

Олимпиада «Физтех» по физике 2022

Класс 10

Вариант 10-02

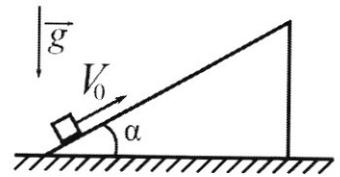
Шифр

(заполняется секретарём)

1. Фейерверк массой $m = 1 \text{ кг}$ стартует после мгновенной работы двигателя с горизонтальной поверхности, летит вертикально вверх и через $T = 3 \text{ с}$ разрывается в высшей точке траектории на множество осколков, которые летят во всевозможных направлениях с одинаковыми по величине скоростями. Суммарная кинетическая энергия осколков сразу после взрыва $K = 1800 \text{ Дж}$. На землю осколки падают в течение $\tau = 10 \text{ с}$.

- 1) На какой высоте H взорвался фейерверк?
 - 2) В течение какого промежутка времени τ осколки будут падать на землю?
- Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.

2. На гладкой горизонтальной поверхности расположен клин. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтом угол α такой, что $\cos \alpha = 0,6$. Шайбе, находящейся на наклонной поверхности клина, сообщают некоторую начальную скорость V_0 (см. рис.), далее шайба безотрывно скользит по клину и поднимается на максимальную высоту



$H = 0,2 \text{ м}$. Масса клина в два раза больше массы шайбы. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

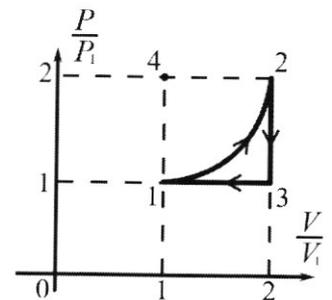
- 1) Найдите начальную скорость V_0 шайбы.
- 2) Найдите скорость V клина, в тот момент, когда шайба вернется в точку старта на клине. Массы шайбы и клина одинаковы.

3. По внутренней поверхности проволочной сферы равномерно движется модель автомобиля. Движение происходит в горизонтальной плоскости большого круга. Сила, с которой модель действует на сферу, в два раза больше силы тяжести, действующей на модель. Модель приводится в движение двигателем. Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

- 1) Найдите ускорение a модели.
- 2) Вычислите минимальную допустимую скорость V_{MIN} равномерного движения модели по окружности в плоскости большого круга, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45^\circ$. Коэффициент трения скольжения шин по поверхности сферы $\mu = 0,8$, радиус сферы $R = 1 \text{ м}$. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

4. Один моль одноатомного идеального газа участвует в цикле 1-2-3-1 (см. рис.), участок 1-2 – дуга окружности с центром в точке 4. Считать заданными давление P_1 и объём V_1 .

- 1) Какое количество Q теплоты подведено к газу в процессе расширения?
- 2) Найдите работу A газа за цикл.
- 3) Найдите КПД η цикла.



5. Заряд $Q > 0$ однородно распределен по сфере радиуса R . В первом опыте на расстоянии $3R$ от центра сферы помещают небольшой по размерам шарик с зарядом $q > 0$.

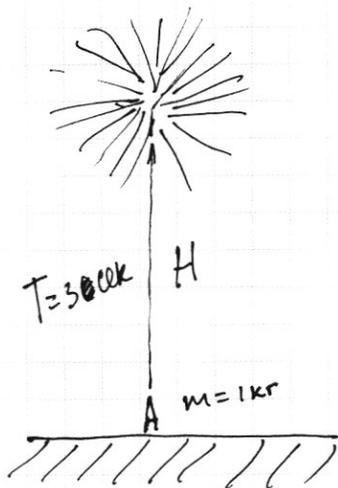
- 1) Найдите силу F_1 , действующую на заряженный шарик.

Во втором опыте заряд q однородно распределяют по стержню длины R , стержень помещают на прямой, проходящей через центр заряженной сферы. Ближайшая к центру сферы точка стержня находится на расстоянии $3R$ от центра.

- 2) Найдите силу F_2 , с которой заряженный стержень действует на заряженную сферу.

