Олимпиада «Физтех» по физике 2022

Класс 10

Вариант 10-02

Шифр

(заполняется секретарём)

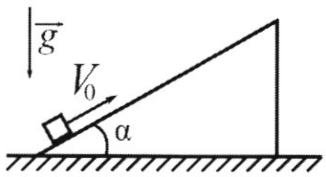
1. Фейерверк массой $m = 1$кг стартует после мгновенной работы двигателя с горизонтальной поверхности, летит вертикально вверх и через $T = 3$с разрывается в высшей точке траектории на множество осколков, которые летят во всевозможных направлениях с одинаковыми по величине скоростями. Суммарная кинетическая энергия осколков сразу после взрыва $K = 1800$Дж. На землю осколки падают в течение $\tau = 10$с.

1) На какой высоте H взорвался фейерверк?

2) В течение какого промежутка времени τ осколки будут падать на землю?

Ускорение свободного падения g=10 м/с^2. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.

2. На гладкой горизонтальной поверхности расположен клин. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтом угол α такой, что $\cos\alpha = 0,6$. Шайбе, находящейся на наклонной поверхности клина, сообщают некоторую начальную скорость V_0 (см. рис.), далее шайба безотрывно скользит по клину и поднимается на максимальную высоту



$H = 0,2$м. Масса клина в два раз больше массы шайбы. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

1) Найдите начальную скорость V_0 шайбы.

2) Найдите скорость V клина, в тот момент, когда шайба вернется в точку старта на клине. Массы шайбы и клина одинаковы.

3. По внутренней поверхности проволочной сферы равномерно движется модель автомобиля. Движение происходит в горизонтальной плоскости большого круга. Сила, с которой модель действует на сферу, в два раза больше силы тяжести, действующей на модель. Модель приводится в движение двигателем. Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

1) Найдите ускорение a модели.

2) Вычислите минимальную допустимую скорость V_{MIN} равномерного движения модели по окружности в плоскости большого круга, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45^0$. Коэффициент трения скольжения шин по поверхности сферы $\mu = 0,8$, радиус сферы $R = 1$м. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

4. Один моль одноатомного идеального газа участвует в цикле 1-2-3-1 (см. рис.), участок 1–2 – дуга окружности с центром в точке 4. Считать заданными давление P_1 и объём V_1.

1) Какое количество Q теплоты подведено к газу в процессе расширения?

2) Найдите работу A газа за цикл.

3) Найдите КПД η цикла.

5. Заряд Q >0 однородно распределен по сфере радиуса R. В первом опыте на расстоянии $3R$ от центра сферы помещают небольшой по размерам шарик с зарядом q >0.

1) Найдите силу F_1, действующую на заряженный шарик.

Во втором опыте заряд q однородно распределяют по стержню длины R, стержень помещают на прямой, проходящей через центр заряженной сферы. Ближайшая к центру сферы точка стержня находится на расстоянии $3R$ от центра.

2) Найдите силу F_2, с которой заряженный стержень действует на заряженную сферу.

Все силы, кроме кулоновских, считайте пренебрежимо малыми. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона k. Явлениями поляризации пренебрегите.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

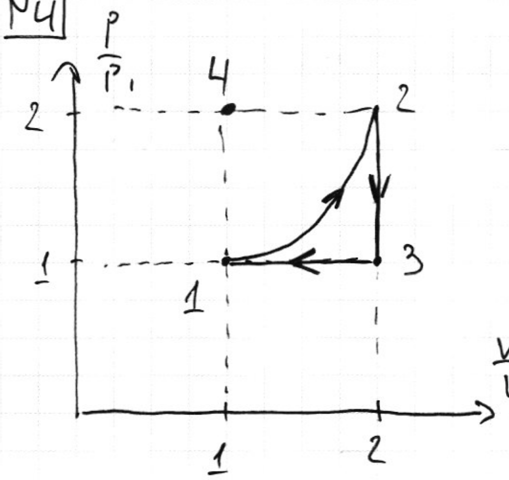
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



1) Газ будет расширяться на участке 1-2.

