Олимпиада «Физтех» по физике 2022

Класс 10

Вариант 10-03

Шифр

(заполняется секретарём)

1. Камень брошен с некоторой скоростью V_0 под углом $\alpha = 45^0$ к горизонту (см. рис.). Максимальная высота полета камня $H = 10$ м. В конце полета камень падает на горизонтальную крышу, высота которой над точкой старта $h = 7$ м.

1) Найдите начальную скорость V_0 камня.

2) Найдите $\cos\beta$ (см. рис.), здесь β - угол, который вектор скорости образует с горизонтом в момент завершения полета. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

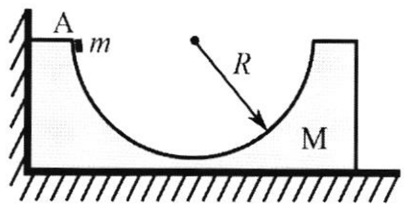
2. Модель автомобиля равномерно движется по окружности радиуса $R = 1,2$ м, лежащей в горизонтальной плоскости. Модель приводится в движение двигателем. Коэффициент трения скольжения шин модели по поверхности $\mu = 0,8$, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

1) За какое минимальное время T автомобиль может проехать четверть окружности?

Модель помещают на наклонную поверхность, составляющую угол $\alpha = 30^0$ с горизонтом.

2) Найдите максимальную скорость V_{MAX}, равномерного движения модели по окружности радиуса $R = 1,2$ м на наклонной поверхности. Коэффициент трения скольжения шин модели по поверхности $\mu = 0,8$.

3. На гладкой горизонтальной поверхности вплотную к вертикальной стенке стоит брусок, в бруске сделано гладкое углубление в форме полусферы радиуса R (см. рис.). Из точки А с нулевой начальной скоростью скользит шайба массы m. Через некоторое время шайба достигает максимальной высоты $H = \dfrac{2R}{3}$, отсчитанной от нижней точки полусферы.

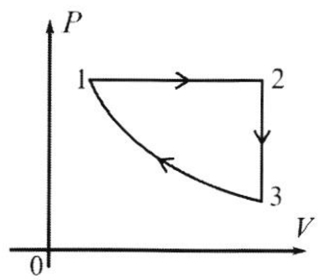


1) Найдите массу M бруска.

2) Найдите максимальную скорость V_{MAX} бруска при дальнейшем движении системы.

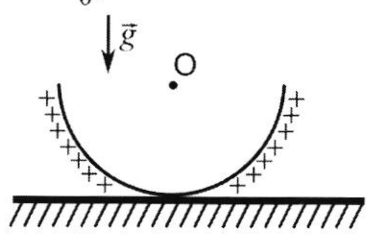
3) С какой по величине силой P брусок действует на горизонтальную поверхность в тот момент, когда его скорость V_{MAX}? Ускорение свободного падения g.

4. С одноатомным идеальным газом проводят циклический процесс, состоящий из изобары 12, изохоры 23 и адиабаты 31 (см. рис.). В изобарическом процессе объем газа увеличивается в $n = 8$ раз.



1) Найдите КПД такого цикла. *Указание: в адиабатическом процессе с одноатомным идеальным газом* $PV^{\frac{5}{3}} = const$.

5. На горизонтальной поверхности лежит однородная полусфера (см. рис.) массы m. Точка O находится на расстоянии R от всех точек полусферы. По поверхности полусферы однородно с поверхностной плотностью σ распределен положительный заряд. В точку O переносят точечный заряд $Q > 0$.



1) Найдите работу A внешней силы при переносе заряда Q из бесконечности в точку O. Электрическая постоянная ε_0.

2) С какой по величине силой P полусфера действует на горизонтальную поверхность после переноса заряда Q из бесконечности в точку О? Ускорение свободного падения g.

