Олимпиада «Физтех» по физике 2022

Класс 10

Вариант 10-01

Шифр

(заполняется секретарём)

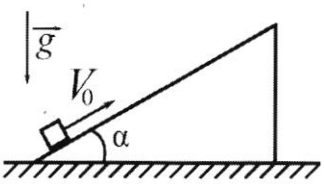
1. Фейерверк массой $m = 2$ кг стартует после мгновенной работы двигателя с горизонтальной поверхности, летит вертикально вверх и разрывается в высшей точке траектории на множество осколков, которые летят во всевозможных направлениях с одинаковыми по величине скоростями. Высота точки разрыва $H = 65$ м. На землю осколки падают в течение $\tau = 10$ с.

1) Найдите начальную скорость V_0 фейерверка.

2) Найдите суммарную кинетическую энергию K осколков сразу после взрыва.

Ускорение свободного падения g=10 м/с^2. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.

2. На гладкой горизонтальной поверхности расположен клин. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтом угол $\alpha = 30^0$. Шайбе, находящейся на наклонной поверхности клина, сообщают начальную скорость $V_0 = 2$ м/с (см. рис.), далее шайба безотрывно скользит по клину. Массы шайбы и клина одинаковы. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.



1) На какую максимальную высоту H над точкой старта поднимется шайба на клине?

2) Найдите скорость V клина, в тот момент, когда шайба вернется в точку старта на клине. Массы шайбы и клина одинаковы. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

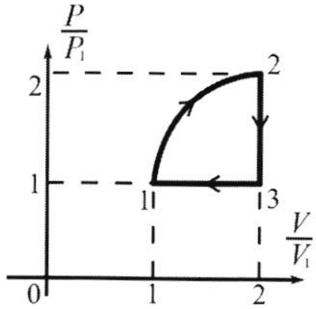
3. По внутренней поверхности проволочной металлической сферы радиуса $R = 1,2$ м равномерно со скоростью $V_0 = 3,7$ м/с движется модель автомобиля. Движение происходит в горизонтальной плоскости большого круга. Масса модели $m = 0,4$ кг. Модель приводится в движение двигателем. Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

1) С какой по величине силой P модель действует на сферу?

2) Рассмотрим модель автомобиля равномерно движущуюся по окружности в плоскости большого круга, составляющей с горизонтом угол $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$. Вычислите минимальную допустимую скорость V_{MIN} такого равномерного движения. Коэффициент трения скольжения шин по поверхности сферы $\mu = 0,9$.

Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

4. Один моль одноатомного идеального газа участвует в цикле 1-2-3-1 (см. рис.), участок 1–2 –дуга окружности с центром в точке 3. Температура газа в состоянии 1 равна T_1.



1) Какое количество Q теплоты подведено к газу в процессе расширения?

2) Найдите работу A газа за цикл.

3) Найдите КПД η цикла.

Универсальная газовая постоянная R.

5. Заряд Q >0 однородно распределен по сфере радиуса R. В первом опыте на расстоянии $2R$ от центра сферы помещают небольшой по размерам шарик с зарядом q >0.

1) Найдите силу F_1, действующую на заряженный шарик.

Во втором опыте заряд q однородно распределяют по стержню длины R, стержень помещают на прямой, проходящей через центр заряженной сферы. Ближайшая к центру сферы точка стержня находится на расстоянии $2R$ от центра.

2) Найдите силу F_2, с которой заряд сферы действует на заряженный стержень.

Все силы, кроме кулоновских, считайте пренебрежимо малыми. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона k. Явлениями поляризации пренебрегите.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

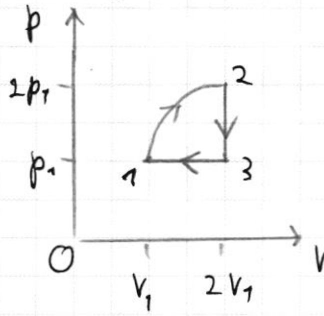
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ V.

Перерисуем график цикла в осях p, V.



$\nu = 1$ моль

1) Процесс расширения – это процесс 1-2.

$p_1 V_1 = \nu R T_1$ – ур-ние сост. идеального газа в точке 1.

