

Олимпиада «Физтех» по физике 2022

Класс 9

Вариант 09-02

Шифр

(заполняется секретарём)

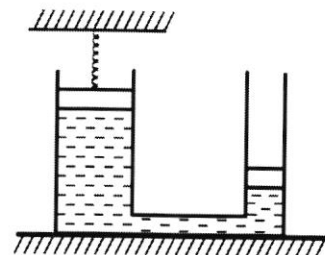
1. Школьник бросает камень вертикально вверх с начальной скоростью $V_0 = 10$ м/с.

1) Через какое время t после старта скорость камня будет равна по величине $V_0/2$?

2) На какой высоте h , отсчитанной от точки старта скорость камня будет равна по величине $V_0/2$?

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Сопротивление воздуха не учитывать.

2. На горизонтальной поверхности расположены два цилиндрических сообщающихся сосуда (см. рис.), в которых налита жидкость плотности ρ . На свободных поверхностях жидкости находятся лёгкие поршни. Зазоров между стенками сосудов и поршнями нет. Левый поршень соединён пружиной жёсткости k с верхней опорой. Деформация пружины равна x . Площадь сечения левого поршня S , правого $S/3$. Трение поршней о стенки сосудов пренебрежимо мало. Ускорение свободного падения g .



1) Найдите разность h уровней жидкости в сосудах.

2) Найдите массу m груза, который следует положить на правый поршень, чтобы пружина стала недеформированной.

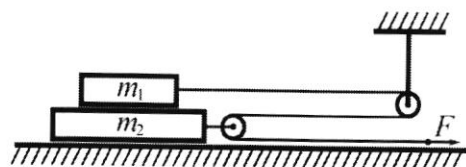
3. Спутник обращается по круговой орбите вокруг планеты. Высота орбиты $h = R$, здесь R – радиус планеты.

Плотность планеты ρ . Гравитационная постоянная G . Объём шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

1) Найдите ускорение g свободного падения на расстоянии $3R$ от центра планеты.

2) Найдите период T обращения спутника.

4. На горизонтальном столе находятся бруски, соединённые нитью с системой блоков (см. рис.). Массы брусков $m_1 = 3m$, $m_2 = 5m$. Коэффициент трения скольжения нижнего бруска по столу и верхнего бруска по нижнему равен μ . Массы нити и блоков, а также трение в осях блоков пренебрежимо малы.

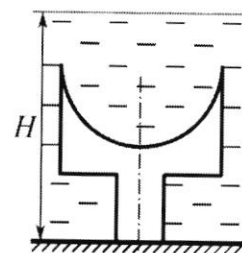


1) Найдите величину F_0 горизонтальной силы, которую следует приложить к свободному концу нити, чтобы нижний брусок скользил по столу, а сила трения, действующая на верхний брусок, была равна нулю.

2) Найдите минимальную силу F , при которой нижний брусок скользит по столу, а верхний брусок движется влево относительно нижнего бруска.

5. Ко дну бассейна глубиной $H=3$ м приклеена осесимметричная конструкция (см. рис.). Клей затвердел. Верхняя поверхность конструкции – полусфера. Объём конструкции $V = 5$ дм³, площадь соприкосновения конструкции с дном через клей

$S = 10$ см². Плотность воды $\rho = 1$ г/см³, атмосферное давление $P_0 = 100$ кПа. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².



1) Найдите давление P_1 вблизи дна.

2) Найдите величину F силы (с указанием направления), с которой вода действует на конструкцию.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