Явлениями поляризации пренебрегите.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Дано:

$\alpha = 45^\circ$

$H = 10$ м

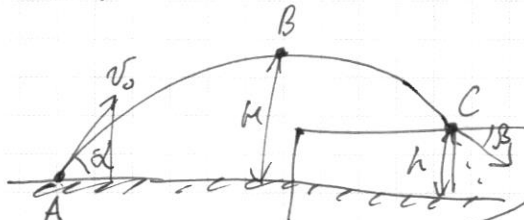
$h = 7$ м

$g = 10$ м/с²

1) v_0 – ?

2) $\cos\beta$ – ?

Реш:



Механическая энергия ~~шара~~ камня в:

– точке A

– точке B (наивысшая точка)

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH + \frac{m(v_0\cos\alpha)^2}{2}$$

где $v_0\cos\alpha$ – горизонтальная скорость камня, которая не меняется.

$$v_0^2 = 2gH + \frac{1}{2}v_0^2$$

– точке C, где v_1 – скорость камня в точке C.

$$\frac{1}{2}v_0^2 = 2gH \Longrightarrow v_0^2 = 4gH \Longrightarrow v_0 = 2\sqrt{gH}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv_1^2}{2} \Longrightarrow v_0^2 = 2gh + v_1^2 \Longrightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

горизонтальная скорость

$$v_1\cos\beta = v_0\cos\alpha \Longrightarrow \sqrt{v_0^2 - 2gh}\,\cos\beta = v_0\cos\alpha \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sqrt{4gH - 2gh}\,\cos\beta = 2\sqrt{gH}\cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{\cancel{2\sqrt{gH}}\ \sqrt{4gH}}{\sqrt{4gH - 2gh}}\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{h}{2H}}}\cos\alpha =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{h}{2H}}}\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{7}{20}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{13}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{130}}{13}$$

Ответ: 1) $v_0 = 2\sqrt{gH} = 20$ м/с;

2) $\cos\beta = \frac{\sqrt{130}}{13}$

2. Дано:

$R = 1,2$ м;

$\mu = 0,8$

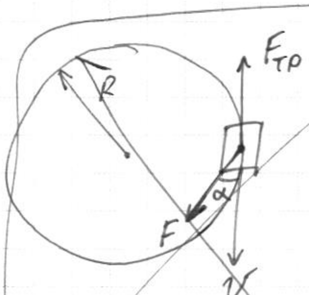
$g = 10$ м/с^2

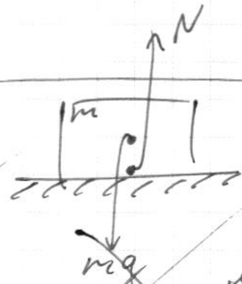
1) T - ?

$\alpha = 30^\circ$

2) V_{max} - ?

Решение:





~~II закон Ньютона по вертикали для моделей:~~

$mg = N \Longrightarrow F_{тр} = \mu N = \mu mg$

$F_{тр} = F\cos\alpha \longrightarrow \mu mg = F\cos\alpha$

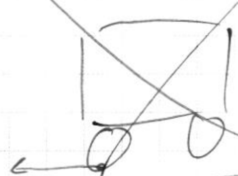
$ma = F\sin\alpha$

$\frac{a}{\mu g} = tg\alpha$; $a = \omega^2 R \Longrightarrow \frac{\omega^2 R}{\mu g} = tg\alpha \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{\mu g\, tg\alpha}{R}}$

$T = \frac{\frac{\pi}{2}}{\omega} = \frac{\pi\sqrt{R}}{2\sqrt{\mu g\, tg\alpha}} = \frac{\pi\sqrt{R}}{2\sqrt{\mu g}}\cdot(tg\alpha)^{-\frac{1}{2}}$

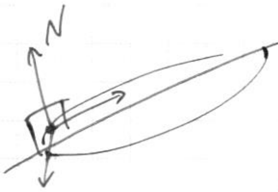
$(T(tg\alpha))' = \frac{\pi\sqrt{R}}{2\sqrt{\mu g}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(tg\alpha)^{-\frac{3}{2}}$

