

# Олимпиада «Физтех» по физике 2022

Класс 10

Вариант 10-02

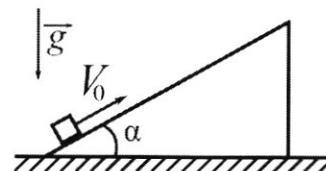
Шифр

(заполняется секретарём)

1. Фейерверк массой  $m = 1 \text{ кг}$  стартует после мгновенной работы двигателя с горизонтальной поверхности, летит вертикально вверх и через  $T = 3 \text{ с}$  разрывается в высшей точке траектории на множество осколков, которые летят во всевозможных направлениях с одинаковыми по величине скоростями. Суммарная кинетическая энергия осколков сразу после взрыва  $K = 1800 \text{ Дж}$ . На землю осколки падают в течение  $\tau = 10 \text{ с}$ .

- 1) На какой высоте  $H$  взорвался фейерверк?
- 2) В течение какого промежутка времени  $\tau$  осколки будут падать на землю? Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.

2. На гладкой горизонтальной поверхности расположен клин. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтом угол  $\alpha$  такой, что  $\cos \alpha = 0,6$ . Шайбе, находящейся на наклонной поверхности клина, сообщают некоторую начальную скорость  $V_0$  (см. рис.), далее шайба безотрывно скользит по клину и поднимается на максимальную высоту



$H = 0,2 \text{ м}$ . Масса клина в два раза больше массы шайбы. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

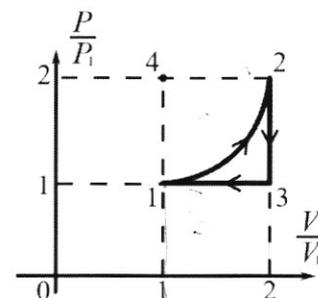
- 1) Найдите начальную скорость  $V_0$  шайбы.
- 2) Найдите скорость  $V$  клина, в тот момент, когда шайба вернется в точку старта на клине. Массы шайбы и клина одинаковы.

3. По внутренней поверхности проволочной сферы равномерно движется модель автомобиля. Движение происходит в горизонтальной плоскости большого круга. Сила, с которой модель действует на сферу, в два раза больше силы тяжести, действующей на модель. Модель приводится в движение двигателем. Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

- 1) Найдите ускорение  $a$  модели.
- 2) Вычислите минимальную допустимую скорость  $V_{\text{MIN}}$  равномерного движения модели по окружности в плоскости большого круга, составляющей с горизонтом угол  $\alpha = 45^\circ$ . Коэффициент трения скольжения шин по поверхности сферы  $\mu = 0,8$ , радиус сферы  $R = 1 \text{ м}$ . Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

4. Один моль одноатомного идеального газа участвует в цикле 1-2-3-1 (см. рис.), участок 1-2 – дуга окружности с центром в точке 4. Считать заданными давление  $P_1$  и объём  $V_1$ .

- 1) Какое количество  $Q$  теплоты подведено к газу в процессе расширения?
- 2) Найдите работу  $A$  газа за цикл.
- 3) Найдите КПД  $\eta$  цикла.



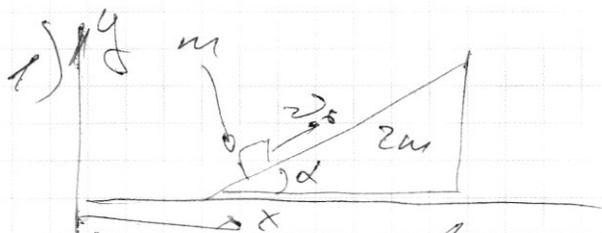
5. Заряд  $Q > 0$  однородно распределен по сфере радиуса  $R$ . В первом опыте на расстоянии  $3R$  от центра сферы помещают небольшой по размерам шарик с зарядом  $q > 0$ .

- 1) Найдите силу  $F_1$ , действующую на заряженный шарик.

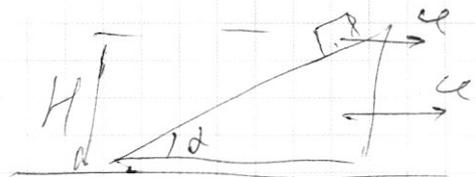
Во втором опыте заряд  $q$  однородно распределяют по стержню длины  $R$ , стержень помещают на прямой, проходящей через центр заряженной сферы. Ближайшая к центру сферы точка стержня находится на расстоянии  $3R$  от центра.