Запишем второе начало термодинамики для процесса 1-2:

$Q = A_{12} + \Delta U_{12}$, где A_{12} – работа газа в процессе 1-2. Её мы можем посчитать, как площадь под графиком процесса 1-2 ($\frac{1}{4}$ окр. и прямоугольник):

$$A_{12} = \frac{\pi}{4} p_1 V_1 + p_1 V_1 = \left(\frac{\pi}{4}+1\right) p_1 V_1$$

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R (T_2 - T_1) = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{3}{2}(4p_1V_1 - p_1V_1) = \frac{9}{2} p_1 V_1$$

$$Q = A_{12} + \Delta U_{12} = \left(\frac{\pi}{4}+1\right) p_1 V_1 + \frac{9}{2} p_1 V_1 = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{11}{2}\right) p_1 V_1 = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{11}{2}\right) \nu R T_1$$

2) Работу газа за цикл мы можем посчитать как площадь фигуры, которую образует график цикла ($\frac{1}{4}$ окр.):

$$A = \frac{\pi}{4} p_1 V_1 = \frac{\pi}{4} \nu R T_1 = \frac{\pi}{4} R T_1, \text{ т.к. } \nu = 1 \text{ моль}$$

3) $\eta = \frac{A}{Q} = \frac{\frac{\pi}{4} p_1 V_1}{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{11}{2}\right) p_1 V_1} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\left(\frac{\pi+22}{4}\right)} = \frac{\pi}{\pi + 22}$ – кпд цикла, т.е. отн. абс. работы газа к абс. величине подв. тепла

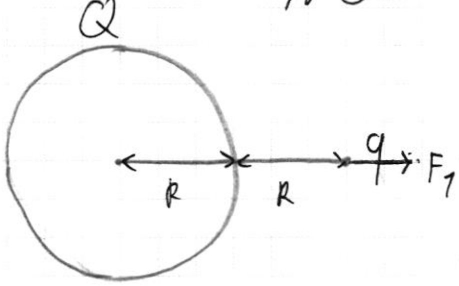
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

~~Ответ: 1) $Q = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{11}{2}\right) p_1 V_1$; 2) $A = \frac{\pi}{4} p_1 V_1$; 3) $\eta = \frac{\pi}{\pi + 22}$~~

Ответ: 1) $Q = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{11}{2}\right) \nu R T_1$; 2) $A = \frac{\pi}{4} \nu R T_1$; $\eta = \frac{\pi}{\pi + 22}$

№5.

1)



Выберем гауссову поверхность в виде сферы с радиусом $2R$ и центром в точке центра сферы с зарядом Q.

В силу симметрии, в каждой точке этой поверхности напряжённость поля, создаваемого заряженной сферой Q будет одинакова и равна E_1. Значит $F_1 = qE_1$.
Запишем теорему Гаусса для этой поверхности

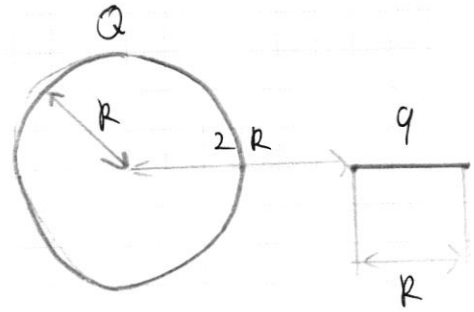
$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$, но в то же время $\Phi = E_1 \cdot 4\pi (2R)^2$ – где Φ - поток через гауссову поверхность.

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = E_1 \cdot 16\pi R^2$$

$$E_1 = \frac{Q}{16\pi R^2 \varepsilon_0}$$

$$F_1 = qE_1 = \frac{qQ}{16\pi \varepsilon_0 R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qQ}{4R^2} = k\frac{qQ}{4R^2};$$

2)



