Олимпиада «Физтех» по физике 2022

Класс 10

Вариант 10-02

Шифр

(заполняется секретарём)

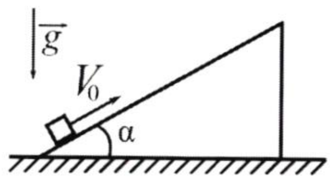
1. Фейерверк массой $m = 1$ кг стартует после мгновенной работы двигателя с горизонтальной поверхности, летит вертикально вверх и через $T = 3$ с разрывается в высшей точке траектории на множество осколков, которые летят во всевозможных направлениях с одинаковыми по величине скоростями. Суммарная кинетическая энергия осколков сразу после взрыва $K = 1800$ Дж. ~~На землю осколки падают в течение $\tau = 10$ с.~~

1) На какой высоте H взорвался фейерверк?

2) В течение какого промежутка времени τ осколки будут падать на землю?

Ускорение свободного падения g=10 м/с^2. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.

2. На гладкой горизонтальной поверхности расположен клин. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтом угол α такой, что $\cos\alpha = 0,6$. Шайбе, находящейся на наклонной поверхности клина, сообщают некоторую начальную скорость V_0 (см. рис.), далее шайба безотрывно скользит по клину и поднимается на максимальную высоту $H = 0,2$ м. Масса клина в два раз больше массы шайбы. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.



1) Найдите начальную скорость V_0 шайбы. $M_к = 2m_ш$

2) Найдите скорость V клина, в тот момент, когда шайба вернется в точку старта на клине. Массы шайбы и клина одинаковы.

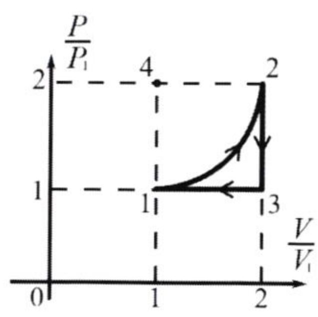
$M_к = m_ш$

3. По внутренней поверхности проволочной сферы равномерно движется модель автомобиля. Движение происходит в горизонтальной плоскости большого круга. Сила, с которой модель действует на сферу, в два раза больше силы тяжести, действующей на модель. Модель приводится в движение двигателем. Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

1) Найдите ускорение a модели.

2) Вычислите минимальную допустимую скорость V_{MIN} равномерного движения модели по окружности в плоскости большого круга, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45^0$. Коэффициент трения скольжения шин по поверхности сферы $\mu = 0,8$, радиус сферы $R = 1$ м. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

4. Один моль одноатомного идеального газа участвует в цикле 1-2-3-1 (см. рис.), участок 1–2 – дуга окружности с центром в точке 4. Считать заданными давление P_1 и объём V_1.



1) Какое количество Q теплоты подведено к газу в процессе расширения?

2) Найдите работу A газа за цикл.

3) Найдите КПД η цикла.

5. Заряд Q >0 однородно распределен по сфере радиуса R. В первом опыте на расстоянии $3R$ от центра сферы помещают небольшой по размерам шарик с зарядом q >0.

1) Найдите силу F_1, действующую на заряженный шарик.

Во втором опыте заряд q однородно распределяют по стержню длины R, стержень помещают на прямой, проходящей через центр заряженной сферы. Ближайшая к центру сферы точка стержня находится на расстоянии $3R$ от центра.

2) Найдите силу F_2, с которой заряженный стержень действует на заряженную сферу.

Все силы, кроме кулоновских, считайте пренебрежимо малыми. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона k. Явлениями поляризации пренебрегите.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

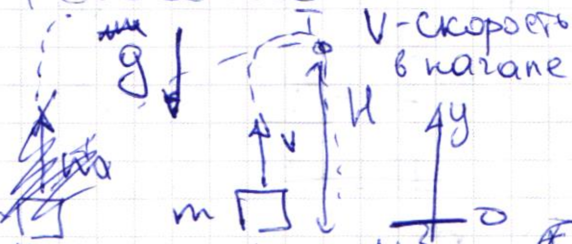
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Здесь и везде в решениях данные O_x, O_y – ось x, ось y.

Дано: $m = 1$ кг; $T = 3$ с; $K = 1800$ Дж.
$\tau = 10$ с; $g = 10$ м/с²

H – ?; τ_1 – ?

Решение:



1) $K = \sum_i^N \frac{m_{0i} V_0^2}{2} \iff K = \frac{V_0^2}{2} \sum_i^N m_{0i} \iff K = \frac{V_0^2}{2} \cdot m \Rightarrow$ (*)

масса всех осколков = массе снаряда.

m_{0i} – масса осколка (какого-то); V_0 – его скорость

N – кол-во осколков.

(*) $\Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{2K}{m}}$

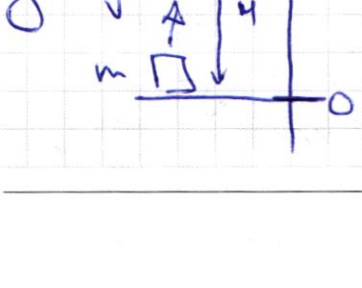
~~2) т.к. снаряд взрывается, то взрыва → 0 ⇒~~
~~⇒ ЗСИ кроме взрыва~~
~~(закон сохранения импульса работает)~~

3) Заметим, что T – это время, когда снаряд достигает высшей точки + он летел вертикально вверх ⇒ в момент до взрыва его скорость стала нулём.