I начало Термодинамики для 1-2

$$Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12}$$

· Работа газа это $A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$, тоесть площадь под графиком

$$\Rightarrow A_{12} = p_1V_1 + p_1V_1 - \frac{1}{4}\pi p_1V_1 = p_1V_1\left(2 - \frac{\pi}{4}\right)$$

· $\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1)$

из уравн. Менделеева-Клапейр.:

$p_1V_1 = \nu RT_1$; где T_1 и T_2 - температуры

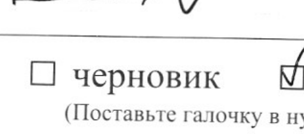
$2p_1 \cdot 2V_1 = \nu RT_2$; в точках 1 и 2 соответсвенно.

$$\Rightarrow \Delta U_{12} = \frac{3}{2}(\nu RT_2 - \nu RT_1) = \frac{3}{2}(4p_1V_1 - p_1V_1) = \frac{3}{2}\cdot 3p_1V_1 = \frac{9}{2}p_1V_1$$

$$\Rightarrow Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = p_1V_1\left(2 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{9}{2}p_1V_1 = p_1V_1\left(6{,}5 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{Q_{12} = p_1V_1\left(6{,}5 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

2) Работа газа за цикл можно найти как площадь внутри цикла



В нашем случае $\boxed{A_{цикл} = p_1V_1 - \frac{\pi}{4}p_1V_1 = p_1V_1\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}$

работа газа за цикл

3) К газу тепло будут подводить только на участке 1 - 2, т.к. на участке 2 - 3 изохорическое охлаждение => тепло отводят, а на участке 3 - 1 изобарное охлаждение => тепло отводят.

=> Суммарное тепло подведённое к газу это тепло подведённое на участке 1 - 2; то есть Q_{12}.

Тогда $\eta = \frac{A_{цикл}}{Q_{12}} = \frac{p_1V_1\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}{p_1V_1\left(6{,}5 - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{4-\pi}{26-\pi} \approx \frac{1}{23} \approx 0{,}04$

$\Rightarrow \boxed{\eta = 0{,}04 \text{ или } 4\%}$

Ответ: $Q_{12} = p_1V_1\left(6{,}5 - \frac{\pi}{4}\right)$

$A_{цикл} = p_1V_1\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

$\eta = 0{,}04$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $g=10\,\frac{м}{с^2}$

$m=1кг$

$T=3с$

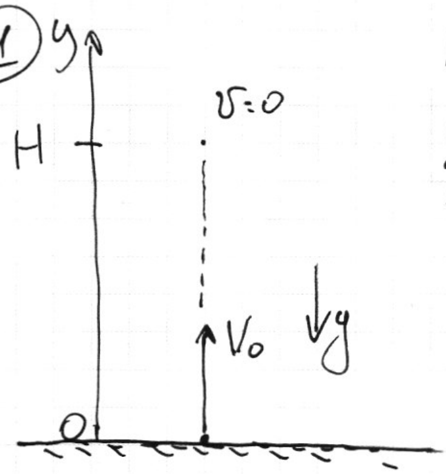
$K=1800Дж$

$\tau=10с$

$H-?$

$\tau_1-?$

(1)



В верхней т. траектории скорость равна 0.

Пусть внизу скорость равна v_0, направленная вертикально вверх.

1) $v_y = v_0 - gt$ - закон изменения скорости от времени

$v_y=0$, $t=T$ - верхняя точка

$\rightarrow 0 = v_0 - gT$

$\rightarrow \boxed{v_0 = gT}$

2) $y = v_0 t - g\frac{t^2}{2}$ - зависимость координаты y от времени.

$y=H$, $t=T$ - верхняя точка

$\rightarrow H = v_0 T - \frac{gT^2}{2} = gT^2 - \frac{gT^2}{2} = gT^2\cdot\frac{1}{2}$

$\boxed{H = \frac{gT^2}{2} = \frac{10\cdot 3^2}{2} = 45м}$ - высота на которой взорвался фейерверк.

