Олимпиада «Физтех» по физике 2022

Класс 10

Вариант 10-01

Шифр

(заполняется секретарём)

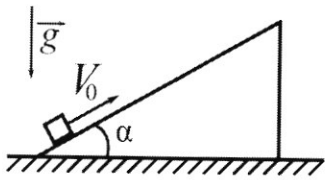
1. Фейерверк массой $m = 2$ кг стартует после мгновенной работы двигателя с горизонтальной поверхности, летит вертикально вверх и разрывается в высшей точке траектории на множество осколков, которые летят во всевозможных направлениях с одинаковыми по величине скоростями. Высота точки разрыва $H = 65$ м. На землю осколки падают в течение $\tau = 10$ с.

1) Найдите начальную скорость V_0 фейерверка.

2) Найдите суммарную кинетическую энергию K осколков сразу после взрыва.

Ускорение свободного падения g=10 м/с^2. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.

2. На гладкой горизонтальной поверхности расположен клин. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтом угол $\alpha = 30^0$. Шайбе, находящейся на наклонной поверхности клина, сообщают начальную скорость $V_0 = 2$ м/с (см. рис.), далее шайба безотрывно скользит по клину. Массы шайбы и клина одинаковы. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.



1) На какую максимальную высоту H над точкой старта поднимется шайба на клине?

2) Найдите скорость V клина, в тот момент, когда шайба вернется в точку старта на клине. Массы шайбы и клина одинаковы. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

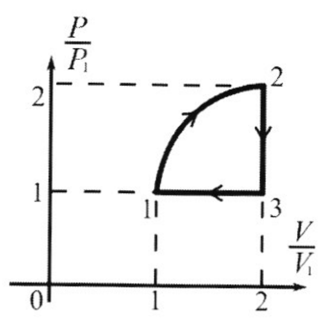
3. По внутренней поверхности проволочной металлической сферы радиуса $R = 1,2$ м равномерно со скоростью $V_0 = 3,7$ м/с движется модель автомобиля. Движение происходит в горизонтальной плоскости большого круга. Масса модели $m = 0,4$ кг. Модель приводится в движение двигателем. Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

1) С какой по величине силой P модель действует на сферу?

2) Рассмотрим модель автомобиля равномерно движущуюся по окружности в плоскости большого круга, составляющей с горизонтом угол $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Вычислите минимальную допустимую скорость V_{MIN} такого равномерного движения. Коэффициент трения скольжения шин по поверхности сферы $\mu = 0,9$.

Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

4. Один моль одноатомного идеального газа участвует в цикле 1-2-3-1 (см. рис.), участок 1–2 –дуга окружности с центром в точке 3. Температура газа в состоянии 1 равна T_1.



1) Какое количество Q теплоты подведено к газу в процессе расширения?

2) Найдите работу A газа за цикл.

3) Найдите КПД η цикла.

Универсальная газовая постоянная R.

5. Заряд Q >0 однородно распределен по сфере радиуса R. В первом опыте на расстоянии $2R$ от центра сферы помещают небольшой по размерам шарик с зарядом q >0.

1) Найдите силу F_1, действующую на заряженный шарик.

Во втором опыте заряд q однородно распределяют по стержню длины R, стержень помещают на прямой, проходящей через центр заряженной сферы. Ближайшая к центру сферы точка стержня находится на расстоянии $2R$ от центра.

2) Найдите силу F_2, с которой заряд сферы действует на заряженный стержень.

Все силы, кроме кулоновских, считайте пренебрежимо малыми. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона k. Явлениями поляризации пренебрегите.

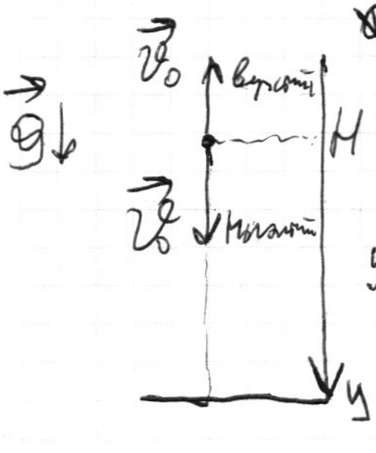
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 v_0 – начальная скорость осколков