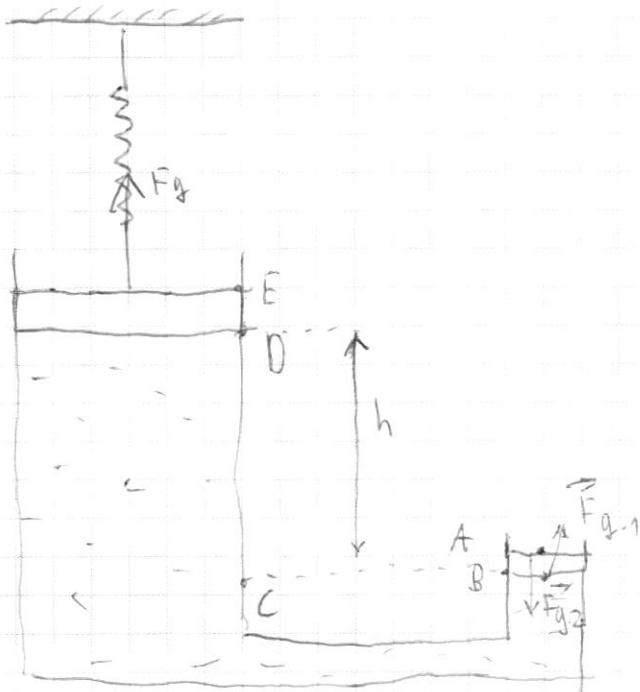
- 1) $\downarrow g$ заметим, что скорости тела, движущегося в вертикальной плоскости, изменяется по закону: $V_x = V_0 - gt$.
- При величине скорости, равной $\frac{V_0}{2}$, проекция скорости на ось x может быть как положительной, так и отрицательной. Если $V_x = \frac{V_0}{2}$, то: $\frac{V_0}{2} = V_0 - gt_1 \Rightarrow gt_1 + \frac{V_0}{2} = V_0$
 $gt = \frac{V_0}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{V_0}{2g} = \frac{10 \frac{м}{с}}{2 \cdot \frac{10 \frac{м}{с^2}}{2}} = 0,5 \text{ с}$. Если же проекция отрицательна (после прохождения тела максимальной точки), то:
 $-\frac{V_0}{2} = V_0 - gt_2 \Rightarrow gt_2 = \frac{3}{2} \cdot V_0 \Rightarrow t_2 = \frac{3 \cdot V_0}{2 \cdot g} = \frac{3 \cdot 10 \frac{м}{с}}{2 \cdot \frac{10 \frac{м}{с^2}}{2}} = 1,5 \text{ с}$.

- 2) Координата вертикальная координата тела в любое время: $x = x_0 + V_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2} = V_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. Подставим значения найденных времён в формулу: $x_1 = 10 \frac{м}{с} \cdot 0,5 \text{ с} - \frac{10 \frac{м}{с^2}}{2} \cdot (0,5 \text{ с})^2$
 $= 5 \text{ м} - \frac{5 \frac{м}{с^2}}{2} \cdot 0,25 \text{ с}^2 = 5 \text{ м} - 1,25 \text{ м} = 3,75 \text{ м}$; $x_2 = 10 \frac{м}{с} \cdot 1,5 \text{ с} - \frac{10 \frac{м}{с^2}}{2} \cdot (1,5 \text{ с})^2$
 $= 15 \text{ м} - \frac{5 \frac{м}{с^2}}{2} \cdot 2,25 \text{ с}^2 = 15 \text{ м} - 11,25 \text{ м} = 3,75 \text{ м} = x_1$. Заметим, что $x_1 = x_2$
 Из соображений о сохранении мех. энергии системы.

Ответ: 1) через $t_1 = 0,5 \text{ с}$ и $t_2 = 1,5 \text{ с}$ 2) $h = 3,75 \text{ м}$.

Задача 2.

- 1) Обозначим на рисунке точки, в которых будем считать давление:



p_a - атмосферное давление

$$p_A = p_a$$

$$p_E = p_A$$

$$p_B = p_C \text{ - из ЗС (закон сообщающихся сосудов)}$$

$$p_D = p_C - \rho \cdot g \cdot h$$

Запишем условия равновесия правого поршня:

$$\begin{cases} F_{g.1} = F_{g.2} \\ F_{g.1} = p_B \cdot \frac{S}{3} \Rightarrow p_A \cdot \frac{S}{3} = p_B \cdot \frac{S}{3} \\ F_{g.2} = p_A \cdot \frac{S}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_B = p_A = p_a \\ p_B = p_A = p_a \end{cases}$$

