

# Олимпиада «Физтех» по физике 2022

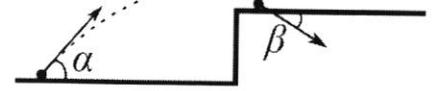
Класс 10

Вариант 10-04

Шифр

(заполняется секретарём)

1. Камень брошен с некоторой скоростью  $V_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту,  $\cos \alpha = 0,6$  (см. рис.). Через  $\tau = 0,8$  с камень находится на максимальной высоте. В конце полета камень падает на горизонтальную крышу. В момент падения на крышу вектор скорости образует с горизонтом угол  $\beta$  такой, что  $\cos \beta = 0,8$



- 1) Найдите начальную скорость  $V_0$  камня.
- 2) На какой высоте  $h$ , отсчитанной от точки старта, завершился полет камня? Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

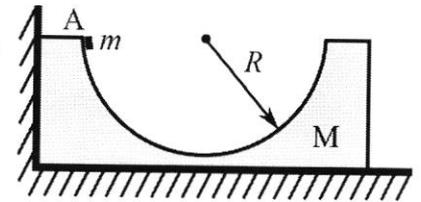
2. Максимальная скорость движения модели автомобиля по окружности радиуса  $R = 2$  м, лежащей в горизонтальной плоскости, равна  $V_{MAX} = 4 \text{ м/с}$ . Модель приводится в движение двигателем. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

- 1) Найдите коэффициент  $\mu$  трения скольжения шин модели по поверхности.

Модель помещают на наклонную поверхность, составляющую угол  $\alpha$  с горизонтом такой, что  $\sin \alpha = 0,6$ .

- 2) Найдите наименьшее время  $T$ , за которое модель равномерно проедет по окружности радиуса  $R = 2$  м на наклонной поверхности. Коэффициент трения скольжения шин модели по поверхности  $\mu = 0,8$ .

3. На гладкой горизонтальной поверхности вплотную к вертикальной стенке стоит брусок массой  $M = 3m$ , в бруске сделано гладкое углубление в форме полусферы радиуса  $R$  (см. рис.). Из точки А с нулевой начальной скоростью скользит шайба массы  $m$ .



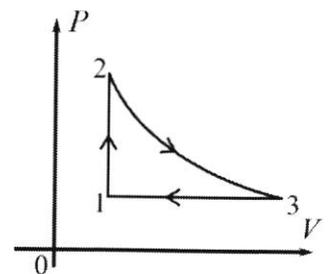
- 1) На какую максимальную высоту  $H$ , отсчитанную от нижней точки полусферы, поднимется шайба при дальнейшем движении системы?
- 2) Найдите максимальную кинетическую энергию  $K_{MAX}$  бруска при дальнейшем движении системы.
- 3) С какой по величине силой  $N$  брусок действует на шайбу в тот момент, когда его кинетическая энергия максимальная? Ускорение свободного падения  $g$ .

4. С одноатомным идеальным газом проводят циклический процесс, состоящий из изохоры 12, адиабаты 23 и изобары (см. рис.). В изобарическом процессе объем газа уменьшается в  $n = 2 \cdot \sqrt{2}$  раз.

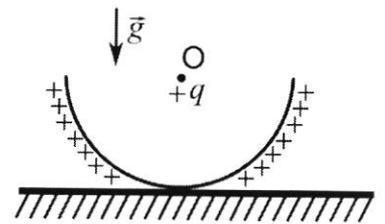
- 1) Найдите КПД такого цикла.

Указание: в адиабатическом процессе с одноатомным идеальным газом

$$PV^{\frac{5}{3}} = const.$$

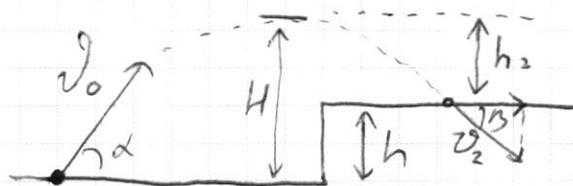


5. На горизонтальной поверхности лежит однородная полусфера (см. рис.) массы  $m$ . Точка  $O$  находится на расстоянии  $R$  от всех точек полусферы. По поверхности полусферы однородно с поверхностной плотностью  $\sigma$  распределен положительный заряд. В точке  $O$  находится точечный заряд  $q > 0$ .