Данное в условии время в течение которых падали осколки можно посчитать как время между падением первого и последнего осколка. Дольше всего будет падать осколок, летевший вертикально вверх, быстрее всех упадёт осколок, летящий вертикально вниз, т.к. модули скоростей одинаковы и на время падения влияет только вертикальная составляющая скорости (проекция на ось Oy), $v_y = v\cos\alpha$, максимальное и минимальное значение косинуса 1 и −1, в верхней и нижней точке соответственно. в – верхний, н – нижний



$$y_в = H - v_0 t_в + \frac{g t_в^2}{2} \quad (1)$$

$$y_н = H + v_0 t_н + \frac{g t_н^2}{2} \quad (2)$$

Вычтем (1)-(2)

$$y_в = y_н \quad 0 = H - v_0 t_в + \frac{g t_в^2}{2} - H - v_0 t_н - \frac{g t_н^2}{2}$$

(3) $y_в = H - v_0 t_в + \frac{g t_в^2}{2} = 0$ в конце

(4) $y_н = H + v_0 t_н + \frac{g t_н^2}{2} = 0$ в конце

(3): $D = v_0^2 - 4 \cdot H \cdot \frac{g}{2} = v_0^2 - 2gH$

$t_{в_1} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gH}}{g}$ $\quad t_{в_2} = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gH}}{g}$

(4): $t_{н_1} = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gH}}{g}$ $\quad t_{н_2} = \frac{-v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gH}}{g}$

$t_{н_2}$ не подходит, $t < 0$

~~$t_{н_1}$ – подходит~~ $\quad t_{н_1} + t_{в_2} = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gH} + v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gH}}{g} = 0,$

значит одно из времен отрицательно или оба $= 0$

$t_{н_1}$ – подходит, значит $t_{в_2} < 0$

$t_{в_1}$ – подходит

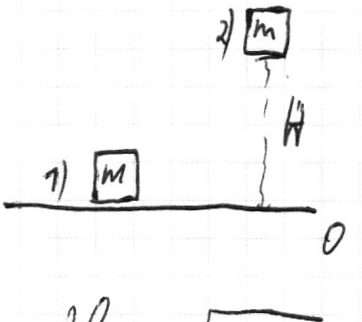
$\tau = t_{в_1} - t_{н_1} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gH} + v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gH}}{g} = \frac{2v_0}{g}$

$v_0 = \frac{g\tau}{2} = \frac{10\frac{м}{с^2} \cdot 10 с}{2} = 50 \frac{м}{с}$

v_{01} – начальная скорость фейерверка

K – кинетическая энергия осколков

$K = \sum_{i=1} K_i = \sum_{i=1} \frac{m_i v_0^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} \sum_{i=1} m_i = \frac{m v_0^2}{2} = \frac{2кг \cdot (50\frac{м}{с})^2}{2} = 2500$ Дж



ЗСЭ для фейерверка

$\underset{0}{mgh_0} + \frac{m v_{01}^2}{2} = mgH + \underset{=0}{\frac{m v_{0к}^2}{2}}$

$v_{01}^2 = 2gH$

$v_{01} = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 10\frac{м}{с^2} \cdot 65 м} = \sqrt{130 м \cdot 10\frac{м}{с^2}} = \sqrt{1300\frac{м^2}{с^2}} = 10\sqrt{13} \frac{м}{с}$

Ответ: $v_{01} = 10\sqrt{13} \frac{м}{с}$, $K = 2500$ Дж

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

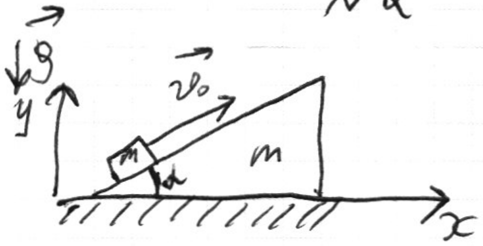
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

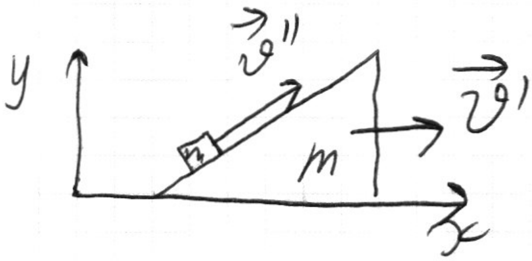
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2