Запишем условия равновесия для левого поршня:

$$p_D \cdot S + F_g = p_E \cdot S$$

$$p_D = p_C - \rho g h = p_B - \rho g h = p_A - \rho g h = p_a - \rho g h$$

$$(p_a - \rho g h) \cdot S + k \cdot x = p_a \cdot S \Rightarrow k \cdot x = \rho \cdot g \cdot h \cdot S \Rightarrow h = \frac{k \cdot x}{\rho \cdot g \cdot S}$$

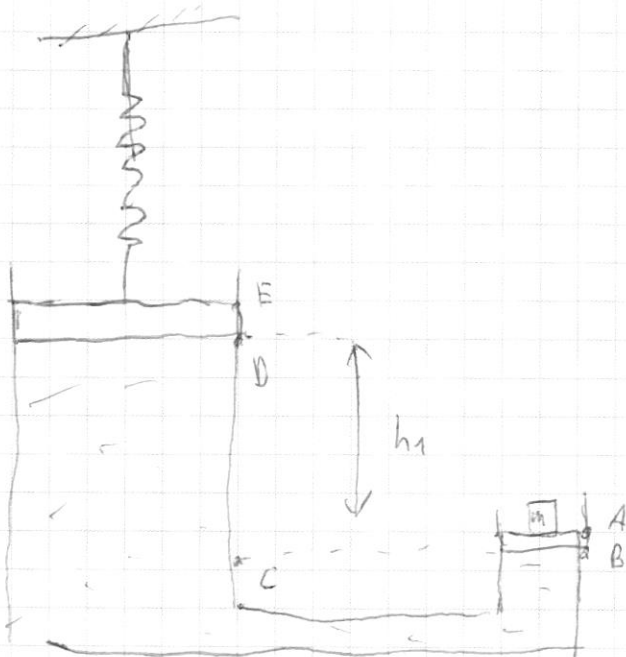
- 2) Заметим, что если после размещения груза пружина стала недеформированной, то левый поршень поднимется на x (т.к. сила упругости пружины была направлена вверх и пружина была растянута). Значит, объем жидкости в левом сосуде ~~уменьшился~~ ^{увеличился} на $V_1 = S \cdot x$, а в правом сосуде ~~увеличился~~ ^{уменьшился} на $V_2 = l_1 \cdot \frac{S}{3}$. $V_1 = V_2 \Rightarrow S \cdot x = l_1 \cdot \frac{S}{3}$
 $l_1 = 3x$. Значит, правый поршень опустился на $3x$ и

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

новая разность высот между поршнями равна:

$$h_1 = h + x + 3x = h + 4x = \frac{kx}{\rho \cdot g \cdot S} + \frac{kx}{\rho \cdot g \cdot S} + 4x = x \left(\frac{k}{\rho \cdot g \cdot S} + 4 \right).$$

Чтобы посчитать давление $\rho \cdot g \cdot S$ в точках и запишем условия равновесия (и.к. $x=0$, но $f_y=0$):



$$P_E = P_a$$

$$P_A = P_a$$

$$P_C = P_B$$

$$P_D = P_C - \rho g \cdot h_1$$

для правого поршня:

$$P_A \cdot \frac{S}{3} + mg = P_B \cdot \frac{S}{3}$$

$$P_A + \frac{3mg}{S} = P_B = P_C$$

$$P_D = P_C - \rho g h_1 = P_A + \frac{3mg}{S} - \rho g h_1$$

для левого поршня:

$$P_E \cdot S = P_D \cdot S \Rightarrow P_E = P_D \Rightarrow P_D = P_A.$$

$$P_A = P_A + \frac{3mg}{S} - \rho g \cdot h_1 \Rightarrow \frac{3mg}{S} = \rho g \cdot h_1$$

$$\frac{3mg}{S} = \rho g \cdot x \cdot \left(\frac{k}{\rho \cdot g \cdot S} + 4 \right) \Leftrightarrow m = \frac{S}{3} \cdot \rho g x \left(\frac{k}{\rho \cdot g \cdot S} + 4 \right) =$$

$$= \frac{x}{3} \cdot (k + 4 \rho \cdot S)$$

Ответ: 1) $h = \frac{kx}{\rho \cdot g \cdot S}$ 2) $m = \frac{x}{3} (k + 4 \rho \cdot S)$

Задача 3.