$(T(tg\alpha))' = 0 \Longrightarrow (tg\alpha)^{-\frac{3}{2}} = 0$



$F_{тр}\cos\beta = F$

$\mu mg = m\omega^2 R \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{\mu g}{R}}$



$T = \frac{\frac{\pi}{2}}{\omega} = \frac{\pi\sqrt{R}}{2\sqrt{\mu g}} = \frac{3,14}{2}\cdot\sqrt{\frac{1,2}{0,8\cdot 10}} =$

$\frac{mR^2}{2} =$

$= \frac{3,14}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{20}}$

$p_1 V_1^{\frac{5}{3}} = p_3(8V_1)^{\frac{5}{3}}$

$p_1 = 32p_3$

$\frac{1}{\sqrt[3]{8}^2} = \frac{1}{4}$

$mgR = \frac{mv^2}{2} \Longrightarrow v = \sqrt{2gR}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. Дано:

$R = 1{,}2$ м

$\mu = 0{,}8$

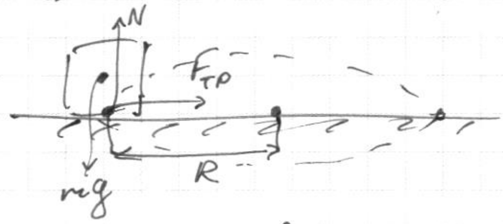
$g = 10$ м/с^2

$\alpha = 30^\circ$

1) T - ?

2) v_{max} - ?

Реш:



1) II з-н Ньютона по вертикали:

$mg = N \longrightarrow F_{тр} = \mu N = \mu mg$

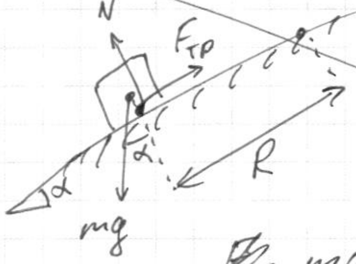
По направлению к центру окружности:

$ma = F_{тр}$, где a - центростремительное ускорение, равное:

$a = \omega^2 R \longrightarrow m\omega^2 R = \mu mg \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{\mu g}{R}}$, где ω - угловая скорость

$T = \frac{\frac{\pi}{2}}{\omega} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \approx 1{,}57\sqrt{\frac{3}{20}}$ - это минимальное время, т.к. ω - максималь $\Leftarrow$ a - максимально $\Leftarrow$ максимальная сила, направленная к центру, это μmg.

~~2)~~



~~II з-н Ньютона по перпендикуляру к поверхности:~~

~~$mg\cos\alpha = N \Longrightarrow F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$~~

~~По направлению к центру:~~

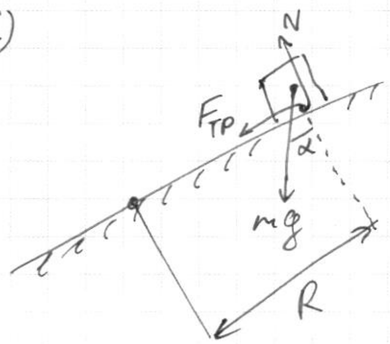
~~$ma_1 = F_{тр} - mg\sin\alpha = mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$;~~

~~$a = \omega^2 R \Longrightarrow \omega^2 R = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{R}}$~~

~~$a_1 = \frac{v_1^2}{R} \Longrightarrow \frac{v_1^2}{R} = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) \Longrightarrow v = \sqrt{Rg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}$~~

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

②



II з-н Нью по ~~верх…~~ перпендикуляру к поверхности:

$mg\cos\alpha = N \Rightarrow F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$

По направлению к центру:

$ma = mg\sin\alpha + F_{тр}$;

$a = \frac{v^2}{R} \Rightarrow m\frac{v^2}{R} = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \Rightarrow v = \sqrt{Rg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} =$

$= \sqrt{1,2 \cdot 10 \cdot \left(\frac{1}{2} + 0,8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \sqrt{6 \cdot (1 + 0,8\sqrt{3})} = \sqrt{6 + 4,8\sqrt{3}}$ м/с

~~От~~ v – макс $\Leftarrow$ a – макс $\Leftarrow$ приложена и сила трения (максимальна) и сила тяжести).

Ответ: 1) $T = 1,57\sqrt{\frac{3}{20}}$ с

2) $v_{MAX} = \sqrt{6 + 4,8\sqrt{3}}$ м/с

---

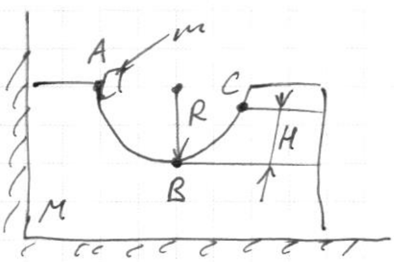
3. Дано: m; R; $H = \frac{2R}{3}$; g

1) M – ?

2) v_{MAX} – ?

3) p – ?

Решение:



Запишем ЗСЭ для шайбы в точках A и B (нижняя точка полусферы:

$mgR = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gR}$, где v – скорость шайбы в точке B.

1) Когда шайба в точке B ~~кин~~ ~~механическая~~ кинетическая энергия относительно центра масс системы шайба-брусок равна: $E_1 = \frac{mM}{m+M} \cdot \frac{(v-0)^2}{2} = \frac{mMv^2}{2(m+M)}$. (скорость бруска равна нулю, т.к пока шайба двигалась к B, она просто прижимала брусок к стенке)

Потом ~~когда~~ пока шайба поднимается к C, она давит на брусок, придавая ~~ей~~ ему скорость. И когда она доходит до точки C, их скорости срав-

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

нивается, из-за чего кинетическая энергия относительно центра масс системы шайба-брусок равняется нулю. Она уходит на потенциальную энергию шайбы: $П_1 = mgH$:

$$\frac{mMv^2}{2(m+M)} = mgH \Rightarrow mMv^2 = mgH\cdot 2(m+M) \Rightarrow$$

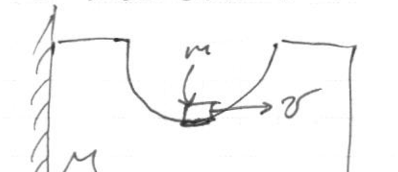
$$\Rightarrow mM(v^2 - 2gH) = 2m^2gH \Rightarrow M = \frac{2mgH}{v^2-2gH} = \frac{m}{\frac{v^2}{2Hg}-1} =$$

$$= \frac{m}{\frac{3v^2}{4Rg}-1} = \frac{m}{\frac{3\cdot 2gR}{4gR}-1} = 2m$$

2) Когда шайба из точки A доходит до точки B, начинается удар с бруском, который заканчивается, когда шайба из точки C опускается до точки B. Очевидно, что V_{MAX} бруска достигается, когда заканчивается соударение с шайбой.

ЗСИ: $mv = -mv_1 + MV_{MAX}$

ЗСЭ: $\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{MV_{MAX}^2}{2}$



Когда соударение начинается; Когда кончается

$v = -v_1 + 2V_{MAX} \Rightarrow v_1 = -v + 2V_{MAX}$

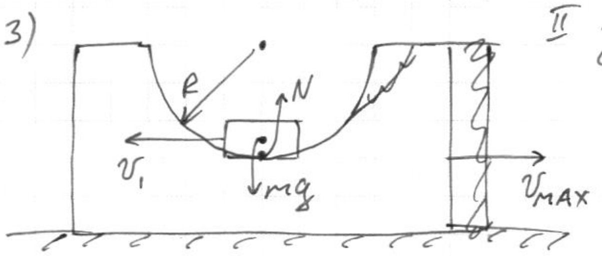
$v^2 = v_1^2 + 2V_{MAX}^2 \Rightarrow v^2 = (-v + 2V_{MAX})^2 + 2V_{MAX}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{v^2} - 4vV_{MAX} + 4V_{MAX}^2 + 2V_{MAX}^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4v_{MAX}(-v + \frac{3}{2}v_{MAX}) = 0;$