4) Запишем уравнения движения на ось y:

$V_y(t) = V_y - g t$

ускорение свободного падения; начальная скорость; время с начала броска; скорость от времени с начала броска.



Так же $y(t) = Vt - \frac{gt^2}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

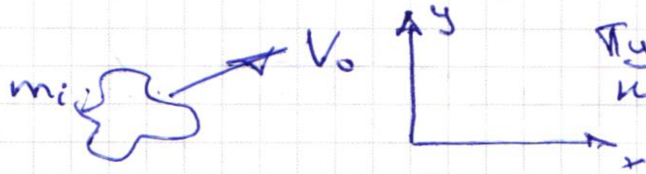
4) Т.к. в момент времени T скорость ~~груза~~ снаряда ноль, ~~то~~ он находится на высоте H, то верно то, что $\begin{cases} V - gT = 0 \;\; |\cdot T \\ H = VT - \frac{gT^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} VT = gT^2 \;\; (1) \\ H = VT - \frac{gT^2}{2} \;\; (2) \end{cases}$

Подставим (1) в (2): $H = gT^2 - \frac{gT^2}{2} = \frac{gT^2}{2}$

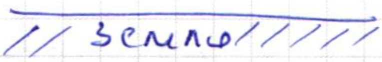
$$\underline{\underline{H = \frac{gT^2}{2}}} = \frac{10\,м/с^2 \cdot (3с)^2}{2} = \frac{\cancel{10}^{\,5} \cdot 9}{\cancel{2}} \cdot м = \underline{\underline{45м}}$$

5) Вспомним п1. Там выводится то, что скорость осколков (которая у всех по условию равна) выглядит, как $V_0 = \sqrt{\frac{2K}{m}}$

Рассмотрим какой-то осколок:

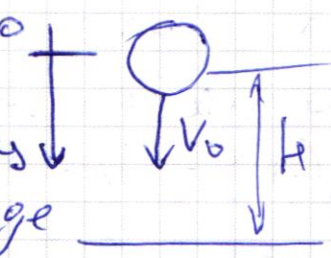


Пусть его проекции на O_x и O_y — V_x и V_y



Осколок упадёт быстрее если его V_y будет по модулю наибольшим (но направлена вниз) => Первый упавший осколок, это тот, у которого вся V_0 направлена вниз.

6) Рассмотрим этот осколок:



Теперь для удобства направим ось y вниз, её ноль там, где осколок в начале. Напишем уравнение движения по O_y для него: $y(t) = V_0 t + \frac{gt^2}{2}$ — ~~скорость~~ координата от времени после взрыва.

$V_0(t) = V_0 + gt$ — скорость осколка от времени после взрыва.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Дано:
~~$\cos\alpha = 0,6$~~
~~$H = 0,2$ м~~
~~$g = 10$ м/с²~~

7) заметим, что когда время τ_1 осколок на земле, т.е. он преодолел расстояние H, т.е. его координата

$$y(\tau_1) = H = V_0\tau_1 + \frac{g\tau_1^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g\tau_1^2}{2} + V_0\tau_1 - H = 0; \quad D = V_0^2 + 4\cdot\frac{g}{2}\cdot H =$$

$$= V_0^2 + 2gH = \frac{2k}{m} + 2g\cdot\frac{gT^2}{2} = \frac{2k}{m} + g^2T^2$$

$$\tau_1 = \frac{V_0 \pm \sqrt{V_0^2 - 2gH}}{g} = \frac{\sqrt{\frac{2k}{m}} \pm \sqrt{\frac{2k}{m} + g^2T^2}}{g}$$

1 в. $\tau_1 = \frac{\sqrt{\frac{2k}{m}} - \sqrt{\frac{2k}{m} + g^2T^2}}{g} < 0$ — ш (не может быть меньше 0)

2 в. $\tau_1 = \frac{\sqrt{\frac{2k}{m}} + \sqrt{\frac{2k}{m} + g^2T^2}}{g}$ — + (считаем его)

$$\tau_1 = \frac{\sqrt{\frac{2k}{m}} + \sqrt{\frac{2k}{m} + g^2T^2}}{g} = \frac{\sqrt{\frac{2\cdot1800}{1}} + \sqrt{\frac{2\cdot1800}{1} + 10^2\cdot3^2}}{10}\,с =$$

$$= \frac{\sqrt{2\cdot9\cdot2\cdot100} + \sqrt{2\cdot9\cdot2\cdot100 + 10^2\cdot3^2}}{10}\,с = \frac{2\cdot3\cdot10 + \sqrt{3600+900}}{10}\,с =$$