- 2) Найдите силу  $F_2$ , с которой заряженный стержень действует на заряженную сферу.

Все силы, кроме кулоновских, считайте пренебрежимо малыми. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона  $k$ . Явлениями поляризации пренебрегите.



22



Максимальная высота будет достигнута, в тот момент, когда ~~клин~~ <sup>масса</sup> перестанет подниматься  $\rightarrow v_{0y} = 0$   
скорость по оси x скорость иллена вдоль оси x

$$v_{0y} = (v_{0x} - v_{kx}) \cdot \tan \alpha \Rightarrow v_{0x} = v_{kx}$$

З-н сохр. импульса вдоль ос:

$$mv_0 \cdot \cos \alpha = 3mu \Rightarrow u = v_{0x} = v_{kx} = \frac{v_0 \cos \alpha}{3}$$

З-н сохр. энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_{0x}^2}{2} + \frac{2mv_{kx}^2}{2} + mgH$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}{2 \cdot g} + \frac{2m \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}{g} + mgH$$

$$v_0^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos^2 \alpha}{18} - \frac{1}{9} \right) = gH$$

$$v_0^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos^2 \alpha}{18} - \frac{\cos^2 \alpha}{9} \right) = gH$$

$$v_0^2 \cdot \frac{8}{18} = gH$$

ответ

$$v_0 = \sqrt{3gH} = \sqrt{3 \cdot 10 \cdot 0,2} = \sqrt{6}$$

$$v_0^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{0,36}{18} - \frac{0,36}{9} \right) = gH$$

$$v_0^2 \left( \frac{1}{2} - 0,02 - 0,04 \right) = gH$$

$$v_0^2 = \frac{gH}{0,44} = \frac{10 \cdot 0,2}{0,44} = \frac{2}{0,44} = \frac{1}{0,22} = \frac{100}{22} = \frac{50}{11}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{50}{11}}$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$H + v^2/2 + \frac{gt^2}{2} = 0$$

$$D = v^2 + 2gH$$

$$t_1 = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2gH}}{g}$$

$$H = \sqrt{2gH}T - \frac{gT^2}{2}$$

$$H = \frac{gT^2}{2} = \frac{10 \cdot 9}{8} = 11.25$$

$$mv_0^2 = \frac{mV^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

$$v_0^2 = V^2 + v^2$$

$$mv_0 \cos \alpha = 3m \cdot u$$

$$u = \frac{v_0 \cos \alpha}{3}$$

$$mv_0^2 = \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{18} + \frac{2mv_0^2 \cos^2 \alpha}{9} + 18gH$$

$$v_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos^2 \alpha}{18} - \frac{\cos^2 \alpha}{9} \right) = gH$$

$$v_0 = \sqrt{2gH}$$

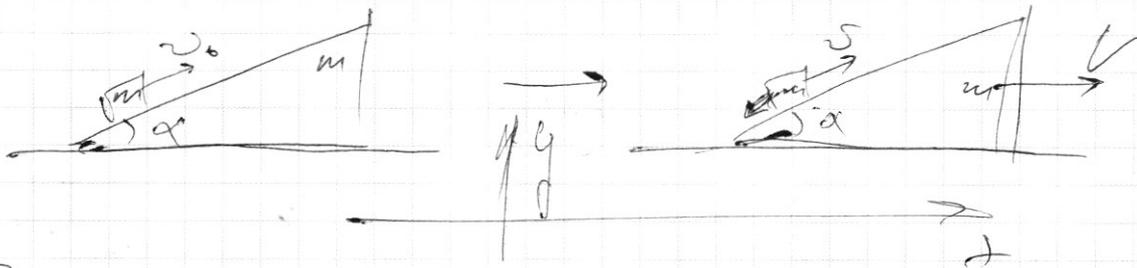
$$H = -v^2/2 + \frac{gt^2}{2}$$

$$D = v^2 + 2gH$$

$$t_2 = \frac{v + \sqrt{v^2 + 2gH}}{g} = \frac{100}{27}$$

2) 3-н. сопр. импульса вдоль  $Ox$ :