Все силы, кроме кулоновских, считайте пренебрежимо малыми. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона k . Явлениями поляризации пренебрегите.

N1



Дано:

$$m = 1 \text{ кг}$$

$$T = 3 \text{ сек}$$

$$K = 1200 \text{ Дж} = E_{\text{кз}}$$

$$T = 10 \text{ сек}$$

1) H - ? 2) t_n - ?

Решение черновик

Рассмотрим кин. энергию осколков:

$$\frac{m_1 V^2}{2}, \frac{m_2 V^2}{2}, \dots, \frac{m_n V^2}{2}$$

Тогда их сумма:

$$\frac{m_1 V^2}{2} + \frac{m_2 V^2}{2} + \dots + \frac{m_n V^2}{2} = \frac{V^2}{2} (M_{\Sigma}) = \frac{m V^2}{2}$$

M_{Σ} - суммарная масса осколков, т.е. m

$$\text{Т.е. } K = \frac{m V^2}{2}$$

Отсюда $V = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ - скорость разлета осколков; $V = \sqrt{\frac{3600}{1}} = 60 \text{ м/с}$

1) H - ? Т.к. ΔT работы двигателя $\rightarrow 0$, то можно считать, что ракета стартует с начальной скоростью V_0 без ускорения.
Тогда:

$$V_0 = g T, \text{ т.к. ракета достигает верхней точки } (V=0) \text{ через } T.$$

$$H = V_0 T - \frac{g T^2}{2}$$

$$H = g T^2 - \frac{g T^2}{2} = \frac{g T^2}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = \underline{45 \text{ м}}$$

2) Очевидно, что корзинка на землю упадет осколок, чья скорость после взрыва направлена вниз.

~~$$H = V_0 t_n - \frac{g t_n^2}{2} = 60 t_n - \frac{10 t_n^2}{2} = 60 t_n - 5 t_n^2 = 45$$

$$5 t_n^2 - 60 t_n + 45 = 0$$

$$t_n^2 - 12 t_n + 9 = 0$$

$$t_n = 12 \pm \sqrt{144 - 36} = 12 \pm 10.8$$

$$t_n = 22.8 \text{ с}$$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (продолжение)

Тогда для него справедливо уравн:

$$H = vt_n + \frac{g t_n^2}{2}$$

$$\frac{g t_n^2}{2} + vt_n - H = 0$$

$$5t_n^2 + 60t_n - 45 = 0$$

$$D_z \text{ б'мае} = 3600 + 4 \cdot 5 \cdot 45 = 4500$$

$$\sqrt{D} = 30\sqrt{5}$$

$$t_{n,1,2} = \frac{-60 \pm 30\sqrt{5}}{10} = \boxed{3\sqrt{5} - 6}$$

не подх, г.к. отрицат.

$$\sqrt{5} \approx 2,25, \quad 3 \cdot 2,25 = 6,75$$

$$t_n \approx 0,75 \text{ сек.}$$

Ответ: $H = 45 \text{ м}$, $t_n \approx 0,75 \text{ с}$.

№2

Дано:

$$\cos \alpha = 0,6$$

$$H = 0,2 \text{ м}$$

$$1) V_0 = ?$$

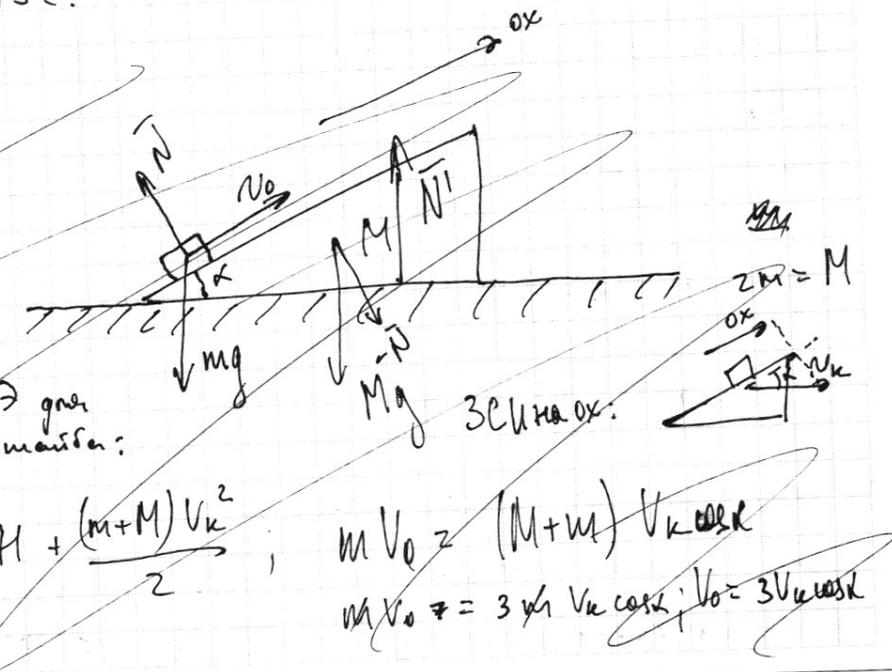
$$2) V = ?$$

Заменим ЗСЭ для
сис-мы качн-маятн:

$$\frac{m V_0^2}{2} = m g H + \frac{(m+M) V_k^2}{2}$$

$$m V_0 = (m+M) V_{\text{каск}}$$

$$m V_0 = 3 \text{ м} V_{\text{каск}}; \quad V_0 = 3 V_{\text{каск}}$$



N2

$$1) \frac{mV_0^2}{2} = mgh + \frac{(m+M)V_k^2}{2}$$

$$\frac{mV_0^2}{2} = mgh + \frac{(m+M)V_0^2 \cos^2 \alpha}{3 \cdot 2}$$

$$\frac{V_0^2}{2} = gh + \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{6}$$

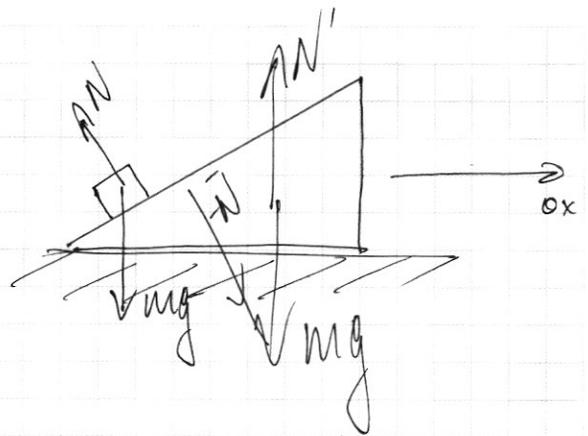
$$3V_0^2 = 6gh + V_0^2 \cos^2 \alpha$$

$$\{3V_0^2 - V_0^2 \cos^2 \alpha\} = 6gh$$

$$V_0^2 (3 - \cos^2 \alpha) = 6gh$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{6gh}{3 - \cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{6gh}{3 - 0,36}} = \sqrt{\frac{60 \cdot 0,2}{2,64}} = \sqrt{\frac{12,22}{2,64}} = \sqrt{22} \text{ м/с}$$