$4\cdot9\cdot100 = 3600$; $9\cdot100 = 900$; $\sqrt{(36+9)\cdot100}$

$$= \frac{60 + 10\sqrt{45}}{10}\,с = (6 + \sqrt{9\cdot5})\,с = (6 + 3\sqrt{5})\,с =$$

$$\approx (6 + 3\cdot2,23)\,с = (6 + 6,69)\,с = \underline{12,69\,с}$$

$\sqrt{5} = 2,23$

$2,4 \times 2,4 = 5,76$; $2,3 \times 2,3 = 5,29$; $2,2 \times 2,2 = 4,84$; $2,25 \times 2,25 = 5,0625$; $2,24 \times 2,24 = 5,0176$; $2,23 \times 2,23 = 4,9729$; $2,23 \times 3 = 6,69$

Ответ: ① $H = \frac{gT^2}{2} = 45$ м

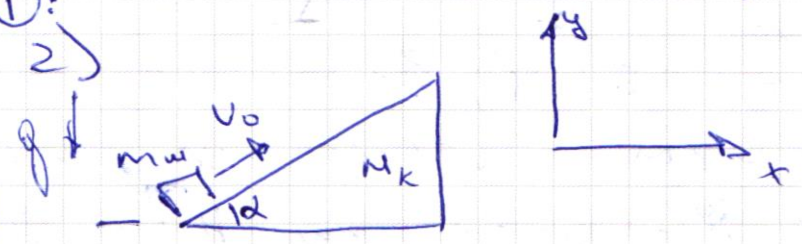
② $\tau_1 = \frac{\sqrt{\frac{2k}{m}} + \sqrt{\frac{2k}{m} + g^2T^2}}{g} \approx 12,69$ с

Доп. Сокращения по задаче
№2 ЗСИ – закон сохранения импульса.
ЗСЭ – закон сохранения энергии

Дано: $\cos\alpha = 0{,}6$
$H = 0{,}2$ м; $g = 10$ м/с²
1) $M_к = 2m_ш$
2) $M_к = m_ш$

Найти: ① V_0 – ?
② V – ?

Решение:
1) $M_к$ – масса клина
$m_ш$ – масса шайбы.
①:
2)



3) ~~Когда~~ шайба поднимается на максимальную высоту, это значит, что относительно клина она не движется.
Так же по оси O_x не действует внешних сил на систему клин+шайба => в на O_x работает ЗСИ. Запишем его:
~~(закон сохранения импульса)~~
ЗСИ на O_x для сис-мы клин-шайба
$m_ш \cdot V_{0x} = (m_ш + M_к) U$ <=> ⊛
скорость когда шайба на max высоте.
т.к. шайба не движется относ. клина => шайба и клин движутся „вместе" => их скорость направлена по O_x (клин не отрывается) и обозначена за U.
в первом пункте $M_к = 2m_ш$
⊛ <=> $m_ш \cdot V_0 \cos\alpha = (m_ш + 2m_ш) U$
$V_0 \cos\alpha = 3U \Rightarrow U = \frac{V_0 \cos\alpha}{3}$
4) Теперь запишем ЗСЭ из состояния ① (толкнули шайбу) в состояние ② (~~шайба~~ шайба на max высоте):

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$\to$ ЗСЭ $(1\to2)$: $\frac{m_ш V_0^2}{2} + E_{пт} = \frac{(m_ш + M_к)U^2}{2} + E_{пт} + m_ш g H$

(Подставим $2m_ш = M_к$ и $U = \frac{V_0\cos\alpha}{3}$)

$\Downarrow$

$$\frac{m_ш V_0^2}{2} = \underbrace{(m_ш + 2m_ш)}_{3m_ш}\frac{\frac{V_0^2\cos^2\alpha}{9}}{2} + m_ш g H \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_0^2}{2} = \frac{3\cdot V_0^2\cos^2\alpha}{2\cdot 9} + gH \Leftrightarrow V_0^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos^2\alpha}{2\cdot 3}\right) = gH$$

$$\frac{V_0^2}{2}\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{3}\right) = gH \Leftrightarrow V_0^2 = \frac{2gH}{\left(1-\frac{\cos^2\alpha}{3}\right)} \Leftrightarrow V_0 = \sqrt{\frac{2gH}{1-\frac{\cos^2\alpha}{3}}}$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{2gH}{1-\frac{\cos^2\alpha}{3}}} = \sqrt{\frac{2\cdot10\cdot0{,}2}{1-\frac{3^2}{3\cdot5^2}}}\ м/с = \sqrt{\frac{2\cdot2}{1-\frac{3}{5^2}}}\ м/с = \sqrt{\frac{4\cdot5^2}{22}}\ м/с =$$

$0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

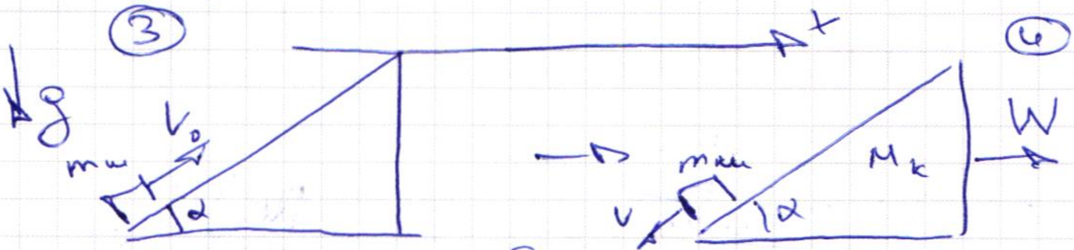
$$= 2\cdot5\frac{\sqrt{22}}{22}\ м/с \approx \underbrace{2\cdot5}_{10}\cdot\frac{4{,}69}{22}\ м/с = \frac{23{,}45}{11}\ м/с =$$

$\sqrt{22} = 4{,}6$

$$= \frac{23{,}45}{11}\ м/с \approx 2{,}131817\ м/с$$

№2

~~Ответ~~ ②: $M_к = m_ш$



сразу проекция на O_x

W – скорость клина, когд шайба вернулась.