$\lambda = \frac{q}{R}$ - лин плотность заряда стержня

Сила F_2 по величине равна сумме всех сил, действ. со стороны сферы на точечные заряды $dq = \lambda \cdot dl$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Запишем теорему Гаусса для куска стержня длиной dl и заряда $dq = dl \cdot \lambda$, находящегося на расстоянии l от центра сферы:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = E_2(l) \cdot \pi l^2 \cdot 4$$

$$E_2(l) = \frac{Q}{4\pi l^2 \varepsilon_0} \Rightarrow dF_2 = E_2(l) \cdot dq$$

$$F_2 = \int_{2R}^{3R} E_2(l) \cdot dq = \int_{2R}^{3R} \frac{Q}{4\pi l^2 \varepsilon_0} \cdot \lambda \cdot dl =$$

$$= \int_{2R}^{3R} \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R} \cdot \frac{dl}{l^2} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R} \int_{2R}^{3R} \frac{dl}{l^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq}{R} \cdot \left(-\frac{1}{l}\right)\Bigg|_{2R}^{3R} =$$

$$= \frac{kQq}{R} \cdot \left(-\frac{1}{3R} + \frac{1}{2R}\right) = \cancel{\frac{kQq}{24R^2}} = \frac{kQq}{6R^2};$$

Ответ: 1) $F_1 = k\frac{qQ}{4R^2}$;

2) $F_2 = \cancel{k\frac{Qq}{24R^2}}\ k\frac{Qq}{6R^2}$;

N 1.

$m = 2$ кг
$H = 66$ м
$\tau = 10$ с
$g = 10$ м/с^2

1) Пусть V - скорость фейерверка перед взрывом. Поскольку во время взрыва не действ. внешние силы (он произошел очень быстро), выполняется закон сохр. импульса

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

~~Запишем ЗСИ:~~ ~~одинаковы~~

~~$mV = \sum_i m_i V_i$, где V_i у каждого осколка одинаковы и равны u.~~

~~$mV = u \cdot \sum_i m_i = u \cdot m$ — суммарная масса осколков равна m.~~

~~$u = V$ — т.е. скорость каждого осколка после взрыва равна скорости фейерверка до взрыва V.~~

Запишем ЗСИ:

№1.

$m = 2$ кг
$H = 66$ м
$\tau = 10$ с
$g = 10$ м/с^2
V_0 — ?
K — ?

1) Поскольку фейерверк взорвался в высшей точке траектории, то его скорость перед взрывом была равна нулю. Запишем ЗСЭ:

$$m\frac{V_0^2}{2} = mgH$$ (примем высоту поверхности земли за ноль потенциальной энергии).

$$V_0^2 = 2gH$$

$$V_0 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 65} = \sqrt{100 \cdot 13} = 10 \cdot \sqrt{13}\,(м/с)$$

2) Поскольку во время взрыва внешние силы не действ. (взрыв происходит очень быстро) выполняется закон сохранения импульса:

$$0 = \sum_i m_i \vec{V_i}$$ — где V_i — скорость каждого осколка, которая одинакова по модулю для всех осколков.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Это значит, что для каждого осколка летящего в произвольном направлении есть другой осколок, летящий в противоположном направлении (так суммарный импульс остаётся равен нулю).

$\tau = 10$ с — время между падением первого и последнего осколка. Очевидно, что первым упал осколок со скоростью $v_i = v$, направленной вертикально вниз, а последним — осколок со скоростью v, направленной вертикально вверх. Запишем уравнения движения для каждого по оси y (ось y направлена вертикально вниз):

$$(1):\ H = -v(t+\tau) + g\frac{(t+\tau)^2}{2}$$

$$(2):\ H = vt + \frac{gt^2}{2}$$

$$K = \sum_i m_i \frac{v_i^2}{2} = \frac{v^2}{2}\sum_i m_i = m\frac{v^2}{2}$$

$$\cancel{(1)+(2):\ 2H = -v\tau + \frac{gt^2}{2}}$$

$$(1)-(2):\ 0 = -v(t+\tau) - vt + \frac{g}{2}\left((t+\tau)^2 - t^2\right)$$

$$2vt + v\tau = \frac{g}{2}\tau\cdot(2t+\tau)$$

$$v(2t+\tau) = \frac{g}{2}\tau\cdot(2t+\tau)$$

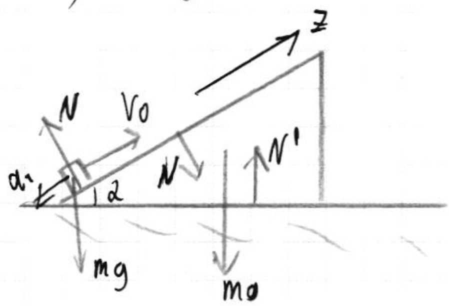
$V = \frac{g}{2}\tilde{\tau} = \left|\frac{10}{2}\cdot 70\right| м/с = 50 м/с$