1) Возместим тело массой m_0 на расстоянии $3R$ от центра планеты. Заметим, что сила притяжения между телом и планетой равна $F = m_0 g$. Также, по закону Ньютона, она равна: $F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} = G \cdot \frac{m_0 M}{(3R)^2}$. И.к. объем планеты равен $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, а плотность ρ , то масса планеты M равна: $M = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$. Значит, $m_0 g = \frac{G \cdot m_0 \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3}{9R^2} =$

$$\Rightarrow g = \frac{4}{3} \frac{G \cdot \rho \cdot \pi \cdot R}{9} = \frac{4}{27} G \cdot R \cdot \rho \cdot \pi$$

2) Аналогично выведем g для случая, в формуле меняется расстояние между телами $r: r = 2R$.

$$m_0 g = \frac{G \cdot m_0 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \rho}{(2R)^2} \Rightarrow g = \frac{1}{3} G \cdot R \cdot \rho \cdot \pi$$

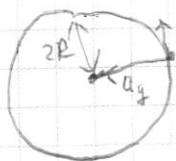
Заметим также, что ~~бразо~~ спутник, вращаясь вокруг планеты с радиусом R на высоте равной R , движется по окружности с радиусом $2R$. Значит, его центростремительное ускорение a_y , направленное к центру окружности, равно: $a_y = g$. Также, $a_y = \omega^2 r$, ω - угловая скорость.

А т.к. $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то $T = \frac{2\pi}{\omega}$, T - период

обращения спутника. Подставим ω и получим T :

$$\omega^2 \cdot 2R = \frac{1}{3} G \cdot R \cdot \rho \cdot \pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{3} G \cdot R \cdot \rho \cdot \pi}}$$

Ответ: 1) $g = \frac{4}{27} G \cdot R \cdot \rho \cdot \pi$ 2) $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{3} G \cdot R \cdot \rho \cdot \pi}}$



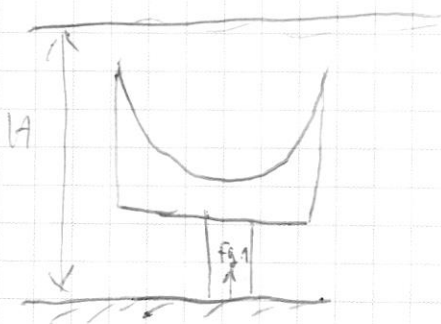
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.

1) т.к. атмосферное давление равно $P_0 = 100 \text{ кПа}$, то на высоте H (т.е. высота 3 м), давление воды P_1 будет равно:

$$P_1 = P_0 + \rho \cdot g \cdot H = 100 \text{ кПа} + 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 3 \text{ м} = 100 \text{ кПа} + 30 \text{ кПа} = 130 \text{ кПа}.$$

2) заметим, что сила действия воды на погружённое тело равно ^{векторной} сумме сил давления воды на ^{нижнюю} часть тела. Также, на свободно погружённое тело действует с силой Архимеда, равной: $F_{\text{Арх}} = \rho \cdot V \cdot g$ (ρ - плотность жидкости, V - полный объём жидкости тела).



Заметим, что если бы основание конструкции не было связано с поверхностью, то на конструкцию действовала бы сила со стороны воды, равная $F_1 = F_{\text{Арх}} = V \cdot \rho \cdot g$.