5) Т.к. на сис-му клин+шайба не действуют внешние силы по O_x, то можем записать на эту ось ЗСИ: $m_ш \cdot V_0\cos\alpha = -m_ш V\cos\alpha + M_к W \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m_ш V_0\cos\alpha = -m_ш V\cos\alpha + m_ш W$

~~$\Leftrightarrow V_0\cos\alpha = W - V$~~ $W = V_0\cos\alpha + V\cos\alpha = (V_0+V)\cos\alpha$

6) Теперь запишем ЗСЭ из ③ → ④: $\frac{m_ш V_0^2}{2} + E_п = \frac{m_ш V^2}{2} + \frac{M_к W^2}{2} + E_п \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{V_0^2}{2} = \frac{V^2}{2} + \frac{W^2}{2} \Leftrightarrow \frac{V_0^2}{\cancel{2}} = V^2 + (V_0+V)^2\cos^2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V_0^2 = V^2 + V_0^2\cos^2\alpha + 2V_0V\cos^2\alpha + V^2\cos^2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V^2(1+\cos^2\alpha) + V\cdot 2V_0\cos^2\alpha + V_0^2(\cos^2\alpha - 1) = 0$

$D = ((2\cos^2\alpha)^2 - 4\cdot(1+\cos^2\alpha)(\cos^2\alpha - 1))V_0^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D = (4\cos^4\alpha + 4(1+\cos^2\alpha)(1-\cos^2\alpha))V_0^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D = (4\cos^4\alpha + 4\cdot(\cancel{1} - \cos^4\alpha))V_0^2 = (4\cos^4\alpha + 4 - 4\cos^4\alpha)V_0^2 = 4V_0^2 \Rightarrow V = \frac{-2V_0\cos^2\alpha \pm 2V_0}{2(1+\cos^2\alpha)}$

Т.к. мы берём $V>0$, и при записи уравнений

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

Используем проекции $\Rightarrow V = -\frac{2V_0\cos^2\alpha - 2V_0}{2(1+\cos^2\alpha)}$ - не подходит.

$\Rightarrow V = \frac{2V_0 - 2V_0\cos^2\alpha}{2(1+\cos^2\alpha)} = V_0\frac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$

Осталось посчитать V_0.

7) Аналогично ① можем записать ЗСИ и ЗСЭ для момента толчка и ~~...~~ момента когда шайба на H_{max}.

$$\begin{cases} \text{ЗСИ на } O_x: \ m_ш V_0\cos\alpha = (m_ш + M_к)U' \\ \text{ЗСЭ}: \ \frac{m_ш V_0^2}{2} + E_{вт} = \frac{(m_ш+M_к)U'^2}{2} + E_{вт} + m_ш gH \end{cases}$$

Аналогично U.

$+ m_ш = M_к$

$\Leftrightarrow \frac{V_0\cos\alpha}{2} = U'$

$\frac{V_0^2}{2} = \frac{2\cdot U'^2}{2} + gH \Leftrightarrow \frac{V_0^2}{2} = \left(\frac{V_0\cos\alpha}{2}\right)^2 + gH \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{V_0^2}{2} = \frac{V_0^2\cos^2\alpha}{4} + gH \,|\cdot 4 \Leftrightarrow 2V_0^2 = V_0^2\cos^2\alpha + 4gH \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V_0^2(2-\cos^2\alpha) = 4gH.$

$V_0 = \sqrt{\frac{4gH}{2-\cos^2\alpha}}$ — подставляем это в $V = V_0\frac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$

И получаем, что

$V = \sqrt{\frac{4gH}{2-\cos^2\alpha}}\cdot\frac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{4\cdot 10\cdot 0{,}2}{2-\frac{3^2}{5^2}}}\cdot\frac{1-\frac{3^2}{5^2}}{1+\frac{3^2}{5^2}}$ м/с $=$

$$= 2\sqrt{\frac{2\cdot 5^2}{\underbrace{50-9}_{41}}}\;\frac{25-9}{25+9}\ \text{м/с} = 2\cdot\frac{16}{34}\cdot 5\sqrt{\frac{2}{41}}\ \text{м/с} =$$

$$= \frac{16}{17}\cdot 5\,\frac{\sqrt{82}}{41}\ \text{м/с} \approx \frac{16}{17}\cdot 5\cdot\frac{9{,}05}{41}\ \text{м/с} =$$

$$= \frac{724}{887}\ \text{м/с} = \approx 0{,}81555\ \text{м/с}$$

$25-9=16$; $25+9=34$

$9{,}4\cdot 9{,}4 = 88{,}36$; $9{,}2\cdot 9{,}2 = 84{,}64$; $9{,}1\cdot 9{,}1 = 82{,}81$; $9{,}09\cdot 9{,}09 = 82{,}6281$