$$mv_0 \cos \alpha =$$



3-н. сопр. импульса вдоль  $Ox$ :

$$mv_0 \cos \alpha = mv \cos \alpha + mV$$

$$v_0 \cos \alpha = v \cos \alpha + V \Rightarrow V = (v_0 - v) \cos \alpha$$

3-н. сопр. энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mV^2}{2}$$

$$v_0^2 = v^2 + V^2 \Rightarrow V^2 = v_0^2 - v^2 = (v_0 - v)(v_0 + v)$$

$$V = \frac{(v_0 - v)(v_0 + v)}{(v_0 - v) \cos \alpha} = \frac{v_0 + v}{\cos \alpha}$$

$$v_0 \cos^2 \alpha = v \cos^2 \alpha + v_0 + v$$

$$v = v_0 \frac{\cos^2 \alpha - 1}{1 + \cos^2 \alpha} \Rightarrow V = v_0 \frac{1 + \frac{\cos^2 \alpha - 1}{1 + \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = v_0 \frac{1 + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha (1 + \cos^2 \alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = v_0 \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{30}{11}} \cdot \frac{2 \cdot 0,6}{1 + 0,36} = \sqrt{\frac{50}{11}} \cdot \frac{120}{136} = \sqrt{\frac{50}{11}} \cdot \frac{60}{68} = \sqrt{\frac{50}{11}} \cdot \frac{30}{34}$$

Ответ:  $v_0 = \sqrt{\frac{50}{11}}$   
 $V = \sqrt{\frac{50}{11}} \cdot \frac{15}{17}$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$v_0^2 = V^2 + v^2$ 
 $N = mg \cdot \cos 45^\circ = m \frac{v^2}{R}$

$v_0 \cdot \cos \alpha = V + v \cdot \cos \alpha$

$N = m \frac{v^2}{R} = mg \cdot \cos 45^\circ$

$V = (v_0 + v) \cos \alpha$

$V^2 = (v_0 - v)(v_0 + v)$

$v_0 \cdot \cos^2 \alpha = v_0 + v + v \cdot \cos^2 \alpha$

$\mu N = mg$

$v = v_0 \frac{\cos^2 \alpha - \mu}{1 + \cos^2 \alpha} = \frac{0,36 - \mu}{1 + 0,36} = \frac{-0,64}{1,36} v_0 = -v_0 \frac{64}{136} = \frac{32}{68} v_0 = \frac{8}{17} v_0$

$\mu \frac{v^2}{R} = mg \cdot \cos 45^\circ (1 + \mu)$

$v^2 = \frac{15^2 v_0^2}{17^2} + \frac{16^2 v_0^2}{17^2}$

$17 = 15 + 16$

$\mu N = mg$

$\frac{v}{R} = \frac{2mg}{m} = \frac{2g}{R}$

$v = \sqrt{\frac{gR \cdot \cos 45^\circ (1 + \mu)}{\mu}}$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

27

1) Так как все осколки летят с одинаковой скоростью во всех направлениях  $\Rightarrow$  в момент взрыва скорость центра масс была 0, что можно показать из 3-на сохр. импульса: вдоль любой оси найдутся два осколка, летящих в противоположные направления с одинаковой скоростью, для ~~скорости~~<sup>импульса</sup> вдоль данной оси равен 0.

Таким образом фидерверга была запущена вертикально вверх.



$$H = v_0 T - \frac{gT^2}{2}$$

3-на сохр. энергии:

$$mgH = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gH}$$

Решим отн.

$$(\sqrt{H})^2 - \sqrt{H} \cdot \sqrt{2g} T + \frac{gT^2}{2} = 0$$

$$2\sqrt{H} = \sqrt{2g} T - \sqrt{2g} T = 0$$

$$\sqrt{H} = \frac{\sqrt{2g} T}{2} = \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot T \Rightarrow H = \frac{gT^2}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ м.}$$

2) Так как скорость разлета всех осколков одинакова  $\Rightarrow K = N \cdot \frac{m}{2} \cdot v^2$

кол-во осколков  $\downarrow$   
 масса каждого осколка  $\downarrow$   
 скорость каждого осколка