$K = m\frac{V^2}{2} = \left(2\cdot\frac{50^2}{2}\right) Дж = 2500 Дж$

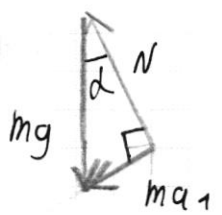
ответ: 1) $V_0 = 70\cdot\sqrt{13}$ м/с
2) $K = 2500$ Дж

N 2.

1) Пусть массы шайбы и клина равны m.



Поскольку движение шайбы происходит безотрывно от клина, её ускорение a_1 направлено вдоль поверхности клина.



$N = mg\cos\alpha$ направим ось
$ma_1 = mg\sin\alpha$ z вдоль пов.
$a_1 = g\sin\alpha$ клина:

Запишем уравнение движения шайба по клину по оси z:

$$\frac{H(t)}{\sin\alpha} = V_0 t - a_1\frac{t^2}{2} = V_0 t - g\sin\alpha\frac{t^2}{2}$$

Нам необходимо найти максимальное возможное значение $H(t)$:

$$H(t) = V_0\sin\alpha\, t - g\sin^2\alpha\frac{t^2}{2}$$

Это парабола с ветвями, направленными вниз, значит время при котором достигается ~~H~~ макс. H равно t_{max}

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

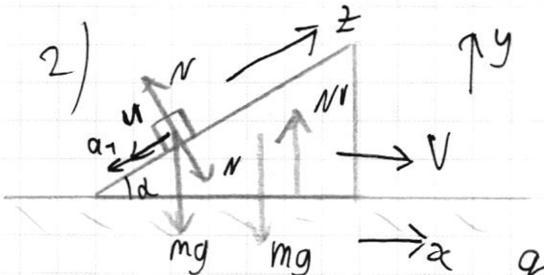
$$t_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-v_0 \sin\alpha}{-g\sin^2\alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot 2} = \frac{V_0}{g\sin\alpha} = \left(\frac{2}{\frac{1}{2}\cdot 10}\right) c = 0{,}4\ c$$

$$H = \cancel{H(t_{max})} H(t_{max}) = V_0 \sin\alpha\, t_{max} - g\sin^2\alpha \frac{t_{max}^2}{2} =$$

$$= \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}4 - 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{0{,}4^2}{2}\right) м = \left(0{,}4 - \frac{10 \cdot 0{,}16}{8}\right) м =$$

$$= (0{,}4 - 0{,}2)\ м = 0{,}2\ м\ ;$$

2)



$V_0 \cancel{4} = a_1 t_{max}$

С начала момента движ. до момента когда шайба вернётся в начальное положение пройдёт $2t_{max} = 0{,}8$ с (шайба поднимется на высоту H и спустится за одинаковое время, т.к. она движ. с постоянным ускорением $-a_1$ по оси z).

~~Запишем закон изм. импульса для всей~~

Суммарный импульс системы по оси x не меняется в процессе всего движ. Запишем ЗСИ по оси x:

$$m V_0 \cos\alpha = -m V_0 \cos\alpha + m V_x$$

$$V_x = 2 V_0 \cos\alpha$$

Теперь запишем закон изменения импульса для всей системы по оси y:

$$(1)\ mV_0\sin\alpha - (-mV_0\sin\alpha) - mV_y = (-2mg + N')\cdot 2t_{max}$$

$$2mV_0\sin\alpha - mV_y = (N' - 2mg)2t_{max}$$

Теперь закон изм. импульса по оси y для клина:

$$0 - mV_y = (N' - mg - N\cos\alpha)2t_{max}$$

$$(2)\ mg + N\cos\alpha - \frac{mV_y}{2t_{max}} = N'$$

Подставим N' в уравнение (1):

$$2mV_0\sin\alpha - mV_y = (mg + N\cos\alpha - 2mg)2t_{max} - mV_y$$

$$2mV_0\sin\alpha = (mg\cos^2\alpha - mg)2\cdot t_{max}$$

$$2mV_0\sin\alpha = mg\sin^2\alpha\cdot 2\cdot\frac{V_0}{g\sin\alpha} = 2mV_0\sin\alpha$$