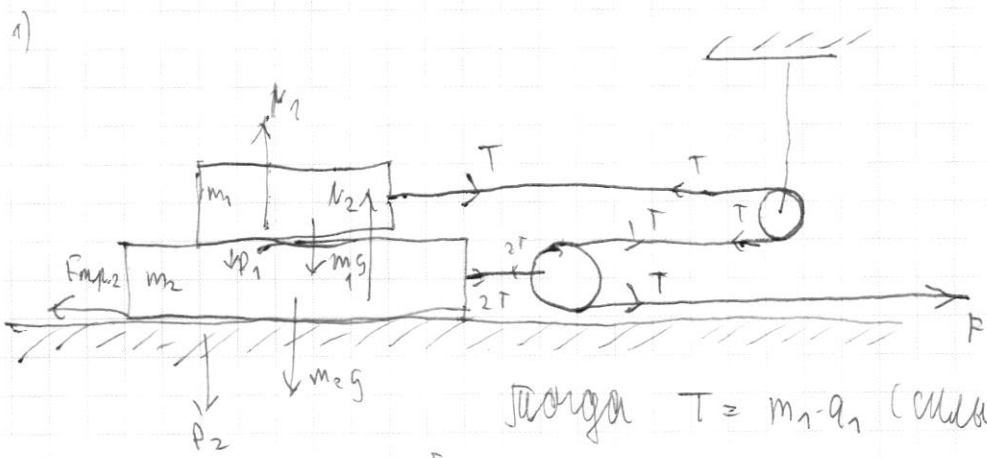
Также $F_1 = \vec{F}_{g.1} + \vec{F}_{g.2}$, $\vec{F}_{g.1}$ - давление или давление воды на основание конструкции, $\vec{F}_{g.2}$ - все остальные силы давления. Если ~~была~~ ~~стационарная~~ значим, $F_{\text{Арх}} = F_{g.1} + F_{g.2}$ после стационарной конструкции с поверхностью, вода перестала поднимать ~~под~~ конструкцию и $F_{g.1}$ исчезла. Значит, теперь сила, с которой вода действует на тело, равна $F_{g.2}$. А т.к. $F_{g.1} + F_{g.2} = V \cdot \rho \cdot g$, то $F_2 = F_{g.2} = V \cdot \rho \cdot g - F_{g.1}$.

Также $F_{g,1} = S \cdot \rho_1$. Значит, $F_{g,2}$ — сила воздействия воды на конструкцию равна F_2 равна $F_2 = V \cdot \rho \cdot g - S \cdot \rho_1 =$
 $= 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}} - 130 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 50 \text{ Н} - 130 \text{ Н} = -80 \text{ Н}.$
 т.е. сила Архимеда действует вверх, но сила давления воды действует на конструкцию вниз, и равна 80 Н.

Ответ: 1) $F_1 = 130 \text{ кПа}$ 2) $F = 80 \text{ Н}$, направлена вниз.

2. Задача 4.

Рассмотрим силы в системе:



Заметим, что $T = F_0$
 a_1 — ускорение верхнего бруска в СО земли.

Также $T = m_1 \cdot a_1$ (силы направлены противоположно)

$$F = m_1 \cdot a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{F_0}{m_1}$$

для нижнего бруска:

$$\begin{cases} N_1 + m_2 g = N_2 \\ N_1 = k_1 \\ N_2 = m_1 g \end{cases} \Rightarrow m_1 g + m_2 g = N_2. \text{ Также } F_{\text{тр.2}} = \mu \cdot N_2 = \mu \cdot g \cdot (m_1 + m_2)$$

$$2T - F_{\text{тр.2}} = m_2 \cdot a_2 \Rightarrow 2F - \mu \cdot g \cdot (m_1 + m_2) = m_2 \cdot a_2$$

Заметим, что относительные или взаимные перемещения верхнего и нижнего брусков обусловлено их неподвижностью друг относительно друга. т.к. их начальные скорости равны нулю, то расстояния, которые они преодолеют, равны $l_1 = a_1 t^2$ и $l_2 = \frac{a_2 t^2}{2}$;
 $l_1 = l_2$ — условие отсутствия или наличия $\Rightarrow a_1 = a_2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Отсюда,

$$\begin{cases} a_1 = \frac{F_0}{m_1} \\ 2F_0 - \mu \cdot g(m_1 + m_2) = m_2 \cdot a_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2F - \mu \cdot g(m_1 + m_2) = m_2 \cdot \frac{F_0}{m_1}$$

$$\begin{cases} 2F_0 - \mu \cdot g(m_1 + m_2) = m_2 \cdot a_2 \\ a_1 = a_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$F_0 \left(2 - \frac{m_2}{m_1} \right) = \mu \cdot g(m_1 + m_2)$$