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

Решим в общем виде для времени падения  $t$   
 ур-ние:

$$H = v_y t + \frac{g t^2}{2}$$

$$D = v_y^2 + 2gH$$

$$t = \frac{-v_y \pm \sqrt{v_y^2 + 2gH}}{g} \Rightarrow t = t_{\min} \text{ при } v_y = v$$

$$t = t_{\max} \text{ при } v_y = -v$$

Первый осколок упадет на землю через  $t_{\min}$

$$t_{\min} = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2gH}}{g}$$

$$= \frac{-\sqrt{\frac{2K}{m}} + \sqrt{\frac{2K}{m} + 2gH}}{g}$$

$$= \frac{-\sqrt{\frac{2 \cdot 1800}{7}} + \sqrt{\frac{2 \cdot 1800}{7} + 2 \cdot 10 \cdot 45}}{10}$$

$$= \frac{-60 + 30\sqrt{5}}{10} = -6 + 3\sqrt{5} = 3(\sqrt{5} - 2) \text{ c}$$

$$T = t_{\max} - t_{\min}$$

$$= \frac{v + \sqrt{v^2 + 2gH}}{g} - \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2gH}}{g} = \frac{2v}{g} = \frac{2\sqrt{\frac{2K}{m}}}{g}$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1800}{7}}}{10} = 12 \text{ c}$$

$$= \frac{-60 + \sqrt{3600 + 900}}{10} - \frac{-60 + \sqrt{4500}}{10} = \frac{-60 + \sqrt{4500}}{10}$$

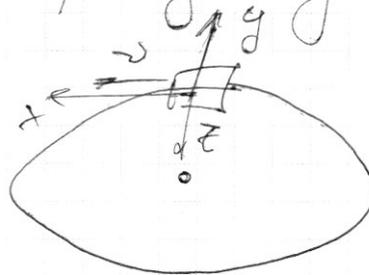
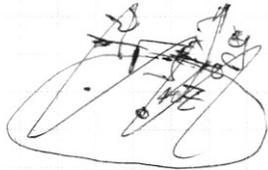
Ответ:  $H = 45 \text{ м}$   
 $T = 12 \text{ c}$   
 $t_{\min} = 3(\sqrt{5} - 2) \text{ c}$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) Так как модель движется равномерно  $\Rightarrow$   
в направлении движения  $a_x = 0$ .

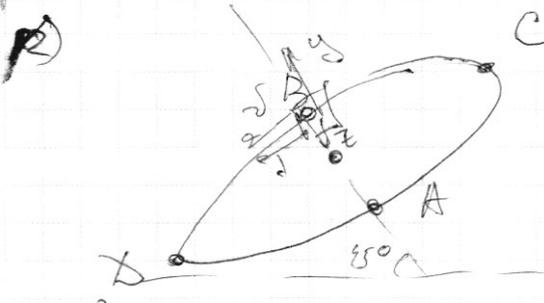
Так как модель не связывает с поверхностью,  
по которой движется  $\Rightarrow a_y = 0$

Значит ускорение присутствует только вдоль  $OZ$



$$d = a_z = \frac{v^2}{R} = \frac{20^2}{100} = 4 \text{ м/с}^2 = 0.4g$$

~~Так как сила трения не действует в плоскости, перп.  
силе нормальной реакции опоры, а в этой плоскости  
ускорение модели равно 0  $\Rightarrow \mu \vec{F}_{тр} = -mg$~~



$$m \frac{v^2}{R} = N + mg \cos \alpha$$

В течение движения угол между  
вектором  $\vec{N}$  и  $m\vec{g}$  изменяется  
от  $90^\circ$  (в т. А и В) до  $45^\circ$   
(в т. С), а также от  $90^\circ$  до  $135^\circ$   
(в т. D)

$$F_{тр} = \mu N = \mu (m \frac{v^2}{R} - mg \cos \alpha) \leq \mu N$$

$$N = \frac{mv^2}{R} - mg \cdot \cos \alpha$$

$$\tan 45 = 1$$

$$\tan(\alpha = 45) > 1$$

$$\mu \frac{mv^2}{R} - \mu mg \cdot \cos \alpha = mg \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{\mu mv^2}{R} = \frac{mv^2}{R} = g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

$$v = \sqrt{\frac{gR(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\mu}}$$

$$\sqrt{1,64} = \frac{164}{100} = \frac{4,41}{100}$$

$$\frac{100}{8} = 12,5$$

$$\frac{d(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{d\alpha} = \cos \alpha - \mu \sin \alpha = 0$$

$$\frac{2\sqrt{49}}{10}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + 1$$