- 1) Найдите работу  $A$  внешней силы при переносе заряда  $q$  из точки  $O$  в бесконечность. Электрическая постоянная  $\epsilon_0$ .
- 2) Во сколько раз уменьшится сила, с которой полусфера действует на горизонтальную поверхность, после переноса точечного заряда  $q$  из точки  $O$  в бесконечность? Ускорение свободного падения  $g$ . Явлениями поляризации пренебрегите.

1.



tg 1) через  $\tau$  на максимальной высоте  $H$ , значит  $v_{y0} = v_0 \sin \alpha$  равна нулю.

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 0,8$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = 0,6$$

$$v_0 \sin \alpha - g \tau = 0 = v_{y1}$$

$$v_0 = \frac{g \tau}{\sin \alpha} = \frac{10 \cdot 0,8}{0,8} \frac{\text{м}}{\text{с}} = \underline{\underline{10 \frac{\text{м}}{\text{с}}}}$$

2)  $v_{y2} = v_0 \cos \alpha \operatorname{tg} \beta$

$\tau_2$  - время после времени  $\tau$ .

$$|v_{y1} - g \tau_2| = v_{y2} = v_0 \cos \alpha \operatorname{tg} \beta$$

$$\tau_2 = \frac{v_0 \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{g} = \tau \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

$$h = H - h_2$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{g \tau^2}{2} - \text{макс. высота}$$

$$h_2 = \frac{g \tau_2^2}{2} = \frac{g \tau^2}{2} (\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta)^2 - \text{высота на которую опустился за } \tau_2$$

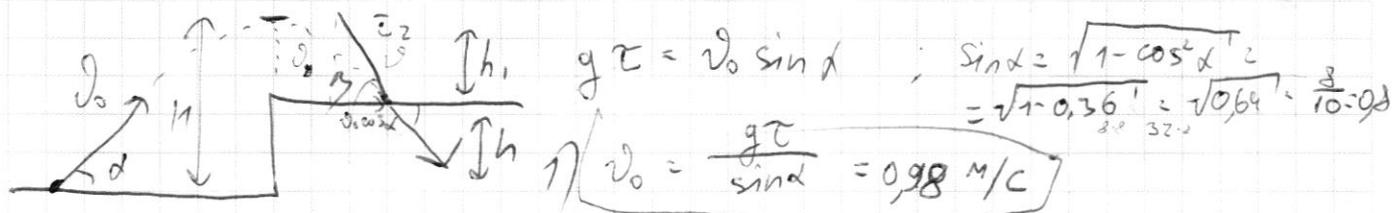
$$h = \frac{g \tau^2}{2} (1 - (\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta)^2) = \frac{g \tau^2}{2} (1 - 0,75^2)(1 + 0,75^2) =$$

$$= \frac{10 \cdot 0,8^2}{2} (1 - 0,75^2)(1 + 0,75^2) \text{ м} \approx \underline{\underline{2,2 \text{ м}}}$$

Ответ: 1)  $10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

2)  $2,2 \text{ м}$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



2)

$\sin \beta = 0,6$  ;  $\operatorname{tg} \beta = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4} = 0,75$   
 $\frac{v_y}{v_0 \cos \alpha} = \operatorname{tg} \beta = 0,75$  ;  $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$   
 $v_y = v_0 \cos \alpha \operatorname{tg} \beta$   
 $g\tau_2 = v_y$   
 $\tau_2 = \frac{v_0 \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{g}$

$\tau_2 = \frac{g\tau \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{g \sin \alpha} = \tau \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha = 0,8 \cdot 0,75^2 \text{ с} =$

$h = H - h_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} - \frac{g\tau^2 \cdot 0,75^4}{2} = \frac{g\tau^2}{2} (1 - 0,75^4)$   
 $H = \frac{g\tau^2}{2}$  ;  $\tau = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$  ;  $\frac{(g\tau)^2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot 2g} = \frac{g\tau^2}{2}$

$h_1 = \frac{g\tau_2^2}{2} = \frac{g\tau^2 \cdot 0,75^4}{2}$

$h \approx \frac{10 \cdot 0,8^2}{2} (1 - 0,75^2)(1 + 0,75^2) \approx \frac{6,4}{2} (0,44)(1,56) =$

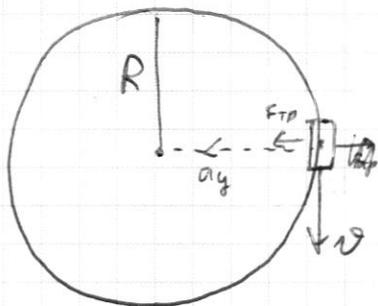
$\approx 3,2 \cdot 0,44 \cdot 1,56 \approx 1,4 \cdot 1,56 \approx 2,2 \text{ м}$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 0,45 \\ 0,45 \\ \hline 3,75 \\ \hline 5,250 \\ 0,5625 \approx 0,56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 3,20 \\ 1280 \\ \hline 12800 \\ \hline 14080 \quad 2,4 \\ \hline 1,46 \\ \times 1,40 \\ \hline 6240 \\ \hline 15600 \\ \hline 2,1840 \approx 2,2 \end{array}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2



1)  $a_y = \frac{v^2}{R}$  - центр. уск.