$$F_0 = \mu \cdot g \frac{(m_1 + m_2)}{2 - \frac{m_2}{m_1}} = \mu \cdot g \cdot \frac{(3m + 5m)}{2 - \frac{5m}{3m}} = \mu \cdot g \cdot \frac{8m}{\frac{6m - 5m}{3m}} =$$

$$= \mu \cdot g \cdot \frac{8m}{\frac{1}{3}} = 24 \mu \cdot g \cdot m$$

2) Если верхний брусок движется относительно нижнего бруска, то на него действует сила трения $F_{тр.1}$, равная $F_{тр.1} = \mu \cdot m_1 g$. Значит, ускорение верхнего бруска в СО земли будет равно: $\mu \cdot m_1 g + F = m_1 a_1 \Rightarrow a_1 = \mu \cdot g + \frac{F}{m_1}$
на нижнего бруска:

$$2F - \mu \cdot m_1 g - \mu \cdot (m_1 + m_2) g = a_2 \cdot m_2. \text{ Заметим, что верхний}$$

брусок движется влево относительно нижнего, если $a_1 < a_2$

$$\text{Если } a_1 = a_2 \quad a_2 = 2F - \mu \cdot m_1 g - \mu \cdot m_1 g - \mu \cdot m_2 g = a_2 \cdot m_2$$

$$2F - \mu \cdot g(2m_1 + m_2) = m_2 \cdot a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{2F}{m_2} - \mu g \frac{(2m_1 + m_2)}{m_2}$$

$$a_1 < a_2 \Rightarrow \mu \cdot g + \frac{F}{m_1} < \frac{2F}{m_2} - \mu g \frac{(2m_1 + m_2)}{m_2}$$

Положим m_1 и m_2 :

$$\mu \cdot g + \frac{F}{3m} < \frac{2F}{5m} - \mu \cdot g \left(\frac{2 \cdot 3m + 5m}{5m} \right)$$

$$\mu \cdot g + \frac{F}{3m} < \frac{2F}{5m} - \mu \cdot g \cdot \frac{11m}{5m}$$

$$\mu \cdot g \left(1 + \frac{11}{5} \right) < \frac{2F}{5m} - \frac{F}{3m}$$

$$\cancel{\mu \cdot g} \cdot \frac{16}{5} \quad \mu \cdot g \cdot \frac{16}{5} < \frac{F}{m} \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3} \right)$$

$$\cancel{\mu \cdot g} \cdot \frac{F}{m} = \left(\frac{6}{15} - \frac{5}{15} \right) > \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{16}{5}$$

$$F \cdot \frac{1}{5 \cdot 3} > \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{16}{5}$$

$$F > 48 \mu \cdot m \cdot g$$

Ответ: 1) $F_0 = 24 \cdot \mu \cdot m \cdot g$ 2) $F = 48 \cdot \mu \cdot m \cdot g$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $mgh = \frac{mv^2}{2} = S$ v

$v_{max} = \text{const} = v_{m1} = \frac{m \cdot v_0^2}{2}$

$= \frac{3 \cdot 100}{8 \cdot 40} = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ м}$ $v_{max,2} = v_{max,1} = m \cdot g \cdot h + m \cdot \left(\frac{v_0}{2}\right)^2$

$h = v_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2}$ $\frac{m \cdot v_0^2}{2} = mgh + \frac{m \cdot v_0^2}{8} \Rightarrow \frac{v_0^2}{2} = 2gh + \frac{v_0^2}{4}$

$3,75 \text{ м} = 10 \cdot t - \frac{10 \cdot t^2}{2}$ $\frac{3v_0^2}{4} = 2gh \Rightarrow h = \frac{3v_0^2}{8g} =$

$5 t^2 - 10t + 3,75 = 0$

$t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 5 \cdot 3,75}}{10} = \frac{10 \pm 5}{10} = (1,5, 0,5)$

$v_a = v_0 - g \cdot t$

$F_{mp} = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot \mu$

$2F - F_{mp} = m_2 \cdot a_2$

$h = v_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 10 \cdot 0,5 - \frac{10 \cdot 0,5^2}{2} = 5 - 1,25 = 3,75$