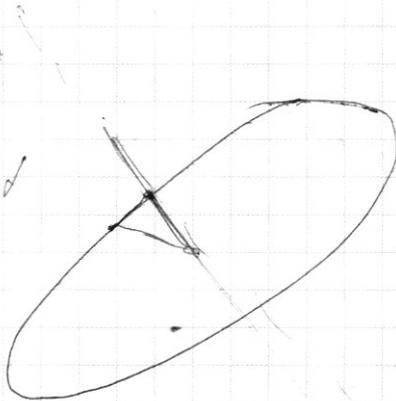
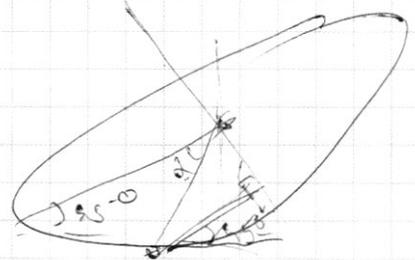
$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\mu^2} + 1$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{\mu^2}{1 + \mu^2}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} + \frac{\mu^2}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \frac{1 + \mu^2}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \sqrt{1 + \mu^2}$$

$$\frac{2}{10,9} \sqrt{49} = \frac{10\sqrt{49}}{4}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$mg \cdot \sin \alpha \leq \mu mg \frac{v^2}{R} - mg \cos \alpha$$

$$\frac{v^2}{R} \geq g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

$$v^2 \geq \frac{gR}{\mu} (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \text{ для любого } \alpha$$

Найдём максимум  $f(\alpha) = \sin \alpha + \mu \cos \alpha$

$$\frac{df}{d\alpha} = \cos \alpha - \mu \sin \alpha = 0 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\mu} = 1,25 \xrightarrow{90^\circ} \alpha > 45^\circ \text{ и такая точка существует}$$

Проверим максималность этой точки:

$$\frac{d^2f}{d\alpha^2} = -\sin \alpha - \mu \cos \alpha$$

$$\text{при } \alpha > 45^\circ \quad \frac{d^2f}{d\alpha^2} < 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{\mu}\right) - \text{максимум}$$

$$v^2 \geq \frac{gR}{\mu} \left( \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \right)$$

$$v \geq \sqrt{\frac{gR}{\mu} \sqrt{1+\mu^2}}$$

$$v \geq \sqrt{\frac{10 \cdot 1}{0,8} \sqrt{1+0,8^2}}$$

$$v \geq \frac{1}{2} \sqrt{10141}$$

Ответ:  $a = 2g = 20 \frac{m}{c^2}$

$$v_{min} = \frac{1}{2} \sqrt{10141} \frac{m}{c}$$

$$\left(\frac{V}{V_1} - 1\right)^2 + \left(\frac{P}{P_1} - 2\right)^2 = 1$$

$$Q = \frac{\bar{\delta}}{2} \int \delta T + \int p dV \quad \frac{P}{P_1}$$

~~$$Q = \frac{\bar{\delta}}{2} \int \delta T$$~~

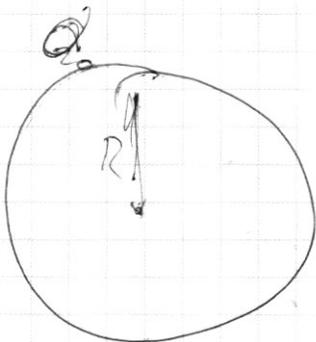
$$Q = \frac{\bar{\delta}}{2} (4P_1 V_1 - P_1 V_1) +$$

$$\frac{PV}{P_1 V_1} = \left( \frac{PV}{P_1 V_1} - \frac{\pi PV}{4 P_1 V_1} \right) = \frac{4PV + 4PV - \pi PV}{4 P_1 V_1}$$

