его диагональ - реальный ход луча, другая - отрезок от общего фокуса до опт. ц.  $L_2$ ; средними диагоналями параллелограмма совпадают, значит каждый луч из пучка проходит через точку на расстоянии  $\frac{F_0}{2}$  от  $L_2$  на  $500$ , там и помещаем детектор

2) Пусть  $S$ -ширина мишени; тогда лучи из пучка перекрываемые мишенью без линзы  $L_2$  проходят бы через  $F$ ; тогда все точки падений таких лучей вычисляются как метки точек мишени с центром  $F$  и коэфф.  $\frac{3F_0}{3F_0 - F_0} = \frac{3}{2}$ , т.е. ~~тоже~~ мощность (пропорциональная

наверности линзы без области  $N' = H_F^{3/2}(M)$ ;

$$I_0 = k \cdot D, I_1 = k(D - \frac{3}{2}S) \Rightarrow 5D = 9(D - \frac{3}{2}S) \Rightarrow 27S = 8D$$

$$S = \frac{8}{27}D \text{ } \text{Этот станет равен } I_1 \text{ как только верхний}$$

край мишени пересечет какой-то луч, т.е.  $v_0 \cdot V = \frac{8}{27}D \Rightarrow V = \frac{8D}{27v_0}$  3) За время  $t_1$  ниж. край мишени пересечет все лучи из пучка, ширина пучка в п-ти мишени равна  $\frac{2}{3}D$ ,

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

м.е.  $\frac{2}{3} \frac{D}{V} = t_1 = \frac{9}{4} \tau_0$

ответ: 1)  $\frac{F_0}{2}$  2)  $\frac{8}{27} D$  3)  $\frac{9}{4} \tau_0$

1-2.

1) Изначально поршень движется медленно, значит в каждый момент в сосуде механич. равновесие  $z$  - давление на поршень одинаково.  $pV_1 = \nu RT_1, pV_2 = \nu RT_2$ ,

откуда  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{350}{550} = \frac{7}{11}$

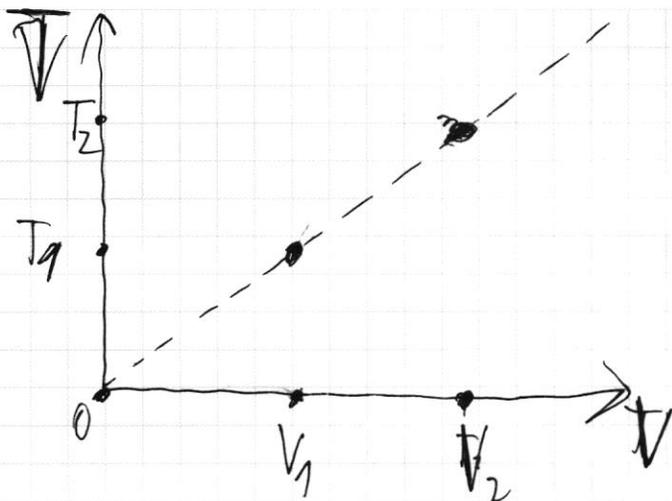
2) Сосуд теплоизолирован; это значит, что внутренняя энергия газов может перейти сюда, либо в работу над поршнем; но он движется медленно, поэтому внутренняя энергия газов (суммарно) не меняется; <sup>(расаждана, вается, сосуда, выем)</sup>

~~Q~~ -  $Q = A + \Delta U$ . в м.ч. при изохорном процессе,

м.е.  $\frac{5}{2} \nu R \Delta T = 0 + \Delta U \Rightarrow U = \frac{5}{2} \nu R T$  для каждого газа; установившаяся температура  $T_3$  такова, что  $\frac{5}{2} \nu R T_3 + \frac{5}{2} \nu R T_3 = \frac{5}{2} \nu R T_1 + \frac{5}{2} \nu R T_2 \Rightarrow T_3 = \frac{T_1 + T_2}{2} = 450 \text{ K}$

3) ~~Условный~~ Условный объём азота равен половине объёма сосуда ( $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$  - для всех текущих значений), но есть <sup>м.ч.  $T_1, T_2$  - текущие температуры</sup>  $V_1 + V_2 = V_1 + V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{11}{8}$

Построить  $V, T$  - диаграмму



Заметим, что  $V_1' + V_2' = \text{const}$ ,  
 $T_1' + T_2' = \text{const} \cdot (m \cdot R)$ .  
 но  $3C \Rightarrow \frac{5}{2} \nu R T_1' + \frac{5}{2} \nu R T_2' =$   
 $= \frac{5}{2} \nu R T_1 + \frac{5}{2} \nu R T_2$ ;  
 Значит, для любого  
 момента времени

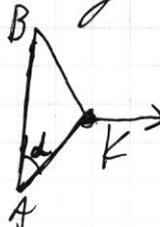
состояние двух газов симметричны относительно  
 точки  $(\frac{V_1+V_2}{2}; \frac{T_1+T_2}{2})$ ;  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$ , так что  $(0;0)$ ,  $(V_1; T_1)$  и  
 $(V_2; T_2)$  лежат на 1 прямой, которая является  
 изобарой. ~~то~~  $(\frac{V_1+V_2}{2}; \frac{T_1+T_2}{2})$  так же на ней, такими  
 образом, если  $(V_1', T_1')$  и  $(V_2', T_2')$  не лежат на  
 ней, то одна точка в верхней полупл-ти, другая  
 в нижней, тогда давления на поршень не будут равны,  
 противоречие; такими образом мы показали, что  
 процесс изобарный; кол-во теплоты  $Q = \Delta U + A$   
 $C_p = C_v + R$ , поскольку ~~мы~~  $A = p \Delta V = \nu R \Delta T$  при  
 постоянном  $p$ ;  $C_p = \frac{7}{2} R$ ;  $Q = \nu C_p \Delta T = \frac{6}{7} \cdot \frac{3}{2} \cdot 100 \cdot 8,31 \text{ Дж} =$

$$= 2493 \text{ Дж}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{7}; 450 \text{ К}; 2493 \text{ Дж}$$