$10 \cdot 1,5 - \frac{10 \cdot 1,5^2}{2} = 15 - 2,25 \cdot 5 = 3,75$

2. $P_A = P_B = P_C$

$P_D = P_A - \rho g \cdot h$

$(P_A - \rho g h) \cdot S + F_g = P_A \cdot S$

$k \cdot x = \rho \cdot g \cdot h$

$h = \frac{k \cdot x}{\rho \cdot g}$

$P_E = P_A$

$P_C = P_B = P_D$

$P_A = P_A - \rho g h$

$\frac{\rho g h}{S} = \rho g h$

$P_A = P_B = P_C$

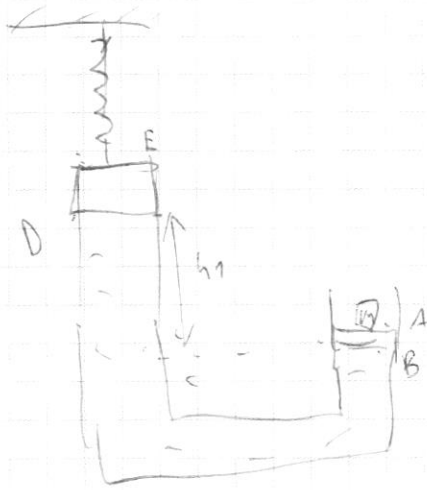
$P_D = P_C - \rho \cdot g \cdot h = P_A - \rho g h$

$P_D \cdot S + F_g = P_E \cdot S = P_A \cdot S$

$(P_A - \rho g h) \cdot S + F_g = P_A \cdot S$

левый поршень на $x=5$ правый опущен на $3x$

$$h_1 = h + 4x = \frac{k \cdot x}{\rho \cdot g} + 4x = x \left(\frac{k}{\rho g} + 4 \right)$$



$$P_E = P_a$$

~~$$\frac{3mg}{S} + P_A = P_B = P_c$$~~

$$P_E \cdot S = P_D \cdot S \Rightarrow P_D = P_a$$

$$P_D = P_c - \rho g h_1$$

$$\frac{3mg}{S} + P_A - \rho g h_1 = P_A$$

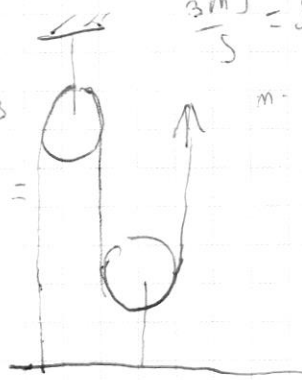
$$\frac{3mg}{S} = \rho \cdot g \cdot h_1$$

$$m \cdot \frac{3g}{S} = \rho \cdot g \cdot h_1$$

$$m = \frac{S}{3} \cdot \rho \left(\frac{k}{\rho g} + 4 \right) x$$

$$= x \cdot \frac{S}{3} \cdot \left(\frac{k}{\rho g} + 4 \right)$$

~~$$m = x \cdot \frac{S}{3} \cdot \left(\frac{k}{\rho g} + 4 \right)$$~~



$$m \cdot g = F = G \cdot \frac{m \cdot M}{(3R)^2}$$

$$g = G \cdot \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3}{g R^2} =$$

$$= \frac{4}{27} G \cdot \rho \cdot R \cdot \pi$$

на полет $2R$:

$$g \cdot \frac{4}{3} \cdot G \cdot \rho \cdot R \cdot \pi = \frac{v^2}{R} \cdot m^2 \cdot R$$

$$W^2 = \frac{1}{3} G \cdot \rho \cdot \pi \cdot R^2$$

$$\frac{2\pi}{W} = T$$

$$W = \sqrt{\frac{1}{3} G \cdot \rho \cdot \pi \cdot R^2}$$

$$\rho \cdot V \cdot g = F_{арх}$$

$$\rho \cdot V \cdot g = (\rho_0 + \rho_0 \Delta) \cdot S = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot 0,005 \text{ м}^3 = (100 \cdot 10^3 \text{ Н} + 1000 \cdot 10 \cdot 3)$$

$$\approx 130 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 50 \cdot 130 \cdot 10^3 \text{ Н} = 50 \cdot 130 = 80$$