$|a_y m| = |F_{тр}|$

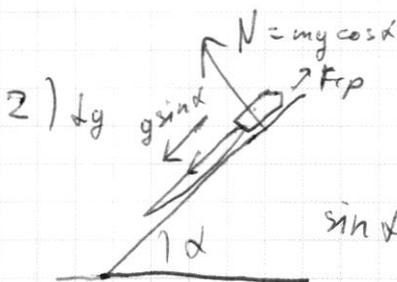
$F_{тр} \leq \mu mg$  - сила тр.

$m \frac{v^2}{R} \leq \mu mg$

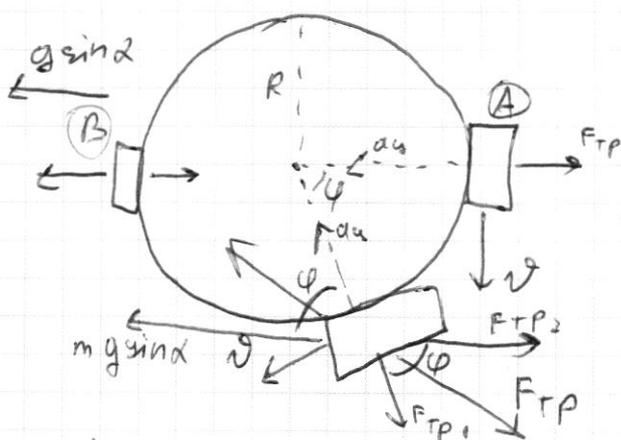
$v^2 \leq \mu g R$ , отсюда  $v$  максимальна

или  $v_{max}^2 = \mu g R$

$\mu = \frac{v_{max}^2}{g R} = \frac{16}{10 \cdot 2} = \underline{0,8}$



$\sin \alpha = 0,6 \rightarrow \cos \alpha = 0,8$ ;  $\mu = 0,8$ .



$v = \text{const}$  по укл.  $\rightarrow$

$a_y = \frac{v^2}{R} = \text{const}$ .

$-|a_y m + m g \sin \alpha| + |F_{тр1} + F_{тр2}| = 0$  - укл.

для равномерн. движения.

$|F_{тр}| = |F_{тр1} + F_{тр2}| \leq |\mu m g \cos \alpha|$  - сила тр.

• чтобы  $T$  было минимально, надо  $v$  максимальна  $\rightarrow a_y$  макс.

откуда  $|a_y m + m g \sin \alpha| = \mu m g \cos \alpha$  в точке B  
(см. след. стр.)

$$\rightarrow |a_y m| + |m g \sin \alpha| = |\mu g \cos \alpha m|$$

$$a_y = g (\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$$

$$\text{or } \frac{mv^2}{R} = g (\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$$

$$v^2 = g R (\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$$

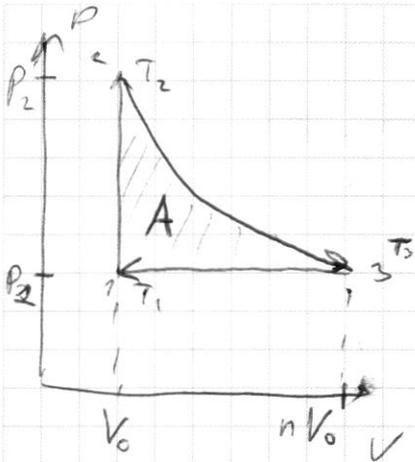
$$v^2 = 10 \cdot 2 (0,64 - 0,6) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 0,8 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} \approx \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{0,8}} \text{ c} = \frac{6}{\sqrt{0,2}} \text{ c} \approx \underline{\underline{13,4 \text{ c}}}$$

Ответ: 1)  $\mu = 0,8$

2)  $T = 13,4 \text{ c}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1 → 2 :  $P_1 V_0 = \nu R T_1$   
 $P_2 V_0 = \nu R T_2$