~~ЗСИ: Ox: $mv_0\cos\alpha = mv' + mv''$~~

~~Oy: $mv_0\sin\alpha =$~~



~~ЗСИ: OX: $mv_0\cos\alpha = mv''\cos\alpha + mv'$~~

Oy: $mv_0\sin\alpha = mv''\sin\alpha$

~~$v_0 = v''$~~

~~ЗСИ: OX: $mv_0\cos\alpha = 2mv'$~~

$mv_0\cos\alpha =$

$\left(-\frac{x^{-3}}{3}\right)' = \frac{-(-3)x^{-2}}{3} =$ $\qquad x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

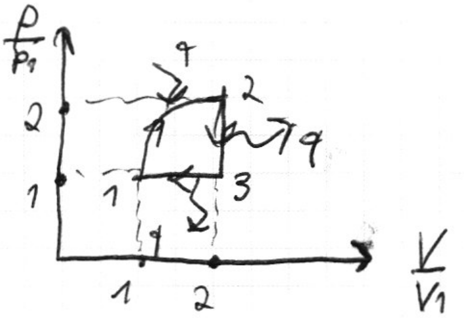
$-x^{-1\,\prime} = -(-1)x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

$\frac{3R-2R}{6R^2} = \frac{R}{6R^2}$

$3 \times 3 = 9$, $9 \times 3 = 27$, $27 \times 3 = 81$, $81 \times 3 = 243$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№ 4



T_1 2-3 – изохора, ~~T_2~~

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3}$$

3-1 – изобара $\frac{V_3}{T_3} = \frac{V_1}{T_1}$

2-1 – окружность: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

$$\left(\frac{V}{V_1} - 2\right)^2 + \left(\frac{p}{p_1} - 1\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{V - 2V_1}{V_1}\right)^2 + \left(\frac{p - p_1}{p_1}\right)^2 = 1$$

$$(V - 2V_1)^2 p_1^2 + (p - p_1)^2 \cdot V_1^2 = p_1^2 V_1^2$$

$$V^2 p_1^2 - 4VV_1 p_1^2 + 4V_1^2 p_1^2 + V_1^2 p^2 - 2pp_1 V_1^2 + \cancel{p_1^2 V_1^2} = \cancel{p_1^2 V_1^2}$$

$$V_1^2 p^2 - 2p_1 V_1^2 p + V^2 p_1^2 - 4VV_1 p_1^2 + 4V_1^2 p_1^2 = 0$$

$$\cancel{D = 4p_1^2 V_1^4 - 4(V - 2V_1)^2 p_1}$$

$$(V - 2V_1)^2 p_1^2 + V_1^2 p^2 - 2pp_1 V_1^2 = 0$$

$$D = 4p_1^2 V_1^4 - 4V_1^2 (V - 2V_1)^2 p_1^2$$

$$p = \frac{2p_1 V_1^2 \pm \sqrt{4p_1^2 V_1^2 (V_1^2 - (V - 2V_1)^2)}}{2V_1^2} = \frac{2p_1 V_1^2 \pm 2p_1 V_1 \sqrt{(V_1 - V + 2V_1)(V_1 + V - 2V_1)}}{2V_1^2}$$

$$= \frac{p_1 V_1 \pm p_1 \sqrt{(V_1 - V + 2V_1)(V_1 + V - 2V_1)}}{V_1} = \frac{p_1 V_1 \pm p_1 \sqrt{(3V_1 - V)(V - V_1)}}{V_1} =$$

$$= p_1 \left(1 \pm \frac{\sqrt{(3V_1 - V)(V - V_1)}}{V_1}\right)$$ выбираем +, т.к $p > p_1$ на графике

теплоту подводят только на процессе 1-2, т.к на остальных процессах $pV \downarrow$, значит $T \downarrow$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

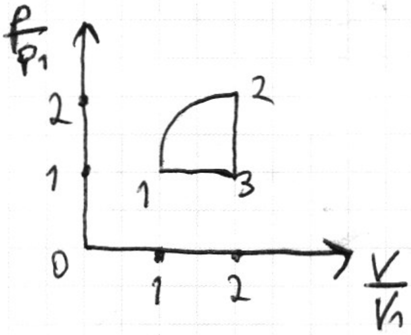
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$Q = \Delta U + A = c\nu(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1) + \int p(V)dV$$

A = площадь под графиком.