1201
264 / 12
22 / 22
24
24
0



$$m V_0 \cos \alpha = (M+m) V_k$$

$$V_k = \frac{m V_0 \cos \alpha}{(M+m)} = \frac{V_0 \cos \alpha}{3}$$

2) $M = m$

$$\frac{mV_0^2}{2} = mgh + \frac{(m+M)V_k^2}{2}$$

$$\frac{mV_0^2}{2 \cos^2 \alpha} = mgh + \frac{(m+M)V_k^2}{2}$$

$$\frac{2V_k^2}{\cos^2 \alpha} = gh + V_k^2$$

$$\frac{2V_k^2}{\cos^2 \alpha} - V_k^2 = gh$$

$$2V_k^2 - V_k^2 \cos^2 \alpha = gh \cos^2 \alpha$$

$$V_k^2 (2 - \cos^2 \alpha) = gh \cos^2 \alpha$$

$$V_k^2 = \frac{gh \cos^2 \alpha}{2 - \cos^2 \alpha}$$

$$V_k = \sqrt{\frac{10 \cdot 0,2 \cdot 0,36}{2 - 0,36}}$$

$$V_k = \sqrt{\frac{0,72}{1,64}}$$

$$V_k = \sqrt{\frac{18}{41}}$$

$$m V_0 \cos \alpha = (M+m) V_k$$

$$V_0 \cos \alpha = 2 V_k$$

$$V_k = \frac{V_0 \cos \alpha}{2}$$

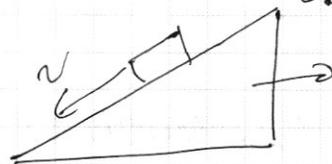
$$V_0 = \frac{2V_k}{\cos \alpha}$$

$$N_c$$

$$mgH + \frac{mV_k^2}{2} + \frac{MV_k^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + \frac{mV_{kk}^2}{2}$$

$$mgH + \frac{(m+M)V_k^2}{2} - \frac{M V_{kk}^2}{2} = \frac{mV^2}{2}$$

V_{kk} - скорость камня после того как шайба сойдет



~~$$mgH + \frac{mV_k^2}{2} - \frac{M V_{kk}^2}{2} = \frac{mV^2}{2}$$~~

~~$$2gH + V_k^2 - V_{kk}^2 = V^2$$~~

~~$$2gH + V_k^2 - (2V_k + V_{\cos k})^2 = V^2$$~~

~~$$2gH + V_k^2 - 4V_k^2 - 4V_k V_{\cos k} - V_{\cos k}^2 = V^2$$~~

~~$$2gH + V_k^2 - 4V_k^2 = V^2 + V_{\cos k}^2 - 4V_k V_{\cos k}$$~~

$$2(M+M)V_k = M V_{kk} + m V_{\cos k}$$

или

$$2V_k + V_{\cos k} = V_{kk}$$

из симметрии получим, что ~~камень~~ ~~будет~~

скорость у камня после того, как шайба сойдет будет $2V_k$.

~~Знай~~ ~~скорость~~ ~~шайбы~~

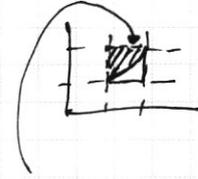
Ведем в сис-му отсчета связанную с камнем, движущую с пост. скоростью V_k вверх.

Соответственно получим ситуацию, симметричную с первой, только тогда у нас шайба движется с нач. скоростью V_0 , а теперь ощущает ~~ее~~ ~~скорость~~ без нач. скорости.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение)

Работа - площадь под графиком.



$$\text{где } A_{12} = (V_2 - V_1) p_1 + (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) - \frac{\pi}{4} p_1 V_1$$

$$A_{12} = 2p_1 V_1 - \frac{\pi}{4} p_1 V_1 = p_1 V_1 \left(2 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$Q = \Delta U + A = \frac{1}{2} \rho R \Delta T + p_1 V_1 \left(2 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2} \rho R T_1 + p_1 V_1 \left(2 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{2} p_1 V_1 + p_1 V_1 \left(2 - \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{p_1 V_1 (26 - \pi)}{4}}$$

A за цикл - это просто площадь цикла, т.е.

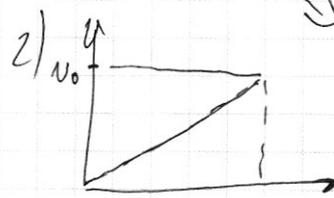
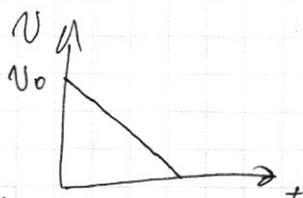
$$A = p_1 V_1 - \frac{\pi}{4} p_1 V_1 = \boxed{p_1 V_1 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$Q_{23} = \frac{1}{2} \rho R (T_3 - T_2)$$

$$Q_{232} = \frac{1}{2} \rho R T_1$$

$$\eta = \frac{Q^- - Q^+}{Q^+} = \frac{A_{\text{полн}}}{A_{\text{обг}}} = \frac{Q_{23} + Q_{13} - Q_{12}}{Q_{12}} = \frac{\frac{3}{2} \rho R T_1 + \frac{3}{2} \rho R T_1 - p_1 V_1 \left(2 - \frac{\pi}{4}\right)}{p_1 V_1 \left(2 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