$Q_{122} = \Delta U = -\frac{3}{2} \nu R T_1 + \frac{3}{2} \nu R T_2 = \frac{3}{2} V_0 (P_2 - P_1)$

3 → 1 :  $P_1 n V_0 = \nu R T_3$   
 $P_2 V_0 = \nu R T_1$

$Q_{301} = P_1 (n-1) V_0 +$

2: 3

$P V^{\frac{5}{3}} = \text{const} = P_1 (n V_0)^{\frac{5}{3}} \rightarrow P = V^{-\frac{5}{3}} (P_1 (n V_0)^{\frac{5}{3}})$

$P_2 V_0^{\frac{5}{3}} = P_1 (n V_0)^{\frac{5}{3}} \rightarrow P_2 = P_1 \cdot n^{\frac{5}{3}}$

$A = \int_{V_0}^{n V_0} P dV = \int_{V_0}^{n V_0} P_1 (n V_0)^{\frac{5}{3}} V^{-\frac{5}{3}} dV = \left( \frac{3}{2} P_1 (n V_0)^{\frac{5}{3}} V^{-\frac{2}{3}} \Big|_{V_0}^{n V_0} \right) =$

$= \left( \dots \right) \left( -\frac{3}{2} (n V_0)^{-\frac{2}{3}} + \frac{3}{2} V_0^{-\frac{2}{3}} \right) = \frac{3}{2} V_0 \left( 1 - n^{-\frac{2}{3}} \right) (P_1 (n V_0)^{\frac{5}{3}}) = \frac{980,128}{474,34} = 660$

$= \frac{3}{2} P_1 V_0 (n^{\frac{5}{3}} - n) - P_1 V_0 (n-1)$

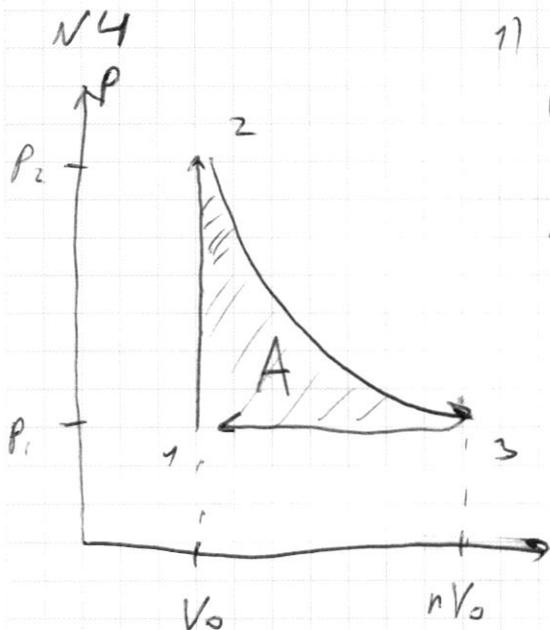
$n = \sqrt[3]{2}$

$Q_{\text{max}} = \frac{3}{2} V_0 (P_2 - P_1) + \frac{3}{2} V_0 P_1 (n^{\frac{5}{3}} - 1)$

$\eta = \frac{A}{Q_{\text{max}}} = \frac{\frac{3}{2} (n^{\frac{5}{3}} - n) - (n-1)}{\frac{3}{2} (n^{\frac{5}{3}} - 1)} = \frac{3(\sqrt[5]{2} - \sqrt[3]{2}) - 2\sqrt[3]{2} + 1}{3\sqrt[5]{2} - 3} = \frac{1,1}{2,8} = \frac{1,1}{1,8} = 0,34$

$= \frac{3\sqrt[5]{2} - 5\sqrt[3]{2} + 2}{3\sqrt[5]{2} - 3} = \frac{12\sqrt[5]{2} - 10\sqrt[3]{2} + 2}{12\sqrt[5]{2} - 3} = \frac{2\sqrt[5]{2} + 2}{12\sqrt[5]{2} - 3} = \frac{2 \cdot 1,4 + 2}{12 \cdot 1,4 - 3} = \frac{4,8}{13,8} = 0,34$

$\approx 0,34$



1) на пр. 12 протекло по уравнению.

$$Q_{\text{heat}} = \Delta U$$

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu RT_2 - \frac{3}{2} \nu RT_1 = \frac{3}{2} \nu_0 (P_2 - P_1)$$

$$P_1 V_0 = \nu RT_1$$

$$P_2 V_0 = \nu RT_2 \quad - \text{от уравн.}$$

$$Q_{\text{heat}} = \frac{3}{2} \nu_0 (P_2 - P_1)$$

2) A - работа газа.

$$A_{23} - |A_{31}| = A.$$

$$pV^{5/3} = \text{const} = P_1 (nV_0)^{5/3} \rightarrow P = V^{-5/3} (P_1 (nV_0)^{5/3})$$

$$P_2 V_0^{5/3} = P_1 (nV_0)^{5/3} \rightarrow P_2 = P_1 \cdot n^{5/3}$$

$$A_{23} = \int_{V_0}^{nV_0} V^{-5/3} (P_1 (nV_0)^{5/3}) dV = P_1 (nV_0)^{5/3} \left( -\frac{3}{2} V^{-2/3} \Big|_{V_0}^{nV_0} \right) =$$

$$= P_1 (nV_0)^{5/3} \left( \frac{3}{2} V_0^{-2/3} - \frac{3}{2} (nV_0)^{-2/3} \right) = \frac{3}{2} P_1 V_0 (n^{5/3} - n)$$

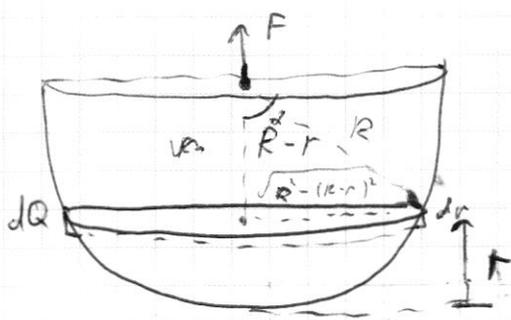
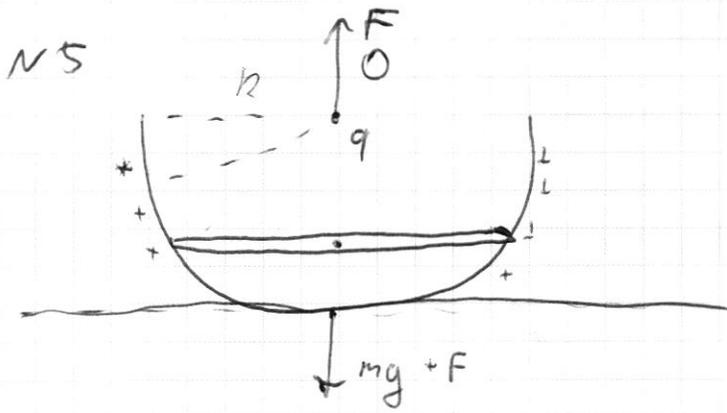
$$|A_{31}| = P_1 \Delta V = P_1 V_0 (n-1)$$

$$A = \frac{3}{2} P_1 V_0 (n^{5/3} - n) - P_1 V_0 (n-1)$$

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{heat}}} = \frac{\frac{3}{2} (n^{5/3} - n) - (n-1)}{\frac{3}{2} (n^{5/3} - 1)} = \frac{3n^{5/3} - 3n - 2n + 2}{3n^{5/3} - 3} =$$

$$= \frac{12\sqrt{2} - 10\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 2}{12\sqrt{2} - 3} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{12\sqrt{2} - 3} = \frac{2 \cdot 1.4 + 2}{12 \cdot 1.4 - 3} \approx 0,34$$

Ответ: 0,34



$$dF = \frac{k dQ q}{(R-r)^2} = \frac{k q \sigma 2\pi \sqrt{R^2 - 2Rr} dr}{(R-r)^2}$$

$$dQ = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi \sqrt{R^2 - 2Rr} dr$$

$$dE_n = \frac{k daq}{R-r}$$

$$F = \int_0^R \frac{k q \sigma 2\pi \sqrt{R^2 - 2Rr}}{(R-r)^2} dr = k q \sigma 2\pi \int_0^R \frac{R^2}{(R-r)^2} \cdot \frac{1}{R-r} dr$$

$$\frac{\sqrt{R^2 - 2Rr}}{R-r} = \frac{\sqrt{R^2 - 2Rr}}{R-r} = \tan \alpha$$

$$E_n = \int_0^R \frac{k q \sigma 2\pi \sqrt{R^2 - 2Rr}}{R-r} dr = \int_0^{\pi/2} \tan \alpha d\alpha \cdot (k q \sigma 2\pi) =$$

$$= A \quad ; \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Ответ: 1)  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} k q \sigma \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} \tan \alpha d\alpha$

2)  $\frac{mg}{mg + \int_0^R \frac{k q \sigma 2\pi \sqrt{R^2 - 2Rr}}{(R-r)^2} dr}$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S = 4\pi R^2$   
 $Q = \sigma S = 4\pi R^2 \sigma$

$dQ = \sigma dS$   
 $k \frac{dQ \cdot q}{R^2} = \Delta F$   
 $R^2 = R^2 - R^2 \sin^2 \alpha = R^2 \cos^2 \alpha$

$dQ = dS \sigma = 2\pi \sqrt{R^2 - 2Rr} \sigma dr$   
 $F_y = F \cos \alpha = F \frac{R-r}{R} dQ = 2\pi r$   
 $R \sin \alpha$   
 $dS = 2\pi \sqrt{R^2 - 2Rr} \cdot dr$

$dF_y = k \frac{dQ \cdot q}{R^2} \cdot \frac{R-r}{R}$   
 $F_y = \int_0^R \frac{2\pi \sqrt{R^2 - 2Rr} \sigma q}{R^3} (R-r) dr = \frac{R-r}{R^3} 2\pi \sigma q \int_0^R \sqrt{R^2 - 2Rr} dr =$   
 $= \frac{R-r}{R^3} 2\pi \sigma q \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{R^2 - 2Rr}$   
 $F_y = \frac{2\pi \sigma k q}{R^3} \int_0^R \sqrt{R^2 - 2Rr} (R-r) dr$

$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$

$$v = v_0 - g \cos \alpha \cdot t$$

$$dv = -g \cos \alpha \cdot dt$$

$$du = \frac{g \sin \alpha}{2} dt$$

$$s.c. \text{ } \Rightarrow m g R = \frac{(M+m)u^2}{2} + \frac{m v^2}{2} + m g R (1 - \cos \alpha)$$

$$m g R \cdot \cos \alpha = \frac{(M+m)u^2}{2} + \frac{m v^2}{2}$$

$$\left( \frac{(M+m)u^2}{2} - \frac{m v^2}{2} \right) = (M+m)u \frac{du}{dt} + m v \frac{dv}{dt}$$

u

h max  $\rightarrow v = 0$  u-max

$$m g R \cos \alpha = \frac{(M+m)u^2}{2} ; \cos \alpha = \frac{(M+m)u^2}{2 m g R}$$

$$u = \int \frac{g \sin \alpha}{2} dt$$

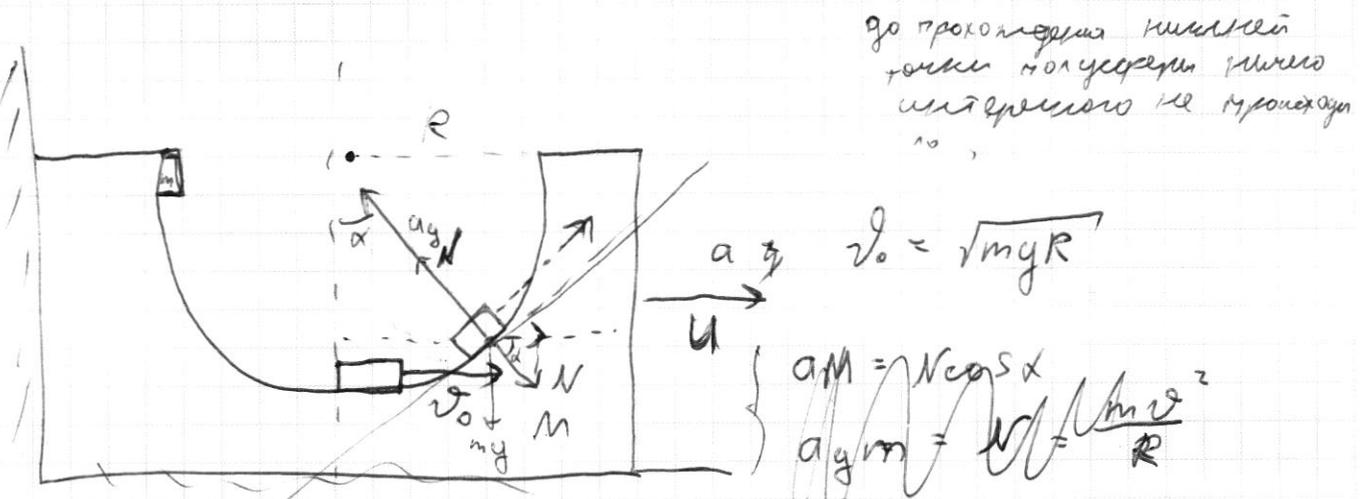
$$m g R \cos \alpha = \frac{4 m u^2}{2} + \frac{m v^2}{2} ; \cos \alpha = \frac{2 u^2}{g R} + \frac{v^2}{2 g R}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} ; \sin \alpha \cos \alpha = \cos \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$a_i = \frac{dv}{dt} = -g \left( \frac{2u}{R} + \frac{v}{2R} \right)$$

$$a_r = \frac{du}{dt} = \frac{2u}{R} + \frac{v}{2R}$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



з.с.э.

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_n = mgR(1 - \cos \alpha)$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_k = \frac{(M+m)U^2}{2}$$

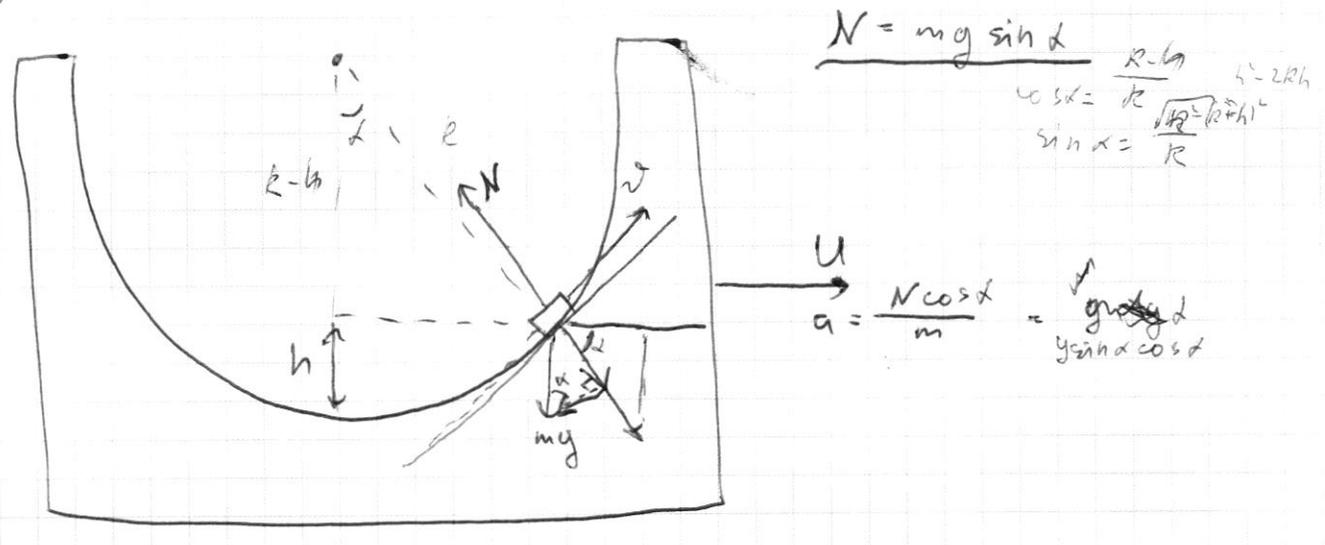
$$E_k^m = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_n = mgR(1 - \cos \alpha)$$

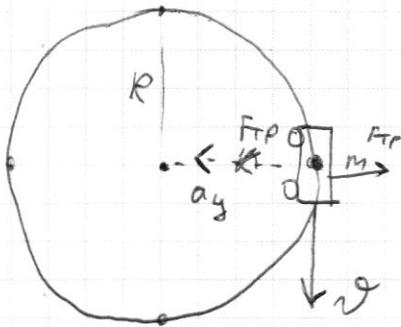
$v$  - скорость в системе отсчёта бруска.

$$mgR = E_k + E_k^m + E_n = \frac{(M+m)U^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + mgR(1 - \cos \alpha)$$

каждо  $\alpha \max \rightarrow \cos \alpha \min$



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



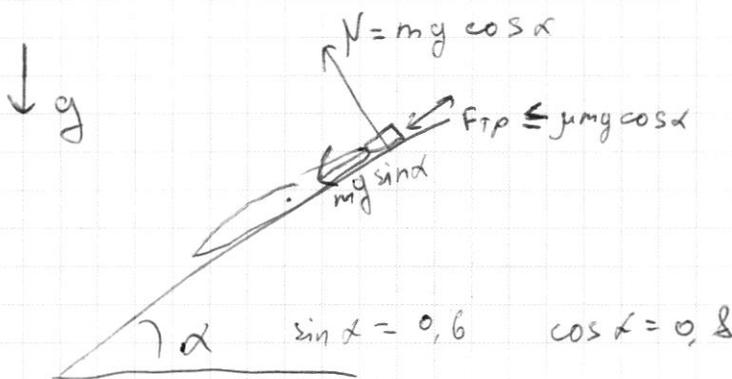
$$a_y = \frac{v^2}{R}, \quad F_{TP} \leq \mu N = \mu mg$$