$$A_{12} = \frac{\pi R^2}{4} + \cancel{(p_3 - p_1)}(V_3 - V_1)p_3 = \frac{\pi(V_3 - V_1)^2}{4} + (V_3 - V_1)p_3 =$$

$$= (V_3 - V_1)\left(\frac{\pi(V_3 - V_1)}{4} + p_3\right) = (2V_1 - V_1)(\pi$$



$$A_{12} = \frac{\pi R^2}{4} + (V_3 - V_1)\cdot p_1 = \frac{\pi(V_3 - V_1)(p_2 - p_1)}{4} +$$

$$+ (V_3 - V_1)\cdot p_1 = (V_3 - V_1)\left(\frac{\pi}{4}p_2 - \frac{\pi}{4}p_1 + p_1\right) =$$

$$= (V_3 - V_1)\left(\frac{\pi}{4}p_2 + \frac{3}{4}p_1\right) = \pi\cdot(2V_1 - V_1)\left(\frac{2p_1}{4} + \frac{3p_1}{4}\right) =$$

$$= \pi\cdot\frac{5}{4}p_1V_1 = \pi\cdot\frac{5}{4}\nu RT_1$$

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\nu R\left(\frac{p_2V_2}{\nu R} - \frac{p_1V_1}{\nu R}\right) = \frac{3}{2}(4p_1V_1 - p_1V_1) = \frac{9}{2}p_1V_1 =$$

$$= \frac{9}{2}\nu RT_1$$

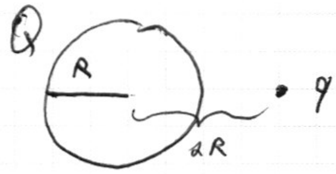
$$Q_+ = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{9}{2}\nu RT_1 + \pi\cdot\frac{5}{4}\nu RT_1 = \nu RT_1\left(\frac{18 + 5\pi}{4}\right)$$

$$A_0 = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi(V_3 - V_1)(p_2 - p_1)}{4} = \frac{\pi(2V_1 - V_1)(2p_1 - V_1)}{4} = \frac{\pi}{4}\nu RT_1$$

$$\eta = \frac{A_0}{Q_+} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{18 + 5\pi}{4}} = \frac{\pi}{18 + 5\pi}$$

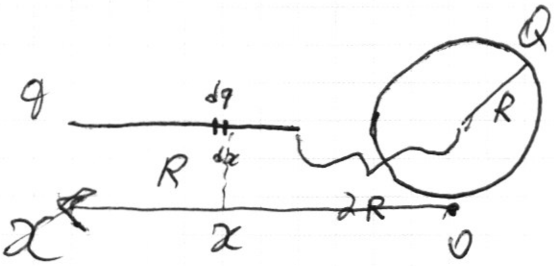
Ответ: $Q_+ = \nu RT_1\left(\frac{18 + 5\pi}{4}\right)$ $A_0 = \frac{\pi}{4}\nu RT_1$, $\eta = \frac{\pi}{18 + 5\pi}$

№5



1) Сферу можно заменить на заряженную частицу ~~за~~ Q в центре

$$F_{K_1} = \frac{kqQ}{4R^2}$$



$$dq = \frac{q\cdot dx}{R}$$

$$dF_K = \frac{kQ\,dq}{x^2} = \frac{kQq\,dx}{Rx^2}$$

$$\int_0^{F_2} dF_K = \frac{kQq}{R}\int_{2R}^{3R}\frac{dx}{x^2}$$

$$\cancel{F_K = \frac{kQq}{R}\left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Big|_{2R}^{3R}}$$

$$\cancel{F_2 = \frac{kQq}{R}\left(\frac{1}{3(2R)^3} - \frac{1}{3(3R)^3}\right) = \frac{kQq}{R}\left(\frac{1}{24R^3} - \frac{1}{81R^3}\right)}$$

$$\int_0^{F_2} dF_K = \frac{kQq}{R}\int_{2R}^{3R}\frac{dx}{x^2}$$

$$F_2 = \frac{kQq}{R}\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{3R}\right) = \frac{kQqR}{6R^3} = \frac{kQq}{6R^2}$$

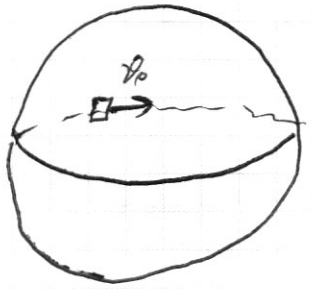
Ответ: $F_1 = \frac{kqQ}{4R^2}$ $F_2 = \frac{kQq}{6R^2}$