$N=3$  (процесс)

2) Пусть  $\vec{E}_{AB}$  - напряж., созд. пластинкой  $AB$   
 Тогда  $\vec{E}_{AB}$  лежит в пл-ти пластинки и  
 перпендикулярно  $AB$ , т.к. конструкторские  
 инварианты отн. симметрии отн.  $AB$   
 или пл-ти пластинки



$$2. \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{h \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{5}} \frac{dw}{\sqrt{w^2+h^2}} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{5}} \frac{d\frac{w}{h}}{\sqrt{\left(\frac{w}{h}\right)^2+1}}; \text{ иными } \frac{w}{h} = \operatorname{tg} \varphi;$$

тогда  $d(\operatorname{tg} \varphi) = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$ ; на синуса равна

$$\int_0^{\frac{\pi}{5}} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \cdot \sqrt{1/\cos^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{5}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{1-\sin^2 \varphi} = \frac{1}{2} \left( \int_0^{\frac{\pi}{5}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{1-\sin \varphi} + \int_0^{\frac{\pi}{5}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{1+\sin \varphi} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \int_0^{\operatorname{sh} \frac{\pi}{10}} \frac{dx}{1-x} + \int_0^{\operatorname{sh} \frac{\pi}{10}} \frac{dx}{1+x} \right) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{10} + 1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{10} - 1} \right|;$$

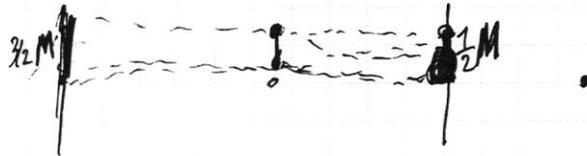
тогда ответ  $\vec{E}_{AB} = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{10} + 1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{10} - 1} \right|$

$\vec{E}_{BC} = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{5} + 1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{5} - 1} \right|$  аналогично, т.к.

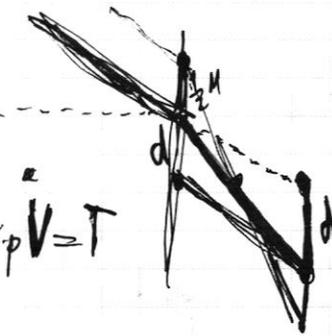
углы равны  $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}$ ;  $\vec{E}_{BC} \perp BC$ , так что по м.

Результат  $E = \sqrt{E_{AB}^2 + E_{BC}^2} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \sqrt{\ln^2 \left| \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{5} + 1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{5} - 1} \right| + \ln^2 \left| \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{10} + 1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{10} - 1} \right|}$   
 Ответ:  $\sqrt{2}$





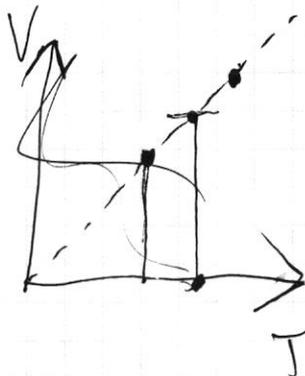
$3F_0$



$pV = T$

$\frac{F_0}{2}$

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}$$



$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}^{3/2}$$

$$dw = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx \cdot \frac{h}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{\sqrt{1+d^2}}{d^3} = \left( \frac{\sqrt{1+d^2}}{d} \right)^3 = \sqrt{\frac{1+d^2}{d^2}}^3$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

*Handwritten student work including diagrams, equations, and calculations.*

**Top Left:** Vector diagrams showing forces and directions.  $p_1 = p_2$  const,  $\nu RT = pV$ ,  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\nu T_1}{\nu T_2}$ .

**Top Middle:** Diagram of a cylinder with  $H_2$  and  $N$  layers.  $C_V = \frac{5}{2} R$ . Graphs showing pressure vs. volume and other variables.

**Top Right:**  $3LI = \frac{Q}{C}$ ,  $3CLQ = Q$ .

**Middle Left:** Geometric diagrams of triangles with angles  $30^\circ$  and  $60^\circ$ .  $CU = Q$ ,  $L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E}$ .

**Middle Right:**  $\ddot{Q} + \frac{Q}{3LC} = \dots$ ,  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$ ,  $\frac{5}{2} \nu RT + \nu R_2 T = \Delta$ .

**Bottom Left:** Circuit diagram with a battery, capacitor  $C$ , and inductor  $L$ .  $V_1 + V_2 = \text{const}$ ,  $\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} = \text{const}$ .

**Bottom Middle:**  $\int \frac{k dq}{r^2}$ ,  $\int \frac{k q d\ell}{d^2 + c^2} = kq \int \frac{d\ell}{1 + \frac{c^2}{d^2}} = kq \frac{d}{c^2}$ .

**Bottom Right:**  $\frac{5}{2} \nu R(T_1 + T_2) - A_1 - A_2 = \frac{5}{2} \nu RT$ ,  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ .