Олимпиада «Физтех» по физике 2022

Класс 10

Вариант 10-04

Шифр

(заполняется секретарём)

1. Камень брошен с некоторой скоростью V_0 под углом α к горизонту, $\cos\alpha = 0,6$ (см. рис.). Через $\tau = 0,8$ с камень находится на максимальной высоте. В конце полета камень падает на горизонтальную крышу. В момент падения на крышу вектор скорости образует с горизонтом угол β такой, что $\cos\beta = 0,8$.

1) Найдите начальную скорость V_0 камня.

2) На какой высоте h, отсчитанной от точки старта, завершился полет камня? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

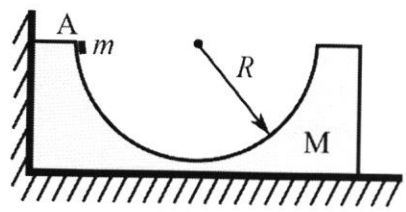
2. Максимальная скорость движения модели автомобиля по окружности радиуса $R = 2$ м, лежащей в горизонтальной плоскости, равна $V_{MAX} = 4$ м/с. Модель приводится в движение двигателем. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

1) Найдите коэффициент μ трения скольжения шин модели по поверхности.

Модель помещают на наклонную поверхность, составляющую угол α с горизонтом такой, что $\sin\alpha = 0,6$.

2) Найдите наименьшее время T, за которое модель равномерно проедет по окружности радиуса $R = 2$ м на наклонной поверхности. Коэффициент трения скольжения шин модели по поверхности $\mu = 0,8$.

3. На гладкой горизонтальной поверхности вплотную к вертикальной стенке стоит брусок массой $M = 3m$, в бруске сделано гладкое углубление в форме полусферы радиуса R (см. рис.). Из точки A с нулевой начальной скоростью скользит шайба массы m.

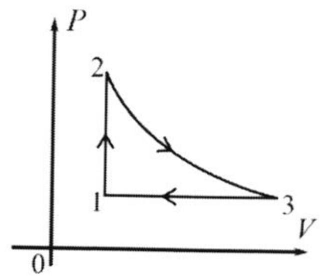


1) На какую максимальную высоту H, отсчитанную от нижней точки полусферы, поднимется шайба при дальнейшем движении системы?

2) Найдите максимальную кинетическую энергию K_{MAX} бруска при дальнейшем движении системы.

3) С какой по величине силой N брусок действует на шайбу в тот момент, когда его кинетическая энергия максимальная? Ускорение свободного падения g.

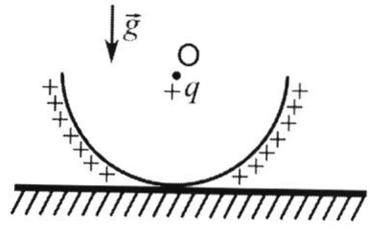
4. С одноатомным идеальным газом проводят циклический процесс, состоящий из изохоры 12, адиабаты 23 и изобары (см. рис.). В изобарическом процессе объем газа уменьшается в $n = 2\cdot\sqrt{2}$ раз.



1) Найдите КПД такого цикла.

Указание: в адиабатическом процессе с одноатомным идеальным газом $PV^{\frac{5}{3}} = const$.

5. На горизонтальной поверхности лежит однородная полусфера (см. рис.) массы m. Точка O находится на расстоянии R от всех точек полусферы. По поверхности полусферы однородно с поверхностной плотностью σ распределен положительный заряд. В точке O находится точечный заряд $q > 0$.



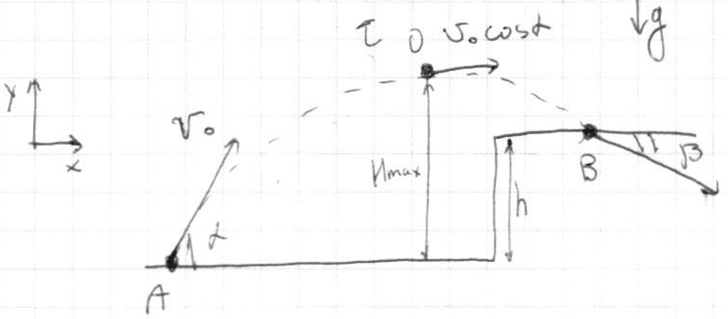
1) Найдите работу A внешней силы при переносе заряда q из точки O в бесконечность. Электрическая постоянная ε_0.

2) Во сколько раз уменьшится сила, с которой полусфера действует на горизонтальную поверхность, после переноса точечного заряда q из точки O в бесконечность? Ускорение свободного падения g.

Явлениями поляризации пренебрегите.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1



Полёт камня из т A до т O (вершины траектории):

~~oX~~ OY:

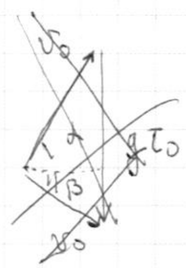
~~$v_0\cos\alpha$~~ $v_0 \cdot \sin\alpha = g\tau$ - условие макс. высоты

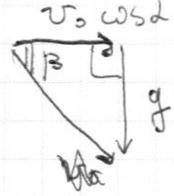
$$\Rightarrow \quad v_0 = \frac{g\tau}{\sin\alpha} = \frac{g\tau}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{10\frac{м}{с^2}\cdot 0{,}8с}{\sqrt{\underbrace{1-0{,}36}_{0{,}64}}} = \frac{8\frac{м}{с}}{0{,}8} = \boxed{10\frac{м}{с}}$$

- нач. скорость камня

В ответ

Из положения O в положение B:





Треуг. скоростей

τ_0 - время движ. из O в B

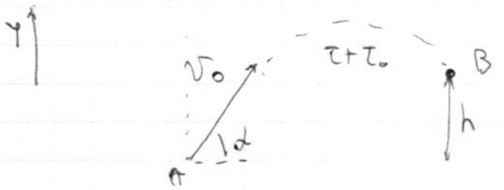
$$\Rightarrow \quad tg\beta = \frac{g\tau_0}{v_0\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \tau_0 = \frac{v_0\cos\alpha\cdot tg\beta}{g}$$

$$tg^2\beta = \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \frac{1-\cos^2\beta}{\cos^2\beta} \Rightarrow \quad tg\beta = \frac{\sqrt{1-\cos^2\beta}}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{1-\overset{0{,}36}{0{,}64}}}{0{,}8} =$$

$$= \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\tau_0 = \frac{10\frac{м}{с}\cdot 0{,}6\cdot 0{,}75}{10\frac{м}{с^2}} = \frac{\overset{2\cdot 3}{6}}{10}\cdot\frac{3}{\underset{2\cdot 2}{4}} = \frac{9}{20}\ с$$

Полное время полёта $(\tau+\tau_0)$.



OY: $v_0\sin\alpha\,(\tau+\tau_0) - g\frac{(\tau+\tau_0)^2}{2} = h$ — (1)

$\begin{array}{r} \times 72 \\ 4 \\ \hline 288 \end{array}$

$$\cancel{10\cdot 0{,}8\cdot\frac{9}{20} - \frac{10}{2}\cdot\frac{9^2}{20^2} = \frac{72}{20} - \frac{10\cdot 81}{2\cdot 400} =}$$

$$\cancel{= \frac{72}{20} - \frac{81}{80} = \frac{288-81}{80} = \frac{207}{80}}$$

$$\tau+\tau_0 = \frac{9}{20}\,с + \frac{8}{10}\,с = \frac{9+16}{20} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}\,с$$

подставим в (1):

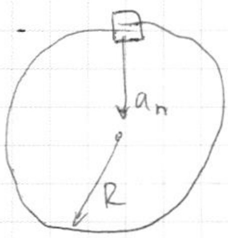
$$10\frac{м}{с}\cdot 0{,}8\cdot\frac{5}{4}с - 10\frac{м}{с^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}\cdot 5}{\cancel{4}} - 5\cdot\frac{25}{16} =$$

$$= 10 - \frac{125}{16} = \frac{160-125}{16} = \boxed{\frac{35}{16}\,м}$$ — в ответ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

1)



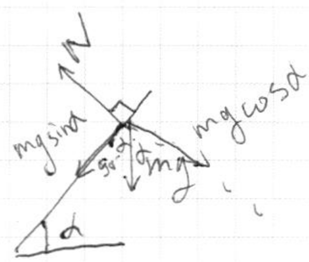
Максимальная скорость будет тогда, когда a_n машины будет максимально (нормальное ускорение).

Это достигается когда $F_{тр}$ сонаправлено с a_n.

$$m\frac{v^2}{R} = mg\mu \Rightarrow \mu = \frac{v^2}{gR} = \frac{16}{10 \cdot 2} =$$

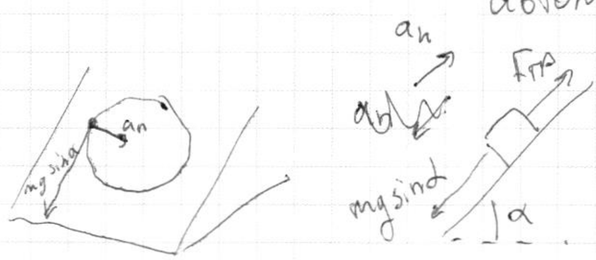
$$= \frac{16}{20} = \frac{8}{10} = \boxed{0,8} \text{ - в ответ}$$

2)



$N = mg\cos\alpha$

Определим, какая наименьшая скорость может быть у автомобиля.



Это будет в наивысшей или наименьшей точке траектории

$$m\frac{v_{min}^2}{R} = -mg\sin\alpha + N\mu = -mg\sin\alpha + mg\cos\alpha\,\mu$$

$$v_{min}^2 = Rg(\sin\alpha + \cos\alpha\,\mu)$$

$$\cancel{v_{min} = \sqrt{20\left(0{,}6 - 0{,}8\cdot\underbrace{\sqrt{1-0{,}36}}_{0{,}8}\right)} = \sqrt{20(0{,}6-0{,}64}}$$

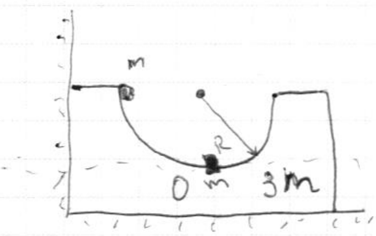
$$v_{min} = \sqrt{gR(\cos\alpha\mu - \sin\alpha)} = \sqrt{20\left(\underbrace{\underbrace{\sqrt{1-0{,}36}}_{0{,}8}\cdot 0{,}8}_{0{,}64} - 0{,}6\right)} =$$

$$= \sqrt{20\cdot 0{,}04} = \sqrt{2\cdot 0{,}4} = \sqrt{0{,}8}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v_{min}} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 2}{\sqrt{0{,}8}} = \frac{4\cdot 3{,}14}{\sqrt{0{,}8}}$$ — Ответ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3



После прохождения нижней точки углубления ~~ш~~ брусок (шайбой) начнёт двигаться.

В момент, когда высота H максимальна, шайба остановится отн-но бруска.

В т O скорость шайбы равна v_0:

ЗСЭ: $mgR = m\frac{v_0^2}{2}$ $\quad v_0^2 = 2gR$ – в нижн. точке

ЗСЭ: $mgR = mgH + \frac{4m(v)^2}{2}$; v – ск. шайбы и бруска когда будет $H = max$

ЗСИ: $\cancel{m}v_0 = 4\cancel{m}v \Rightarrow v = \frac{v_0}{4}$

$$Rg = gH + 2\cdot\frac{v_0^2}{16} \qquad R\cancel{g} = \cancel{g}H + \frac{\cancel{2}\cancel{g}R}{\cancel{8}4}$$

$$\boxed{H = \frac{3}{4}R} \text{ – 1) – в ответ}$$

Максим. кин. энергия K_{max} будет когда положение шайбы будет в т O.

В системе отсчёта бруска скорость шайбы будет

$$\frac{3}{4}Rg = \frac{v_1^2}{2} \qquad v_1^2 = \frac{3}{2}Rg$$

Скорость бруска из ЗСИ:

$$4mv = 3mu + m(u - v_1)$$ u - ск. бруска

$$4v = 4u - v_1 \qquad v_0 = 4u - v_1 \Rightarrow u = \frac{v_0 + v_1}{4}$$

v = v_0

$$u = \frac{\sqrt{2gR} + \sqrt{\frac{3}{2}gR}}{4}$$

$$\cancel{u = \frac{v_0 + v_1}{4} = \frac{\sqrt{2gR} + \sqrt{\frac{3}{2}gR}}{4}}$$

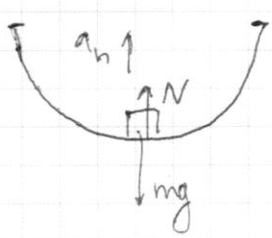
$$\cancel{K_{max} = \frac{3mu^2}{2} = \frac{3}{2}m\frac{gR\left(\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}{4} = \frac{3}{8}mgR\left(2+\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\right) =}$$

$$\cancel{= \frac{3}{8}mgR\left(\frac{4+3+4\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{16}mgR(7+4\sqrt{3})}$$

$$K_{max} = \frac{3m}{2}u^2 = \frac{3}{2}m\frac{gR\left(\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}{16} = \frac{3}{32}mgR\left(2+\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\right) =$$

$$= \frac{3}{64}mgR(7+4\sqrt{3})$$ – в ответ

Скорость шайбы отн-но бруска $v_1 = \sqrt{\frac{3}{2}gR}$



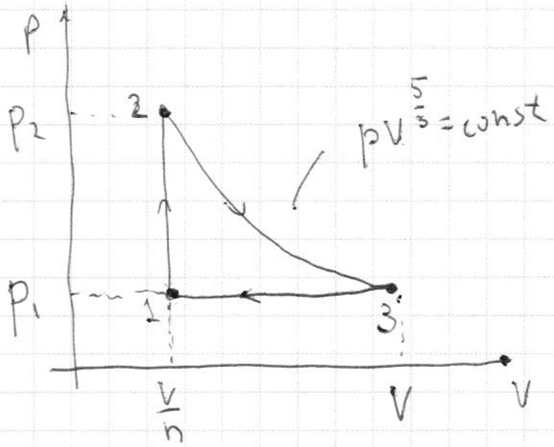
$$ma_n = N - mg$$

$$N = m\left(g + \frac{v_1^2}{R}\right) = m\left(g + \frac{3}{2}g\right) = \boxed{\frac{5}{2}mg}$$

В ответ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



$A = p\Delta V$

$Q = \Delta U + A$ $\quad \Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T$

1-2 ($V = const$)

$Q_{12} = \Delta U_{12}$ $\quad$ Q ~~подаётся~~ подводится

2-3 (адиабата)

$Q = 0$ $\quad A_{23} = -\Delta U_{23}$

3-1:

$Q_{31} = \Delta U_{31} + A_{31}$ $\quad$ Q ~~отдаётся~~ отводится

$$\eta = \frac{Q_{подв.}}{Q_{общ}} = \frac{Q_{12}}{Q_{12} + |Q_{31}|}$$

$Q_{12} = \Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{12} =$

$= \frac{3}{2}\frac{V}{n}(p_2 - p_1)$

$p_2\left(\frac{V}{n}\right)^{\frac{5}{3}} = p_1 V^{\frac{5}{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow p_2 = p_1 \cdot n^{5/3}$

$$Q_{12} = \frac{3}{2}\frac{V}{n}\left(p_1 n^{\frac{5}{3}} - p_1\right) = \frac{3}{2}\frac{V}{n}p_1\left(n^{\frac{5}{3}} - 1\right)$$

$$|Q_{31}| = \underbrace{p_1\left(V - \frac{V}{n}\right)}_{A_{31}} + \underbrace{\frac{3}{2}p_1\left(V - \frac{V}{n}\right)}_{\Delta U_{31}} = \frac{5}{2}p_1\left(V - \frac{V}{n}\right) = \frac{5}{2}p_1 V\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\eta = \cancel{\frac{\frac{3}{2}\frac{V}{n}p_1\left(n^{\frac{5}{3}}-1\right)}{}}\ \frac{Q_{подв}}{Q_{общ}} = \frac{Q_{общ} - Q_{отвед}}{Q_{общ}} = 1 - \frac{Q_{отв}}{Q_{общ}}$$

$$\eta = \frac{\frac{3}{\cancel{2}}\frac{\cancel{V}}{n}\cancel{p_1}\left(n^{\frac{5}{3}}-1\right)}{\frac{3}{\cancel{2}}\frac{\cancel{V}}{n}\cancel{p_1}\left(n^{\frac{5}{3}}-1\right)+\frac{5}{\cancel{2}}\cancel{V}\cancel{p_1}\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{3}{n}\left(n^{\frac{5}{3}}-1\right)}{\frac{3}{n}\left(n^{\frac{5}{3}}-1\right)+5\left(1-\frac{1}{n}\right)} =$$

$$\cancel{= \frac{3\left(2\sqrt{2}^{\frac{5}{3}}-1\right)}{3\left(2\sqrt{2}^{\frac{5}{3}}-1\right)+5\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}} - \cancel{\text{Ответ}}$$

$$= \frac{3\left(n^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{n}\right)}{3\left(n^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{n}\right)+5\left(1-\frac{1}{n}\right)} \qquad n = 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^3$$

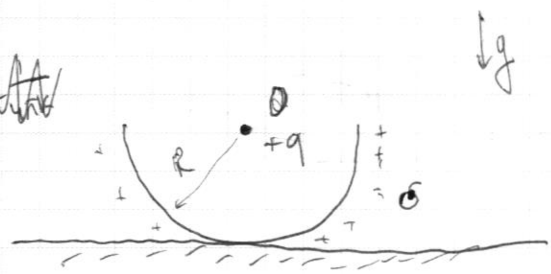
$$\eta = \frac{3\left(\sqrt{2}^{\frac{2}{3}\cdot 3}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}{3\left(\sqrt{2}^{\frac{2}{3}\cdot 3}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+5\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} = \frac{3\overbrace{\left(2-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}^{\frac{4\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}}{3\underbrace{\left(2-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}_{\frac{4\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}+5\underbrace{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}_{\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}} =$$

$$= \frac{3\left(4\sqrt{2}-1\right)}{3\left(4\sqrt{2}-1\right)+5\left(2\sqrt{2}-1\right)} = \frac{12\sqrt{2}-3}{12\sqrt{2}-3+10\sqrt{2}-5} = \frac{12\sqrt{2}-3}{22\sqrt{2}-8}$$

$$\eta = \frac{12\sqrt{2}-3}{22\sqrt{2}-8} - \text{Ответ}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5



Работа A равна разности потенциальных энергий. На бескон. заряд +q ~~не буд~~ не будет взаим. со сферой $\Rightarrow E_{П\infty}=0$

$\sigma = \frac{Q}{S}$

$\Rightarrow A = E_{П0}$ ← нач. потенц. энергия

заряд сферы

$$|E_П| = \frac{qQk}{R} = \frac{q\sigma Sk}{R} = \frac{q\sigma \cdot 4\pi R^2 k}{R} = q\sigma 4\pi Rk = $$

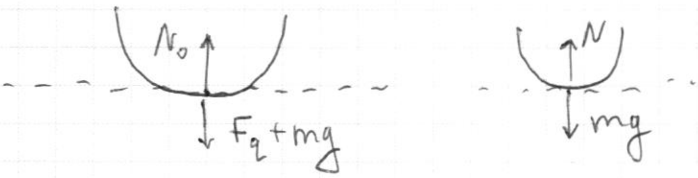
$$= 4\sigma q\pi Rk$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$$

~~$A = \int F dx = \int k\frac{q_1q_2}{R^2}dx = kq_1q_2\int\frac{dx}{x^2} = \frac{kq_1q_2}{x}$~~

$$A = -E_П = -4\sigma q\pi Rk = -\frac{qR\sigma}{\varepsilon_0}$$

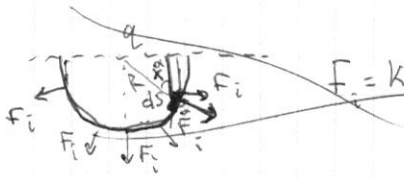
$$\boxed{A = -\frac{qR\sigma}{\varepsilon_0}}$$ – 1) – в ответ



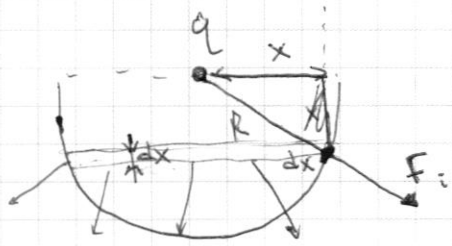
$N_0 = F_q + mg$; F_q – сила взаимодействия с зарядом

$N = mg$

$$\frac{N}{N_0} = \frac{mg}{F_q + mg}$$



$$F_i = k\frac{q\sigma dS}{R^2} \cdot \frac{x}{R}$$



$$F_i = \frac{kq}{R^2} \cancel{dx}\, \overbrace{\underbrace{2\pi x \cdot dx}_{\substack{dS \\ \text{полоски} \\ \text{сферы}}}\, \sigma}^{\text{заряд}} =$$

$$= \frac{2kq\pi\sigma}{R^2} x\,dx$$

$$F_q = \int_0^R F_i = \frac{2kq\pi\sigma}{R^2}\int_0^R x\,dx = \frac{2kq\pi\sigma}{R^2} \cdot \frac{R^2}{2}$$

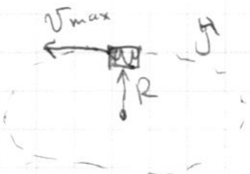
$$= kq\pi\sigma \quad ; \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \quad \pi k = \frac{1}{4\varepsilon_0}$$

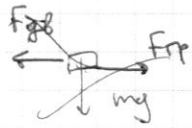
$$F_q = \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}$$

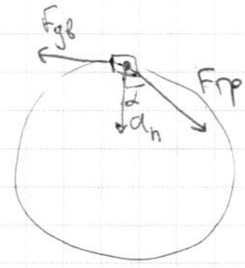
$$\boxed{n = \frac{mg}{mg + \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}}} \text{ — В ответ}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2







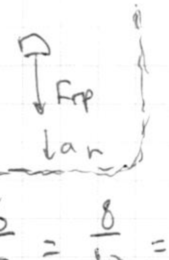
$a_n = \frac{v^2}{R}$

$\mu m g\cos\alpha = m\frac{v^2}{R}$ $\quad mg\mu\sin\alpha = F_{дв}$ $\quad \mu^2 m^2 g^2 = F_{дв}^2 + \frac{v^4}{R^2}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{v^2}{R\mu g}$

$\mu^2 m^2 g^2 = m^2 g^2 \mu^2 \sin^2\alpha + \frac{v^4}{R^2}$

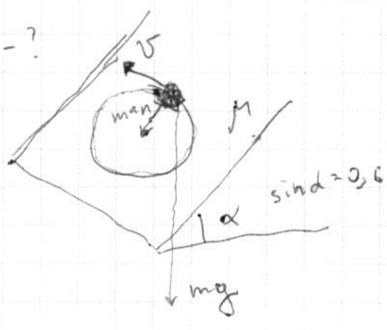
Скорость автомобиля максимальна, когда a_n максимально. Т.к. единственная сила, создающая это ускорение это $F_{тр}$, то оно сонаправлено с a_n.



$m\frac{v^2}{R} = m\mu g$ $\quad \mu = \frac{v^2}{Rg} = \frac{(4\frac{м}{с})^2}{2м\cdot 10\frac{м}{с^2}} =$

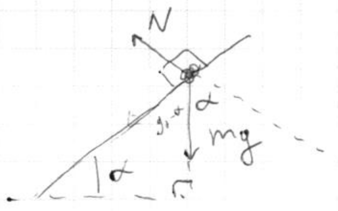
$= \frac{16}{20} = \frac{8}{10} = 0,8$

T = min -?



$L = 2\pi R$ длина окр.

$T_{min} = \frac{2\pi R}{v_{min}}$



$N = mg\cos\alpha$

В верхней и нижн. точках траектории будет достигаться мин. v.

$\cancel{a_n = F_{тр} - mg\sin}$

$\cancel{a_n = mg - F_{тр}}$