$9{,}05\cdot 9{,}05 = 81{,}9025$; $9{,}06\cdot 9{,}06 = 82{,}0836$

$9{,}05\cdot 5 = 45{,}25$; $45{,}25\cdot 16 = 724{,}00$; $41\cdot 17 = 887$

$7240 : 887 = 0{,}81555$

Ответ:

① : $V_0 = \sqrt{\dfrac{2gH}{1-\frac{\cos^2\alpha}{3}}} \approx 2{,}131817\ \text{м/с}$

② $V = \sqrt{\dfrac{4gH}{2-\cos^2\alpha}}\cdot 2\cdot\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha} \approx 0{,}81555\ \text{м/с}$

N3. Доп. сокращение:

II ЗН — второй закон Ньютона.

Дано: $R = 1$ м

$\mu = 0{,}8$; $g = 10\ \text{м/с}^2$

$|\vec F_{тр} + \vec N| = 2mg$

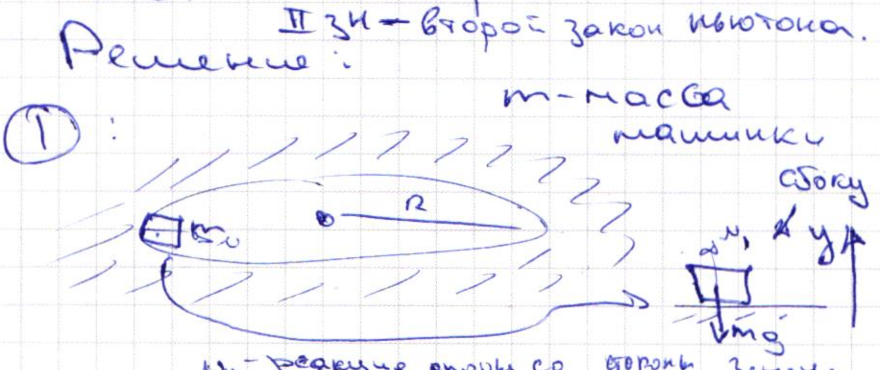
① $\angle\alpha = 0°$

② : $\alpha = 45°$

1) a - ? ; V_{min} - ?

Решение:

① :



N - реакция опоры со стороны Земли.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

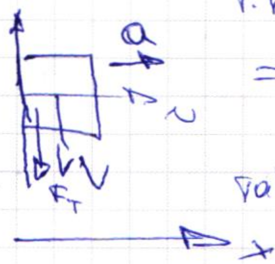
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

сверху:



Т.к. движется равномерно =>

=> $a_\tau = 0$ (есть $F_т$ - сила тяги моторов)

тангенсальное ускорение

$F_{тр}$ - сила трения

N - реакция опоры со стороны (сферы) стенки.

Т.к. тело движется, то $F_{тр} = \mu N_1$ =

кравчбы лист

Запишем

II з Н для тела на O_x: $N = ma$

на O_y: $N_1 = mg \Rightarrow F_{тр} = \mu mg$

По условию: $|\vec{F}_{тр} + \vec{N}| = 2mg$

$$\Updownarrow$$

$$(\mu mg)^2 + (ma)^2 = (2mg)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu^2 g^2 + a^2 = 4g^2 \Leftrightarrow a^2 = g^2(4-\mu^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = g\sqrt{4-\mu^2} = g\sqrt{4 - \frac{4}{5^2}} = g\sqrt{4\left(1-\frac{1}{5^2}\right)} =$$

$$= g\cdot 2\sqrt{\frac{5^2-1}{5^2}} = g\frac{2}{5}\sqrt{\underset{4\cdot 6}{24}} = g\frac{4}{5}\sqrt{6} \approx$$

$\sqrt{6} \approx 2,44$

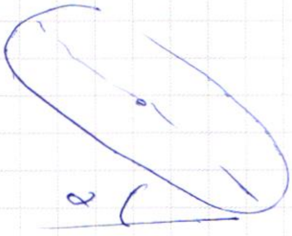
$$\approx g\cdot\frac{4}{5}\cdot 2,44 = g\cdot 1,952 =$$

$$= 10\cdot 1,952 \text{ м/с}^2 = 19,52 \text{ м/с}^2$$

$2,44 \cdot 4 = 9,76$; $2,4 \cdot 2,4 = 5,76$; $2,5 \cdot 2,5 = 6,25$; $2,45 \cdot 2,45 = 6,0025$; $2,44 \cdot 2,44 = 5,9536$; $9,76 : 5 = 1,952$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

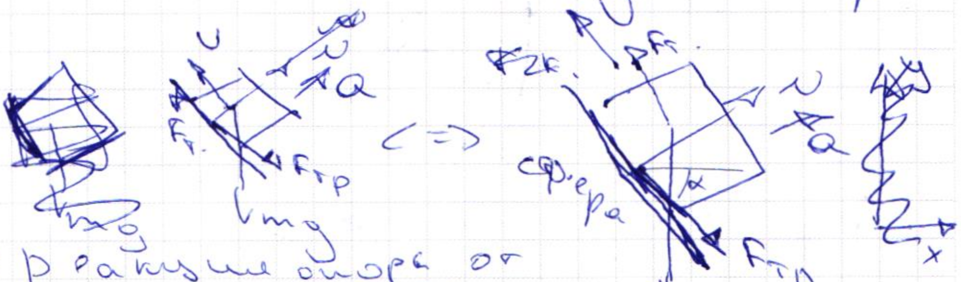
№3.



Нам нужно найти V_{min} =>
=> моделька недолжна отрываться от сферы.

Рассмотрим какой-то момент времени:

сбоку



Теперь N - реакция опоры от сферы.

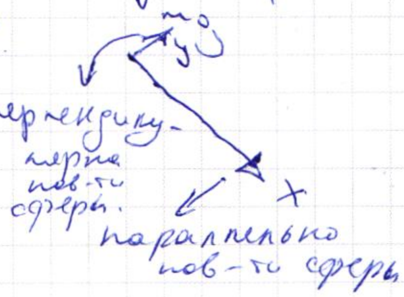
$F_т$ - сила тяги моторов.

$F_{тр}$ - сила трения.

m - масса модели

a - её ускорение

V - скорость.



Т.к. машинка движется по окружности =>
=> $a = \frac{V^2}{R}$

Т.к. модель движется равномерно по окружности => $N \neq 0$ но т.к. ищем V_{min}, то ~~в критической ситуации (когда на вершине~~

экстремальная ситуация $N \simeq 0$.

Запишем II ЗН на O_x и O_y:

для m: O_x: $F_{тр} = F_т - mg\sin\alpha$

O_y: $N + mg\cos\alpha = ma$ <=>

т.к. $N \geq 0$ $\quad a = \frac{V^2}{R}$

<=> $ma - mg\cos\alpha = N \geq 0$ <=> $\frac{V^2}{R} - g\cos\alpha \geq 0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\frac{V^2}{R} - g\cos\alpha \geq 0$$

$$\frac{V^2}{R} \geq g\cos\alpha$$

$$V^2 \geq Rg\cos\alpha$$

$$V \geq \sqrt{Rg\cos\alpha}$$

т.к. V_{min}, то $V_{min} = \sqrt{gR\cos\alpha} = \sqrt{10 \cdot 1 \cdot 0{,}8}$ м/с $= \sqrt{8}$ м/с $= 2\sqrt{2}$ м/с $\simeq 2 \cdot 1{,}41$ м/с $= 2{,}82$ м/с

$\sqrt{2} \simeq 1{,}41$

$$\begin{array}{r} 1{,}42 \\ \times\ 1{,}42 \\ \hline 284 \\ 568 \\ 142 \\ \hline 2{,}1164 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}41 \\ \times\ 1{,}41 \\ \hline 141 \\ 564 \\ 141 \\ \hline 1{,}9881 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}41 \\ \times\ 2 \\ \hline 2{,}82 \end{array}$$

Ответ: ①: $a = g\sqrt{4-\mu^2} \simeq 19{,}52$ м/с²

②: $V_{min} = \sqrt{gR\cos\alpha} \simeq 2{,}82$ м/с.

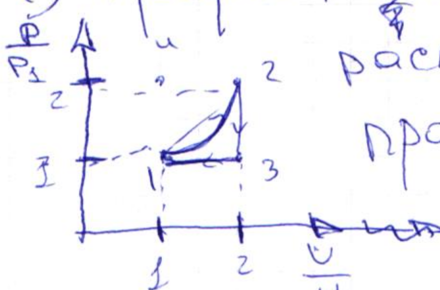
№4. Доп. сокращение: 1нт — первое начало термодинамики.

Дано:
$i = 3$ — степень свободы мол-л.
P_1, V_1, график.

Найти: $Q; A; \mu$

Решение:

1) График: В начале рассмотрим процессы $1 \to 2$, $2 \to 3$ и $3 \to 1$



№ 4.

1 → 2 : ~~газ~~ запишем ур-ие состояния идеального газа: $P_1V_1 = \nu RT_1$, $P_2V_2 = \nu RT_2$ ⇒ $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$; т.к. $P_1 < P_2$, $V_1 < V_2$ ⇒ (*)

ν - кол-во газа в молях

R - константа для данного ур-ия.

P_1, P_2, P_3 - давление газа в т 1, 2, 3

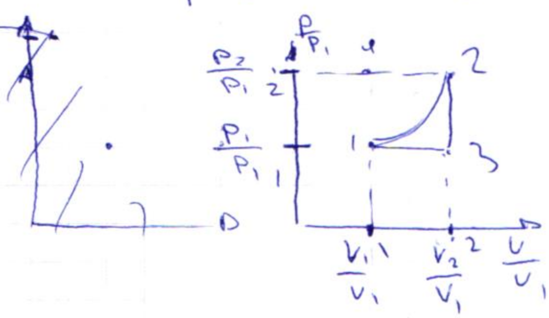
V_1, V_2, V_3 - объём газа в т. 1, 2, 3.

T_1, T_2, T_3 - температура газа в т. 1, 2, 3.