(№2 ч.3) И если посмотреть на графики $v(t)$, то они будут одинаковыми, просто один будет перевернут



⇒ скорость все еще
стучит отн.

со камня
будет v_0 *

* Следоват. отн. со скоростью v_0 с камня будет такая же v_0 | Ответ: $2V = 2\sqrt{\frac{122}{41}}$

$$(M+m) V_k \cos \alpha = m V_0 - M V_{kk} \cos \alpha$$

$$2 m V_k \cos \alpha = m V_0 - m V_{kk} \cos \alpha$$

$$2 V_k \cos \alpha = V_0 - V_{kk} \cos \alpha$$

V_k для любого случая, когда $M = m$, равно:

$$\frac{m V_0^2}{2} = m g H + \frac{(m+M) V_k^2}{2}$$

$$m V_0 = (m+M) V_k \cos \alpha$$

$$V_0 = 2 V_k \cos \alpha$$

$$V_k = \frac{V_0}{2 \cos \alpha}$$

$$V_0^2 = 2 g H + 2 V_k^2$$

~~$$V_0^2 = 2 g H + 2 V_k^2$$~~

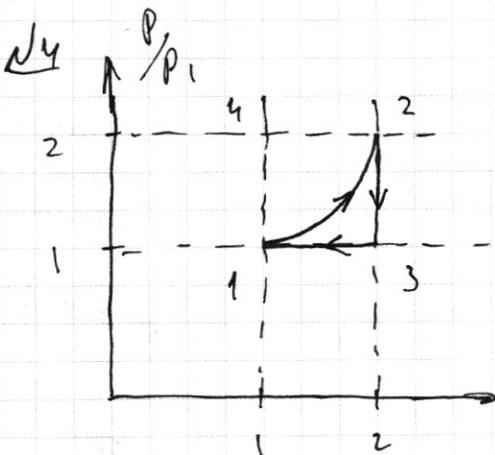
~~$$\frac{2 V_0^2 \cos^2 \alpha - V_0^2}{2 \cos^2 \alpha} = 2 g H$$~~

~~$$2 m V_k^2 \cos^2 \alpha = 2 g H + 2 V_k^2$$~~

~~$$V_0^2 \frac{(2 \cos^2 \alpha - 1)}{2 \cos^2 \alpha} = 2 g H$$~~

~~$$V_k^2 (2 \cos^2 \alpha - 1) = g H$$~~

~~$$V_k = \sqrt{\frac{g H}{2 \cos^2 \alpha - 1}}$$~~



$$\delta Q = dU + \delta A$$

$$P_1 V_1 = \nu R T_1$$

$$P_2 V_2 = \nu R T_2$$

$$\frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} = \frac{T_2}{T_1} = 4$$

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{\nu R}$$

$$T_2 - T_1 = 3 T_1$$

Давл., объем и темп. в точке 2

Дано:

$$\nu = 1 \text{ моль}$$

$$i = 3$$

$$P_1, V_1$$

$$Q_{12} \text{ ? } A \text{ ? } \eta \text{ ?}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение)

$$V_{кк} = \frac{V_0}{3 \cos^2 \alpha}$$

$$6 \cdot 0,36 = 2,16$$

$$3 \cdot 0,36 = 1,08$$

$$\frac{m V_0^2}{2} - \frac{8 m V_0^2}{2 \cdot 3 \cos^2 \alpha} = m g H$$

$$\frac{V_0^2}{2} - \frac{V_0^2}{6 \cos^2 \alpha} = g H$$

$$\frac{3 V_0^2 \cos^2 \alpha - V_0^2}{6 \cos^2 \alpha} = g H$$

$$\frac{V_0^2 (3 \cos^2 \alpha - 1)}{6 \cos^2 \alpha} = g H$$

$$\frac{V_0^2 \cdot 0,08}{2,16} = g H$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{2,16 g H}{0,08}}$$