$$a_y = F_{TP}/m$$

$$\frac{v^2}{R} \leq \mu g \quad \text{из неравенства}$$

$$v_{\max}^2 = \mu g R - \text{макс. скор.}$$

$$\mu = \frac{v_{\max}^2}{g R} = \frac{16}{10 \cdot 2} = 0,8$$



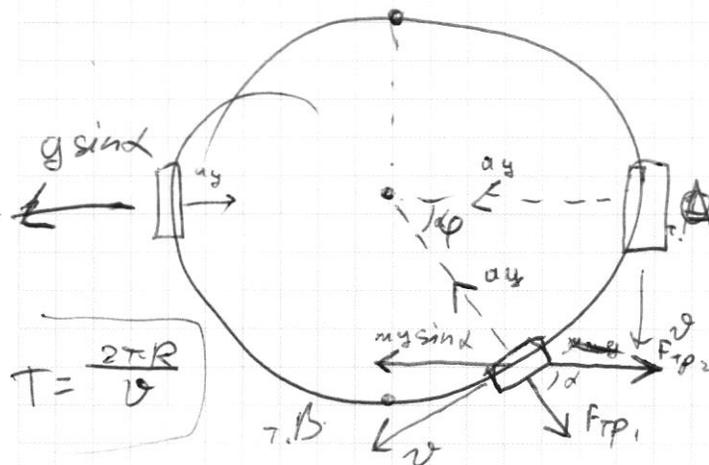
$$\frac{110 \pm 26}{10 \cdot 4 \cdot 4}$$

$$\frac{21^2}{16} = \frac{14}{56} = \frac{16}{196}$$

$$\sqrt{\frac{36}{0,2}} = \sqrt{180} =$$

$$y = 0,8$$

$$\begin{aligned} 180 &= (15+x)^2 = 180 \\ 169 + 26x + x^2 &= 180 \\ 26x + x^2 &= 11 \\ x &\approx \frac{11}{26} \approx 0,4 \\ &15,4 \end{aligned}$$



$v = \text{const.}$  по укл.

$$a_y = \frac{v^2}{R} - \text{const.}$$

$$\begin{cases} F_{TP1} + mg \sin \alpha = 0 \\ a_{y1} + F_{TP1} = 0 \end{cases}$$

$$F_{TP1} + F_{TP2} \leq \mu mg \cos \alpha$$

$$|F_{TP1}| = m \frac{v^2}{R} - \text{const}$$

в т. А.  $|F_{TP1}| + |F_{TP2}| \leq \mu mg \cos \alpha$   
в т. В.  $\sqrt{|F_{TP1}|^2 + |F_{TP2}|^2} \leq \mu mg \cos \alpha$

чтобы  $T_{\min}$  надо  $v_{\max} \rightarrow F_{TP1, \max}$

$$|\vec{F}_{r1} + \vec{F}_{r2}|^2 = F_{r1}^2 + F_{r2}^2 - 2 F_{r1} F_{r2} \cos \alpha = (mg \cos \alpha)^2$$

Обозначим один вектор,  $(F_1)^2 + (F_2)^2 \leq (mg \cos \alpha)^2 \rightarrow$

$$\rightarrow |F_1|^2 \leq (mg \cos \alpha)^2 - |F_2|^2$$

$F_{1 \max}$  когда  $(v_{\max \text{ тогда}})$

$$F_1^2 = (mg \cos \alpha)^2 - F_2^2$$

$$F_2 = mg \sin \alpha$$

$$F_{cr} = (mg \cos \alpha)^2 - (mg \sin \alpha)^2 = (mg)^2 (\mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$F_1 = \frac{mv^2}{R}$$

$$F_1 = \frac{mv^2}{R} \rightarrow v^2 =$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi$$

$$v^2 = 10 \cdot 2 \sqrt{0,8^4 - 0,6^2}$$

$$F_1 = mg \sqrt{\mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{mRg}{R} \sqrt{\mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

$$10^{-3} \cdot 2^3 \sqrt{28 - 6,54} = 10^{-3} \cdot 2 \sqrt{8^4 - 600^2}$$

$$4 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 2 = \frac{1,6}{256}$$