(*) ⇒ $T_1 < T_2$ ⇒ $Q > 0$

~~$P_2V_2 = \nu RT_2$~~

2) Теперь запишем для 1→2 I НТ: $Q = A_{12} + \Delta U_{12} =$
$= |A_{12}$ площади под графиком процесса 1→2$|$ = работе в 1→2 + изменении внут. энергии



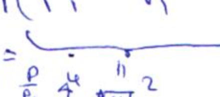
R окружности

$\frac{V_2}{V_1} - 1 = \frac{P_2}{P_1} - 1$ — в 1→2 R окружности.

⇓

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_2}{P_1}$

$A_{12} = \left(\left(\frac{P_2}{P_1}\cdot\frac{V_2}{V_1} - \frac{P_2}{P_1}\cdot 1\right) - \frac14\pi\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right)^2\right)P_1V_1 =$



$= \left(\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - \frac{V_2}{V_1} - \frac14\pi\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right)^2\right)P_1V_1$

$\Delta U_{12} = \frac32(P_2V_2 - P_1V_1) = \frac32\left(V_2^2\frac{P_1}{V_1} - P_1V_1\right)$

$= \left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - \frac{V_2}{V_1} - \frac14\pi\frac{V_2^2}{V_1^2} + \frac{\pi}{2}\frac{V_2}{V_1} - \frac14\pi\right)P_1V_1$

По графику $\frac{P_2}{P_1} = 2 = \frac{V_2}{V_1}$ ⇒ $V_2 = 2V_1$ ⇒ подставим в уравнение на ΔU_{12} и A_{12}

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

$$\Rightarrow A_{12} = \left(\underbrace{\frac{(2V_1)^2}{V_1^2}}_{\text{"}\frac{4V_1^2}{V_1^2}\text{"}} - \frac{2V_1}{V_1} - \frac{1}{4}\pi \cdot \underbrace{\frac{(2V_1)^2}{V_1^2}}_{\text{"}4V_1^2\text{"}} + \frac{\pi}{2}\frac{2V_1}{V_1} - \frac{1}{4}\pi\right)P_1V_1 =$$

$$= \left(4 - 2 - \frac{1}{4}\pi \cdot 4 + \pi - \frac{1}{4}\pi\right)P_1V_1 =$$

$$= \left(2 - \pi + \pi - \frac{1}{4}\pi\right)P_1V_1 = \frac{8-\pi}{4} \cdot P_1V_1$$

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\left((2V_1)^2 \frac{P_1}{V_1} - P_1V_1\right) = \frac{3}{2}\left(4V_1^{\cancel{2}}\frac{P_1}{\cancel{V_1}} - P_1V_1\right) =$$

$$= \frac{3}{2}(4V_1P_1 - P_1V_1) = \frac{9}{2}P_1V_1$$

подставим это в I НТ: $Q = A_{12} + \Delta U_{12}$

$$Q = A_{12} + \Delta U_{12} = \frac{8-\pi}{4}P_1V_1 + \frac{9}{2}P_1V_1 = P_1V_1\left(\frac{8-\pi}{4} + \frac{9}{2}\right) =$$

$$= P_1V_1\left(\frac{8 - \pi + 18}{4}\right) = P_1V_1\frac{26-\pi}{4} \approx P_1V_1\frac{26-3{,}14}{4} = P_1V_1 \cdot 5{,}715$$

$\pi \approx 3{,}14$

$$\begin{array}{r} 26{,}00 \\ -\ 3{,}14 \\ \hline 22{,}86 \end{array} \qquad 22{,}86 : 4 = 5{,}715$$

3) Работа

A (газа за цикл) =

= "площадь фигуры 1-2-3-1" $\cdot P_1V_1$

Считаем площадь фигура 1-2-3-1:

$$S_{1-2-3-1} = \underbrace{\frac{P_2}{P_1}}_{2} \cdot \underbrace{\frac{V_2}{V_1}}_{2} - \underbrace{\frac{P_2}{P_1}}_{2} \cdot \underbrace{\frac{V_1}{V_1}}_{1} - \underbrace{\frac{P_1}{P_1}}_{1}\left(\underbrace{\frac{V_2}{V_1}}_{2} - \frac{V_1}{V_1}\right) - \frac{1}{4}\pi\left(\underbrace{\frac{V_2}{V_1}}_{2} - 1\right)^2 =$$

$$= 4 - 2 - 1 - \frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 = 1 - \frac{1}{4}\pi = \frac{4-\pi}{4}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№4.