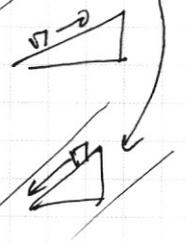
$$V_0 = \sqrt{27 g H} = \sqrt{3^3 \cdot 2} = 3 \sqrt{6}$$

$$\begin{array}{r} 216 \overline{) 18} \\ \underline{16} \\ 56 \\ \underline{54} \\ 20 \end{array}$$

$V_{кк}$ - конечная скорость камня.

2) $\frac{m V_0^2}{2} = m g H + \frac{(m+M) V_{кк}^2}{2}$ - где подъёма

$m g H + \frac{(M+m) V_{кк}^2}{2} = \frac{m V_{кк}^2}{2} + \frac{M V_{кк}^2}{2}$ - где спуска



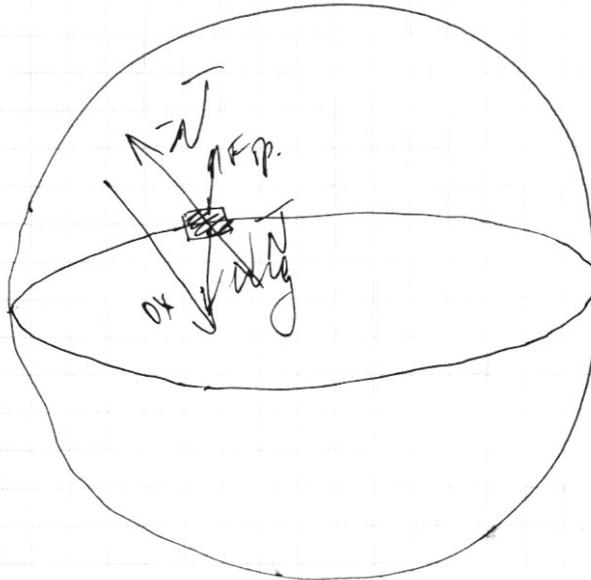
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3

Дано:

$$N = 2mg$$

$$a = ? \quad v_{\text{min}} = ?$$



ось Ox направлена
в центр сферы
и проходит
через машинку.

1) Запишем 2-й Ньютон: на Ox

~~$$N = ma_{\text{центр}}$$~~

$$a_{\text{центр}} = \frac{v^2}{R}$$

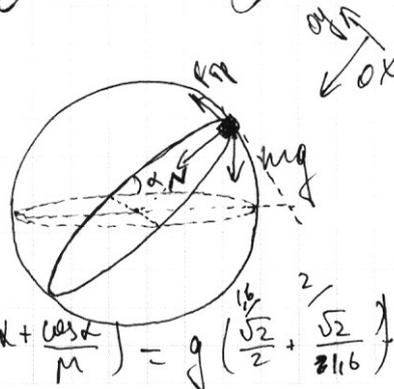
$$a_{\text{центр}} = \frac{N}{m} = \frac{2mg}{m} = \boxed{2g}$$

Так машина едет в направлении большого круга и при этом движется равномерно, то сила тяжести направлена по радиусу к центру сферы и соответственно направлена против силы тяжести.

2) Ox:

$$mg \sin \alpha + N = ma \quad ; \quad a = g \sin \alpha + \frac{g \cos 45^\circ}{m}$$