$v_{MAX} \neq 0 \Longrightarrow -v + \frac{3}{2}v_{MAX} = 0 \Longrightarrow v_{MAX} = \frac{2}{3}v = \frac{2}{3}\sqrt{2gR}$

3)



II з-н Нь. для шайбы:

$ma = N - mg$, где a – это центростремительное ускорение.

$a = \frac{v_1^2}{R}$; $v_1 = -v + 2v_{MAX} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow v_1 = -v + 2\cdot\frac{2}{3}v = \frac{1}{3}v = \frac{1}{3}\sqrt{2gR} \Longrightarrow a = \frac{2gR}{9R} = \frac{2}{9}g \Longrightarrow$

$\Longrightarrow m\cdot\frac{2}{9}g = N - mg \Longrightarrow N = \frac{11}{9}mg$

Брусок давит на поверхность с силой $P = N + Mg \Longrightarrow$

$\Longrightarrow P = (\frac{11}{9}m + M)g = (\frac{11}{9} + 2)mg = \frac{29}{9}mg = 3\frac{2}{9}\cdot mg$

Ответ: 1) $M = 2m$;

2) $v_{MAX} = \frac{2}{3}\sqrt{2gR}$;

3) $P = \frac{29}{9}mg$;

---

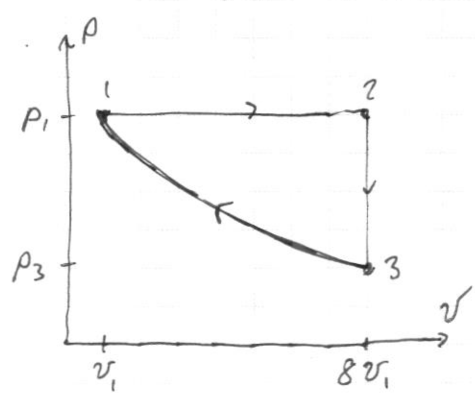
4. Дано:

$n = 8$

1) η - ?

Решение:

$\eta = \frac{A}{Q_н}$, где A – работа газа; $Q_н$ – ~~на~~ количество теплоты нагревателя.



$A = A_{12} + A_{31}$;

$A_{12} = p_1\cdot(8v_1 - v_1) = 7p_1v_1$

$p(v) = \frac{p_1v_1^{\frac{5}{3}}}{v^{\frac{5}{3}}}$ – зависимость давления от объёма на адиабат. участке, где $p_1v_1^{\frac{5}{3}} = const$.

$$A_{31} = \int p\,dv = \int_{8v_1}^{v_1}\frac{p_1v_1^{\frac{5}{3}}}{v^{\frac{5}{3}}}dv = p_1v_1^{\frac{5}{3}}\int_{8v_1}^{v_1}v^{-\frac{5}{3}}dv = -\frac{3}{2}p_1v_1^{\frac{5}{3}}\cdot v^{-\frac{2}{3}}\Big|_{8v_1}^{v_1} =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= -\frac{3}{2} p_1 V_1^{\frac{5}{3}} \left(V_1^{-\frac{2}{3}} - V_1^{-\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} \right) = -\frac{3}{2} p_1 V_1 (1 - 8^{-\frac{2}{3}}) = -\frac{3}{2} p_1 V_1 (1 - \frac{1}{4}) =$

$= -\frac{9}{8} p_1 V_1$

$A = 7 p_1 V_1 - \frac{9}{8} p_1 V_1 = 5\frac{7}{8} p_1 V_1$

$Q_н = Q_{12}$; На адиабат участке $Q_{31} = 0$; $Q_{23} < 0$, т.к $\Delta U_{23} < 0$, т.к $T_3 < T_2$.