В общем, $V = V_x = 2V_0\cos\alpha = \left(2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)м/с =$

$= 2\sqrt{3}\ м/с$

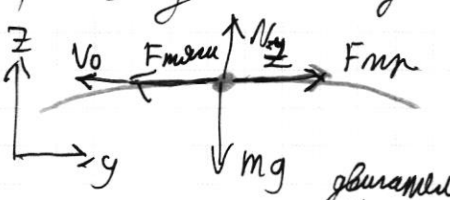
Ответ: 1) $H = 0{,}2$ м;

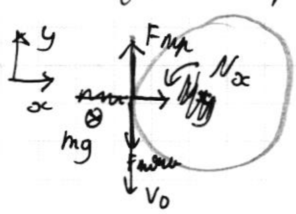
2) $V = 2\cdot\sqrt{3}$ м/с

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№3.

1) Вид сбоку: Вид сверху:





Fтр направлена против скорости.

Сила тяги двигателя направлена вдоль вектора скорости V_0 и уравновешивает силу трения $F_{тр}$ по оси y (т.к. больше сил по этой оси нет и тангенциального ускорения нет, т.к. при движ. по окр. скорость автомобиля по модулю не меняется — лишь по направлению).

II з. Ньютона по оси z:

$$mg = N_z \quad , \quad N^2 = N_z^2 + N_x^2$$ — норм. сила реакции опоры

II з. Ньютона по оси x:

$$N_x = m\frac{V^2}{R} = ma_n$$ — эта сила создаёт центростремительное ускорение

$\vec{P} = -\vec{Q}$, где $\vec{Q}$ — полная реакция опоры

$$P = Q = \sqrt{F_{тр}^2 + N^2} = \sqrt{(\mu^2+1)N^2} =$$

$$= \sqrt{(\mu^2+1)(N_z^2+N_x^2)} = \sqrt{(\mu^2+1)\left(m^2g^2+m^2\frac{V^4}{R^2}\right)} = m\sqrt{(\mu^2+1)\left(g^2+\frac{V^4}{R^2}\right)}$$

$$= (0{,}4\cdot 20{,}4)\ \text{Н} = 8{,}16\ \text{Н}$$

(см. расчеты ~~ххх~~ в черновике).

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 3.

Дано:

$R = 7{,}2$ м

$V_0 = 3{,}7$ м/с

$m = 0{,}4$ кг

$d = \frac{\pi}{6}$

$\mu = 0{,}9$

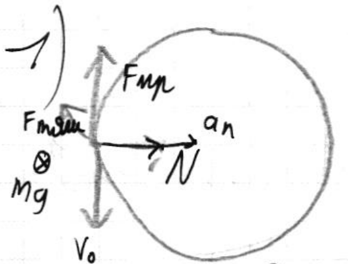
$g = 10$ м/с^2

1) P — ?

2) V_{min} — ?

Решение.

1)



Вид сверху

Сила трения направлена против скорости.

Сила тяги двигателя уравновешивает силу трения $F_{тр}$ и силу тяжести mg, а сила реакции опоры, направленная вдоль вектора нормального ускорения равна:

$$N = m\frac{V_0^2}{R}$$

Сила $\vec{P}$ по модулю равна полной силе реакции опоры $\vec{Q}$ по модулю:

$$P = \sqrt{N^2 + F_{тр}^2} = \sqrt{N^2 + \mu^2 N^2}$$

$\frac{V^2}{R} = 11{,}4$ м/с^2

$\left(\frac{V^2}{R}\right)^2 = 130$

$\left(\frac{V^2}{R}\right)^2 + g^2 = 230$

$\mu^2 + 1 = 1{,}81$

$3{,}7 \times 3{,}7 = 13{,}69$

$0{,}4 \times 20{,}4 = 8{,}16$

$13{,}69 : 7{,}2 = 1{,}90$

$11{,}4 \times 11{,}4 = 129{,}96$

$230 \times 1{,}81 = 416{,}30$

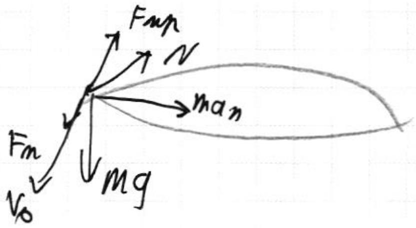
$416{,}3$

$2{,}7 \times 2{,}7$

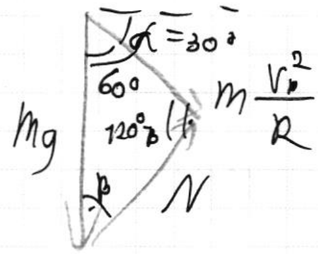
$20{,}5 \times 20{,}5 = 420{,}25$

☑ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №11 (Нумеровать только чистовики)



Силы создающие центро-стремительное ускорение



Запишем теорему синусов:

$$\frac{\frac{mV^2}{R}}{\sin\beta} = \frac{mg}{\sin(120^\circ-\beta)}$$

$$g\sin\beta = \frac{V^2}{R}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta + \frac{1}{2}\sin\beta\right)$$

$$\cancel{V^2(R)} \quad V^2(\beta) = \frac{gR\sin\beta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta + \frac{1}{2}\sin\beta}$$

$$V^2(tg(\beta)) = \frac{gR\,tg\beta}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}tg\beta}$$; V^2 достигает минимума при V_{min}

Найдём мин. значение функции $V^2(tg\beta)$ с помощью дифференцирования:

$$\left(V^2(tg(\beta))\right)' = \frac{gR\,tg\beta\cdot\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}tg\beta\right)gR}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}tg\beta\right)^2} = 0$$

$$V_{min} = \sqrt{g\sin\alpha\, R} = \sqrt{6}\ м/с$$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

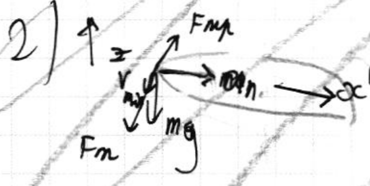
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

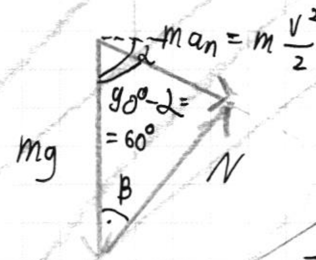
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2)



Нарисуем силы, создающие центростремительное ускорение

$\alpha = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$



Запишем теорему синусов:

$$\frac{mg}{\sin(180^\circ - 90^\circ + \alpha - \beta)} = \frac{m\frac{V^2}{2}}{\sin\beta}$$

$$g\sin\beta = \frac{V^2}{2}\cdot\sin(180^\circ - 60^\circ - \beta)$$

$$g\sin\beta = \frac{V^2}{2}\cdot\sin(120^\circ - \beta) = \frac{V^2}{2}\cdot(\sin 120^\circ\cdot\cos\beta - \sin\beta\cos 120^\circ)$$

$$V^2(\beta) = \frac{2g\sin\beta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta + \frac{1}{2}\sin\beta} = \frac{2g\,tg\beta}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}tg\beta}$$

V^2 достигнет минимума при V_{min} и производной равной нулю:

$$(V^2(\beta))' = \frac{2g\,tg\beta\cdot\frac{1}{2} - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}tg\beta)\cdot 2g}{(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}tg\beta)} = 0$$

$$g\,tg\beta - \sqrt{3}g - tg\beta\, g = 0$$

$V = V_{min}$, когда $\beta = 30^\circ$

Запишем теорему синусов:

$$\frac{m\frac{V^2}{2}}{\sin(\beta)} = \frac{N}{\sin 60^\circ} = \frac{mg}{\sin(120^\circ - \beta)}$$

$m\frac{V_{min}^2}{2} = mg\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})$

$V_{min} = \sqrt{2\cdot\cos\frac{\pi}{3}\, gR} = \sqrt{gR}$