$$Oy: F_{\text{тр}} = mg \cos 45^\circ$$



$$F_{\text{тр}} = mN$$

$$mN = mg \cos 45^\circ$$

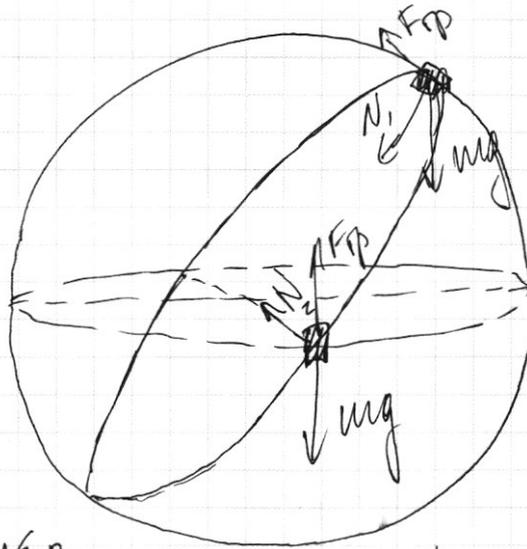
$$N = \frac{mg \cos 45^\circ}{m}$$

N3

$$N + mg \sin \alpha = ma$$

$$mg \cos \alpha = \mu N$$

$$N = \frac{mg \cos \alpha}{\mu}$$



$$\frac{mg \cos \alpha}{\mu} + mg \sin \alpha = ma$$

$$g \left(\frac{\cos \alpha}{\mu} + \sin \alpha \right) = a$$

$$g \cdot \left(\frac{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}{\mu} \right) = a$$

$$g \left(\frac{\sqrt{2}(1+\mu)}{2\mu} \right) = a = g \left(\frac{\sqrt{2} \cdot 1.8}{2 \cdot 0.8} \right) = g \frac{1.8 \sqrt{2}}{1.6} = 11.25 \sqrt{2}$$

$$N_2 = ma_2$$

$$F_{\text{тр}} = mg$$

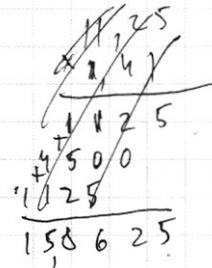
$$N_2 = \frac{mg}{\mu}$$

меньше a_2

$$a_2 = \frac{g}{\mu} = \frac{10}{0.8} = 12.5$$

~~a_2~~ a_2

$$v_{\text{min}} = \sqrt{\frac{11.25 \sqrt{2}}{1}} = \sqrt{11.25 \sqrt{2}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



$$40^2 = 1600$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = 3 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{v \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \sin \alpha \cos \alpha$$

$$g v \cos \alpha = 3 v \cos \alpha = 2gH$$

$$v^2 (3 \cos^2 \alpha - 3) = 2gH$$

$$v^2 = \frac{2gH}{3 \cos^2 \alpha - 3} = \sqrt{\frac{20 \cdot 0,2}{9 \cdot 0,36 - 3}}$$

$$v^2 = \sqrt{\frac{4}{0,24}}$$

$$g \cdot 0,6 = 3,24$$

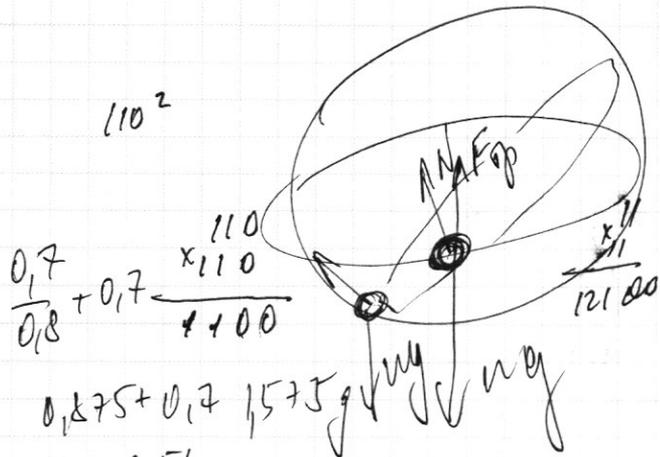
$$\begin{array}{r} 400 \cdot 24 \\ - 24 \\ \hline 160 \\ - 160 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 225 \\ \hline 225 \\ + 1125 \\ \hline 450 \\ + 450 \\ \hline 50625 \end{array}$$