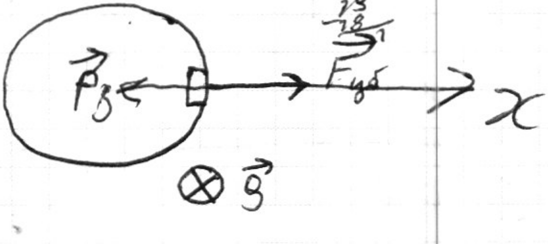
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3





$1369 : 3 = 456$

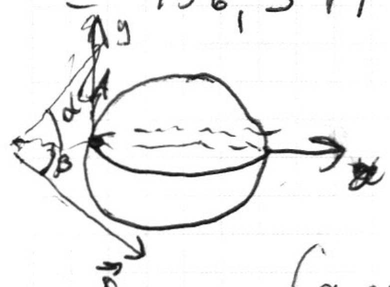
$3,7 \cdot 3,7$: $259 + 111 = 1369$

$OX: F_{уб} = P \qquad \frac{m v_0^2}{R} = P$

$OY: F_{тр} = mg$, движение установившееся ~~ко~~ трение скольжения

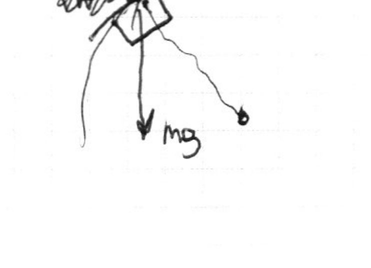
$P = \frac{m v_0^2}{R} = \frac{0,4\,кг \cdot (3,7\,\frac{м}{с})^2}{1,2\,м} = \frac{3,7^2}{3} = \frac{1369}{3} = 456,3\,Н$

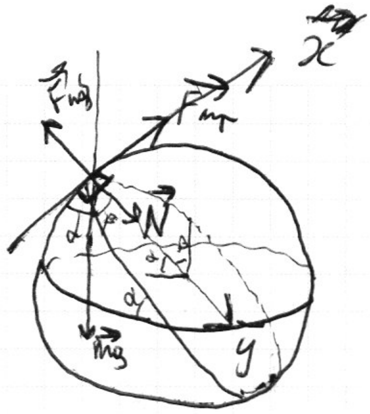
$3,7 \cdot 3,7$: $259 + 111 = 1369$



Для удобства перевернем сферу, ~~изменим~~ !

Самое сложное для автомобиля проезжать точку A, так P минимальное





$OX: F_{тр} = mg\cos\alpha$

$OY: F_{цб} = N + mg\sin\alpha$

$\mu N = F_{тр}$, т.к. уст режим, скольжение

$N = F_{цб} - mg\sin\alpha$

$\mu F_{цб} - \mu mg\sin\alpha = mg\cos\alpha$

$$\frac{\mu \cancel{m} v^2}{R} - \mu \cancel{m} g\sin\alpha = \cancel{m} g\cos\alpha$$

$$v_{min} = \sqrt{\frac{g}{\mu}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)R} = \sqrt{\frac{20}{0,9}\left(\cos\frac{\pi}{6} + 0,9\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 1,2} =$$

$$= \sqrt{\frac{40}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,9\cdot 0,5\right)} = \sqrt{\frac{40}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{0,9}{2}\right)} = \sqrt{\frac{40}{3}\left(\frac{10\sqrt{3}+9}{20}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{20}{3}(10\sqrt{3}+9)}\ \frac{м}{с}$$

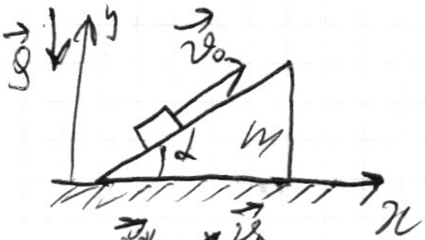
Ответ: $P = 456,3$ Н, $v_{min} = \sqrt{\frac{20}{3}(10\sqrt{3}+9)}\ \frac{м}{с}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

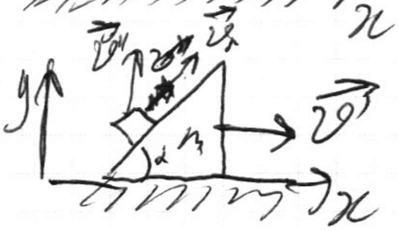
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2