Теперь подставим $S_{1-2-3-1}$ в уравнение на работу цикла: $A = S_{1-2-3-1} \cdot P_1V_1 = \frac{4-\pi}{4} P_1V_1 \approx \frac{4-3{,}14}{4} P_1V_1 =$

$= 0{,}215 P_1V_1$

$\pi \approx 3{,}14$

$$\begin{array}{r} 4{,}00 \\ -\,3{,}14 \\ \hline 0{,}86 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}86 \,|\, 4 \\ -8 \quad 0{,}215 \\ \hline 6 \\ -4 \\ \hline 20 \\ -20 \\ \hline 0 \end{array}$$

4) $\eta = \frac{A}{Q}$ ← работа цикла (A), Qнагрева (Q)

Докажем, что $Q = Q$нагрева:

ур-ие состояния ид. газа
$$\begin{cases} P_1V_1 = \nu R T_1 \\ P_1V_2 = \nu R T_2 \\ P_3V_3 = \nu R T_3 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{P_1V_1}{P_2V_2} = \frac{T_1}{T_2} < 1 \Rightarrow T_2 > T_1$$

$$\frac{P_2V_2}{P_3V_3} = \frac{T_2}{T_3} > 1 \Rightarrow T_2 > T_3 \Rightarrow$$

$$\frac{P_1V_1}{P_3V_3} = \frac{T_1}{T_3} \underbrace{< 1}_{\text{этот момент из графика}} \Rightarrow T_1 < T_3$$

$\Rightarrow$ только в процессе $1 \to 2$ тело нагревалось, т.е. получено тепло $\Rightarrow Q = Q$нагрева

$$\frac{\frac{4-\pi}{4}}{\frac{26-\pi}{4}} = \frac{4-\pi}{26-\pi}$$

а $\eta = \frac{A}{Q_{нагрева}}$ (по определению) $= \frac{0{,}215 P_1V_1}{5{,}715 P_1V_1} =$

$= \frac{0{,}215}{5{,}715} = \frac{215}{5715} = \frac{43}{1143} \approx 0{,}037628$

$$\begin{array}{r} 215 \,|\, 5 \\ -20 \quad 43 \\ \hline 15 \\ -15 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5715 \,|\, 5 \\ -5 \quad 1143 \\ \hline 7 \\ -5 \\ \hline 21 \\ -20 \\ \hline 15 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43{,}00 \,|\, 1143 \\ 3429 \quad 0{,}037628 \\ \hline 8710 \\ 7992 \\ \hline 7180 \\ 6858 \\ \hline 3220 \\ 2286 \\ \hline 9440 \\ 9164 \\ \hline 276 \end{array}$$

Ответ:

1) $Q = P_1V_1 \frac{26-\pi}{4} \approx P_1V_1 \cdot 5{,}715$

2) ~~$A = P_1V_1 \cdot 0{,}215$~~. $A = P_1V_1 \cdot \frac{4-\pi}{4} \approx 0{,}215 P_1V_1$

3) $\eta = \frac{4-\pi}{26-\pi} \approx 0{,}037628$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

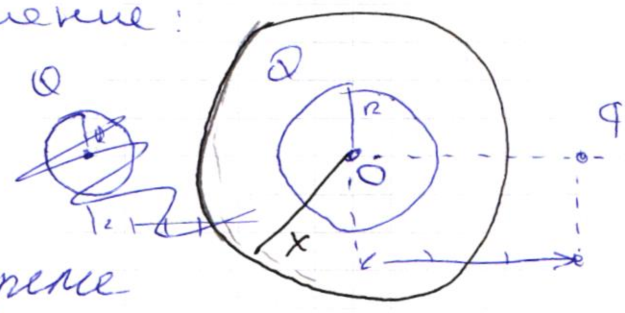
Дано: $Q > 0$, R

$q > 0$

Найти: $F_1 = ?$

Решение:

①:



Докажем по теореме Гаусса, что поле вне сферы $E_{вне} = \frac{kQ}{x^2}$

расстояние от центра до данной точки.

1) Возьмём окружность (O) вокруг радиусом x:

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{\Sigma_i q_{in}}{\varepsilon_0} \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}.$$

q_{in} - заряды внутри оболочки.

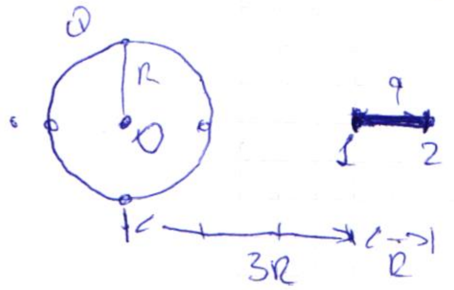
т.к. в каждой точке $\vec{E} \parallel d\vec{S}$ (оно перпендикулярно данному кусочку пов-ти)

$$E(x)\cdot \underbrace{4\pi x^2}_{\text{площадь пов-ти сферы}} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(x) = \frac{kQ}{x^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0} = \underbrace{\frac{kQ}{x^2}}_{\text{это тоже самое, что сфера превращается в точечный заряд в т. O}} - \text{чтд.}$$

2) Из п. 1 следует, что заряд q находится в поле $\frac{kQ}{(3R)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_1 = E(3R)\cdot q = \frac{kQq}{9R^2}$$

②:



~~т.к. Q>0 и q>0, то~~ все т.к. $Q > 0$ и $q > 0$

все q стержня перетекут в т. 2 $\Rightarrow E(4R) = \frac{kq}{16R^2} \Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №15

(Нумеровать только чистовики)

$\Rightarrow F_2 = \frac{kQ}{18R^2} q$

(по III ЗН дествие сферы на ~~заряд~~ стержень равно действию стержня на сферу)

~~Ответ~~

Ответ ① $F_1 = \frac{kQq}{9R^2}$

② $F_2 = \frac{kQq}{16R^2}$