$$PV + PV - \frac{\pi PV}{4} = 8'$$

$$\frac{\Delta_{max}}{Q}$$

$$\eta = \frac{T_{max} - T_{min}}{T_{max}}$$



• a

$x^{-2}$

$$\frac{d\left(-\frac{1}{x}\right)}{dx} = \frac{1}{x^2}$$

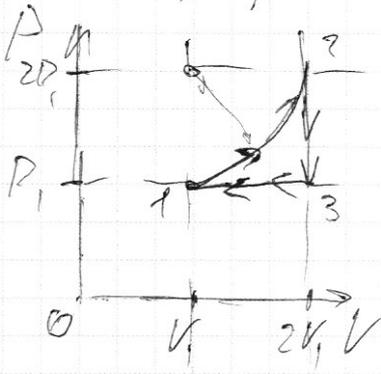
$$\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$x^{-1}$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) Q = \int \frac{1}{2} dR_{\kappa} T + \int p dV$$

Построим  
~~Найдем~~ график  $P(V)$



Найдем  $\int p dV$  как площадь в  
под графиком

Процесс расширения — процесс 1-2

$$Q = \frac{1}{2} (4P_1V_1 - P_1V_1) + P_1V_1 + P_1V_1 - \frac{\pi P_1V_1}{4} = \frac{3}{2} P_1V_1 + 2P_1V_1 - \frac{\pi P_1V_1}{4} = \frac{26 - \pi}{4} P_1V_1$$

2)  $A_{\text{возв}} = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-1}$  Найдем работу как площадь в  
под графиком, с учетом знака

$$A_{1-2} = 2P_1V_1 - \frac{\pi}{4}P_1V_1$$

$$A_{2-3} = 0$$

$$A_{3-1} = -P_1V_1$$

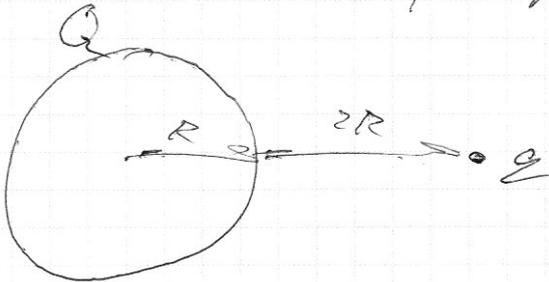
$$\Rightarrow A_{\text{возв}} = P_1V_1 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = P_1V_1 \left(\frac{4-\pi}{4}\right)$$

$$3) \quad \eta = \frac{A_{\text{полза}}}{A_{\text{зага}}} = \frac{P_1 V_1 \frac{4-\pi}{4}}{2P_1 V_1 \frac{\pi}{4}} = \frac{4-\pi}{8-\pi}$$

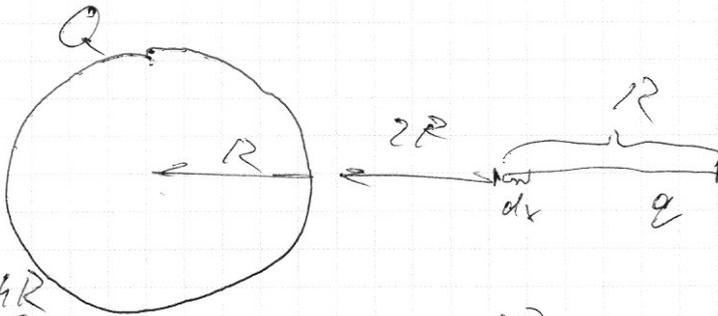
$A_{\text{зага}} > 0$

~ 5

б) Если все заряды равномерно распределены по поверхности в центре сферы  $\Rightarrow F_1 = k \frac{Q \cdot q}{9R^2}$



в)



$$\lambda = \frac{q}{R}$$

$$F_2 = \int_{3R}^{4R} k \frac{Q \lambda dx}{(3R+x)^2} = kQ\lambda \int_{3R}^{4R} \frac{dx}{x^2} = kQ\lambda \cdot \frac{1}{x} \Big|_{3R}^{4R} = -\frac{kQ\lambda}{4R} + \frac{kQ\lambda}{3R}$$

$$= \frac{kQ\lambda}{12R} = \frac{kQq}{12R^2}$$

Ответ:  $F_1 = k \frac{Qq}{9R^2}$

$$F_2 = \frac{kQq}{12R^2}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)