ЗСИ: Ox: $m v_0 \cos\alpha = 2m v'$

Oy: $m v_0 \sin\alpha = m v''$



$v' = \frac{v_0 \cos\alpha}{2}$

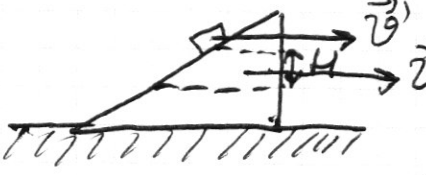
$v'' = v_0 \sin\alpha$

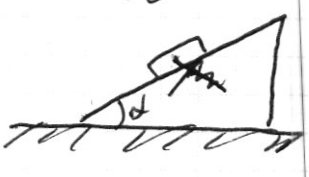
ЗСЭ: $\frac{m v_0^2}{2} = \frac{2m v'^2}{2} + mgH + \frac{m v_K''^2}{2}$ ≈ 0

$$H = \frac{\frac{v_0^2}{2} - \frac{2v'^2}{2}}{g} = \frac{v_0^2 - 2v'^2}{2g} = \frac{v_0^2\left(1 - 2\frac{\cos^2\alpha}{4}\right)}{2g} =$$

$$= \frac{\left(2\frac{м}{с}\right)^2\left(1 - 2\frac{(\cos 30)^2}{4}\right)}{2\cdot 10\frac{м}{с^2}} = \frac{4\cdot\left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\frac{1}{2}\right)}{2\cdot 10} = \frac{2\left(1-\frac{3}{8}\right)}{10} =$$

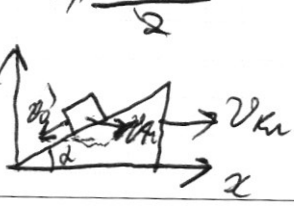
$$= \cancel{\frac{2}{10}\cdot\frac{13}{16} = \frac{26}{160} = \frac{13}{80}\,м} \quad \frac{2\cdot\frac{5}{8}}{10} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8} = 0{,}125\,м$$





~~$2m \quad \frac{2m v'^2}{2} + mgH$~~

ЗСЭ $\frac{m v_0^2}{2} = \frac{m v_{кл}^2}{2} + \frac{m v_0'^2}{2}$ $\qquad v_{кл}^2 = v_0^2 - v_0'^2$



ЗСИ: Ox: $m v_0 \cos\alpha = -m v_0' \cos\alpha + m v_{кл}$

$v_0' = \frac{v_{кл} - v_0\cos\alpha}{\cos\alpha}$

~~$v_{кл} = \sqrt{v_0^2 - v_0'^2} = \sqrt{v_0^2 -}$~~

$$v_{кл}^2 = v_0^2 - \left(\frac{v_{кл}}{\cos\alpha} - v_0\right)^2$$

$$v_{кл}^2 = v_0^2 - \frac{v_{кл}^2}{\cos^2\alpha} - 2\frac{v_{кл} v_0}{\cos\alpha} + v_0^2$$

$$v_{кл}^2\left(1 + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right) + \frac{2v_0}{\cos\alpha} v_{кл} - 2v_0^2 = 0$$

$$v_к^2\left(1 + \frac{2}{3}\right) + \frac{4\cdot 2}{\sqrt{3}} v_{кл} - 2\cdot 4 = 0$$

$$\frac{5}{3} v_{кл}^2 + \frac{8\sqrt{3}}{3} v_{кл} - 8 = 0$$

$$D = \frac{64\cdot 3}{9} + 4\cdot 8\cdot\frac{5}{3} = \frac{64}{3} + \frac{32}{3}\cdot 5 = (2+5)\frac{32}{3} = \frac{7\cdot 32}{3} =$$

скорость > 0

$$v_{кл} = \frac{\frac{8\sqrt{3}}{3} + \sqrt{\frac{7\cdot 32}{3}}}{2\cdot\frac{5}{3}} = \frac{\frac{8\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{7\cdot 32}\cdot\sqrt{3}}{3}}{2\cdot\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{3}(8 + \sqrt{7\cdot 32})}{10} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}(8 + 2\sqrt{56})}{10} = \frac{\sqrt{3}(8 + 4\sqrt{14})}{10} = \frac{\sqrt{3}(4 + 2\sqrt{14})}{5} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{42}}{5}$$

Ответ: $h = 0{,}125$ м, $v = \frac{\sqrt{3}(4 + 2\sqrt{14})}{5}$ $\frac{м}{с}$

$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 3 \\ \hline 42 \end{array}$ $\begin{array}{r} 7 \\ 32 \\ \hline 224 \end{array}$ $\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 4 \\ \hline 56 \end{array}$

42