$$t_{n,2} = \frac{-60 \pm 30\sqrt{5}}{3 \cdot 6} = \begin{cases} -6 - 3\sqrt{5} \\ 3\sqrt{5} - 6 \end{cases}$$

$$\sqrt{27 \cdot 20} = \sqrt{27 \cdot 4 \cdot 5} = 2\sqrt{27 \cdot 5} = 2 \cdot 3\sqrt{15} = 6\sqrt{15}$$

$$\begin{array}{r} 2,16 \\ \times 2,3 \\ \hline 648 \\ + 432 \\ \hline 4968 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 0,7 + 0,7 \\ \hline 1,4 \\ \times 110 \\ \hline 154 \\ + 154 \\ \hline 308 \\ \times 112 \\ \hline 3388 \\ + 3388 \\ \hline 6776 \\ \times 112 \\ \hline 74944 \\ + 74944 \\ \hline 149888 \\ \times 112 \\ \hline 1678736 \\ + 1678736 \\ \hline 3357472 \end{array}$$

$$v_k = \frac{v_0}{3 \cos \alpha}$$

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{3 \sin \alpha v_0^2}{2 \cdot 3 \cos^2 \alpha} = \sin \alpha g H$$

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{v_0^2}{2 \cos^2 \alpha} = g H$$

$$\frac{v_0^2 (3 \cos^2 \alpha - 1)}{2 \cos^2 \alpha} = g H$$

$$v_0^2 = \frac{2 g H \cos^2 \alpha}{3 \cos^2 \alpha - 1}$$

$$t_{n,1,2} = \frac{-60 \pm 30\sqrt{5}}{3 \cdot 6} = \begin{cases} -6 - 3\sqrt{5} \\ 3\sqrt{5} - 6 \end{cases}$$

$$\sqrt{27 \cdot 20} = 6\sqrt{15}$$

$$H = v_0 t_n + \frac{g t_n^2}{2}$$

$$\frac{g t_n^2}{2} + v_0 t_n = H$$

$$5 t_n^2 + 60 t_n - 45 = 0$$

$$D = 3600 + 4 \cdot 5 \cdot 45 = 0$$

$$D = 3600 + 20 \cdot 45$$

$$D = 3600 + 900$$

$$D = 4500$$

$$\sqrt{D} = 10\sqrt{45} = 10\sqrt{5 \cdot 3^2} = 30\sqrt{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$p_1 V_1 = \nu R T_1$$

$$p_2 V_2 = \nu R T_2$$

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu R}$$

$$\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{T_2}{T_1} = 4$$

$$T_2 - T_1 = 3T_1$$

$$Q^+ - Q^-$$

$$Q^*$$

$$S = \pi R^2$$

$$\frac{S}{4} = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$A_{\text{кон}} = Q - \Delta u$$

$$Q - \Delta u$$

$$A_{\text{сжим}} = - \frac{\pi p_1 V_1}{4}$$

$$A_{1,2} = (V_2 - V_1) p_1 + (p_2 - p_1) (V_2 - V_1)$$

$$A_{1,2} = V_1 p_1 + p_1 V_1 - \frac{\pi}{4} p_1 V_1 = 2p_1 V_1 - \frac{\pi}{4} p_1 V_1$$

$$p_1 V_1 \left(2 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$R = \sqrt{\frac{p_1 V_1}{\nu}}$$

$$Q = \frac{1}{2} \nu R \Delta T + p_1 V_1 \left(2 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$Q = \frac{3}{2} \nu R 3T_1 + p_1 V_1 \left(2 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2} \nu R \cdot 3 \frac{p_1 V_1}{\nu R}$$

$$= \frac{9}{2} p_1 V_1 + p_1 V_1 \left(2 - \frac{\pi}{4}\right) = p_1 V_1 \left(\frac{9}{2} + 2 - \frac{\pi}{4}\right) = p_1 V_1 \left(\frac{13 - \pi}{2}\right)$$

$$= \frac{p_1 V_1 (26 - \pi)}{4}$$

$$Q_{\text{ст}} = p_1 V_1 - \frac{\pi}{4} p_1 V_1 = p_1 V_1 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$