$Q_{12} = +A_{12} + \Delta U_{12}$;

$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} \nu R T_2 - \frac{3}{2} \nu R T_1 = \frac{3}{2} (p_1 \cdot 8 V_1 - p_1 V_1) = \frac{21}{2} p_1 V_1$

$Q_{12} = +7 p_1 V_1 + \frac{21}{2} p_1 V_1 = 17{,}5 p_1 V_1$

$Q_н = 3{,}5 p_1 V_1$

$\eta = \frac{\frac{47}{8} p_1 V_1}{17{,}5 p_1 V_1} = \frac{47}{17{,}5 \cdot 8} = \frac{47}{140}$

Ответ: $\eta = \frac{47}{140}$.

---

5. Дано:

m; R; σ; Q; ε_0; q

1) A – ?

2) P – ?

Решение:

1) ЗСЭ: $0 = -A + W$

На бесконечности; в точке O.

$\left(k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right)$

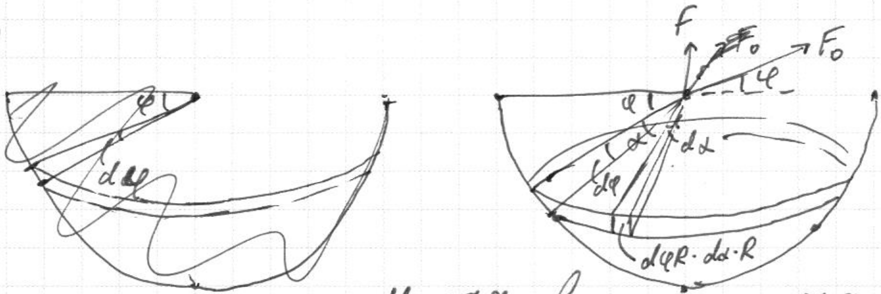
$A = W = k \frac{qQ}{R}$, где q – заряд полусферы;

$q = \sigma \cdot S$, где S – площадь полусферы:

$S = \frac{4\pi R^2}{2} \Longrightarrow q = \sigma \cdot 2\pi R^2 \Longrightarrow W = \frac{\sigma \cdot 2\pi R^2 \cdot Q}{4\pi \varepsilon_0 R} = \frac{\sigma Q R}{2\varepsilon_0} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow A = \frac{\sigma Q R}{2\varepsilon_0}$

2)



Малая вертикальная сила:

$dF = \frac{\sigma \cdot d\varphi R \cdot d\alpha R \cdot Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \sin\varphi = \frac{\sigma Q}{4\pi\varepsilon_0} d\varphi \cdot d\alpha \sin\varphi$

$F = \frac{\sigma Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi = \frac{\sigma Q}{4\pi\varepsilon_0} (2\pi - 0) \cdot (-\cos\pi - (-\cos 0)) =$

$= \frac{\sigma Q}{\varepsilon_0}$ — сила, с которой полусфера действует на заряд Q. С такой же силой заряд действует на полусферу. Тогда:

$P = mg + F = mg + \frac{\sigma Q}{\varepsilon_0}$

Ответ: 1) $A = \frac{\sigma Q R}{2\varepsilon_0}$;

2) $P = mg + \frac{\sigma Q}{\varepsilon_0}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

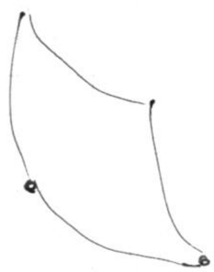
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} \times\ 17{,}5 \\ 8 \\ \hline 140{,}0 \end{array}$$



$$\frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi}{2} R = 1{,}5$$

$$\frac{1{,}5 \cdot 1{,}5}{2} \cdot 4 = 4{,}5$$

$$dS = d\varphi R \cdot d\alpha R$$

$$S = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha = 4\pi R^2$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)