(2) Пусть скорость каждого осколка v, а масса Δm, тогда

$\Delta E = \frac{\Delta m v^2}{2}$, $K = \sum \Delta E = \sum \frac{\Delta m v^2}{2} = \frac{v^2}{2}\sum \Delta m = \frac{mv^2}{2}$,

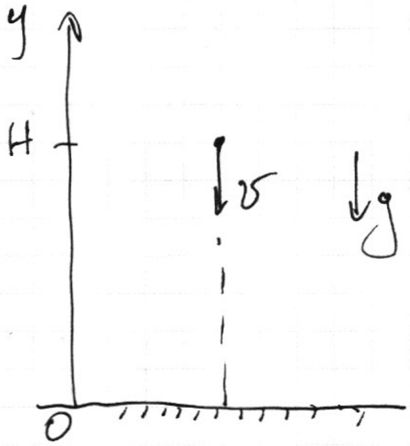
кин. энерг. одного осколка

где m - масса фейерверка до и после взрыва

$$K = \frac{m v^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$ - скорости осколков

$$v = 60\ \frac{м}{с}$$

③ Самым первым на землю упадёт осколок у которого скорость будет направлена вертикально вниз



Пусть он упадёт через время τ_1

Тогда $0 = H - v\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}$

$$\frac{g}{2}\tau_1^2 + v\tau_1 - H = 0$$

$$\tau_1 = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 4 \cdot \frac{g}{2} \cdot H}}{g}$$

$$\tau_1 = \frac{\sqrt{v^2 + 2gH} - v}{g} = \frac{\sqrt{60^2 + 2 \cdot 10 \cdot 45} - 60}{10}$$

$$\tau_1 = \frac{\sqrt{3600 + 900} - 60}{10} = \frac{\sqrt{4500} - 60}{10} =$$

$$\tau_1 = \frac{\sqrt{9 \cdot 5 \cdot \cdot 10} - 60}{10} = 3\sqrt{5} - 6 =$$

$$\boxed{\tau_1 \approx 3 \cdot 2{,}2 - 6 = 0{,}6\ с}$$

Время после взрыва через которое первый осколок упадёт на землю

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

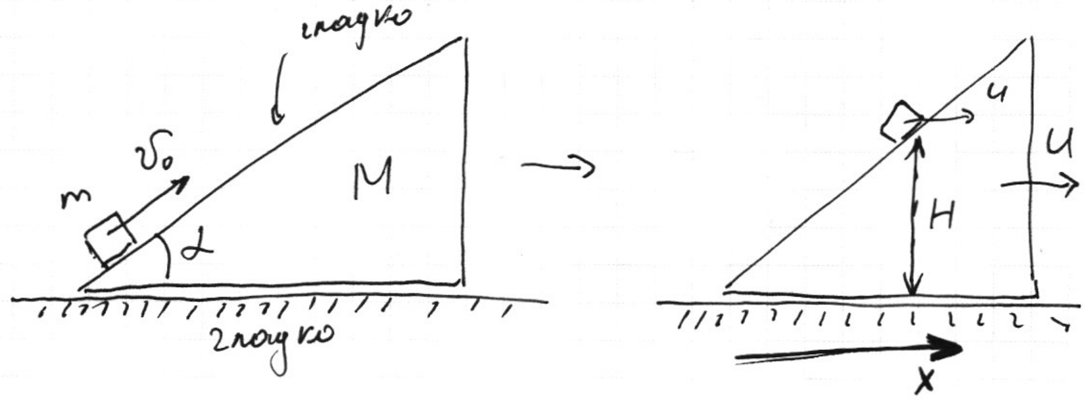
$\cos\alpha = 0{,}6$

$H = 0{,}2$ м

v_0 - ?

v - ?

$M = 2m$ (клин), m — шайба



1) Т.к. шайба скользит по клину без отрыва, то в верхней точке (на высоте H) скорость шайбы будет равна скорости клина, и равна U (направлена горизонтально)

т.к. поверхность гладкая, то вдоль горизонт. оси x внешних сил на систему „шайба + клин" нет

$\Rightarrow P_x = const$ - импульс системы по оси x

ЗСИ для сист. „шайба + клин" OX:

$$m v_0 \cos\alpha = (m+M)U$$

$$U = \frac{m}{m+M} v_0 \cos\alpha = \frac{1}{3} v_0 \cos\alpha$$

2) ЗСЭ: $\frac{m v_0^2}{2} = mgH + \frac{(m+M)U^2}{2}$; $M = 2m$

$$v_0^2 = 2gH + 3U^2 = 2gH + 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot v_0^2 \cos^2\alpha$$

$$v_0^2 = 2gH + \frac{1}{3} v_0^2 \cos^2\alpha$$

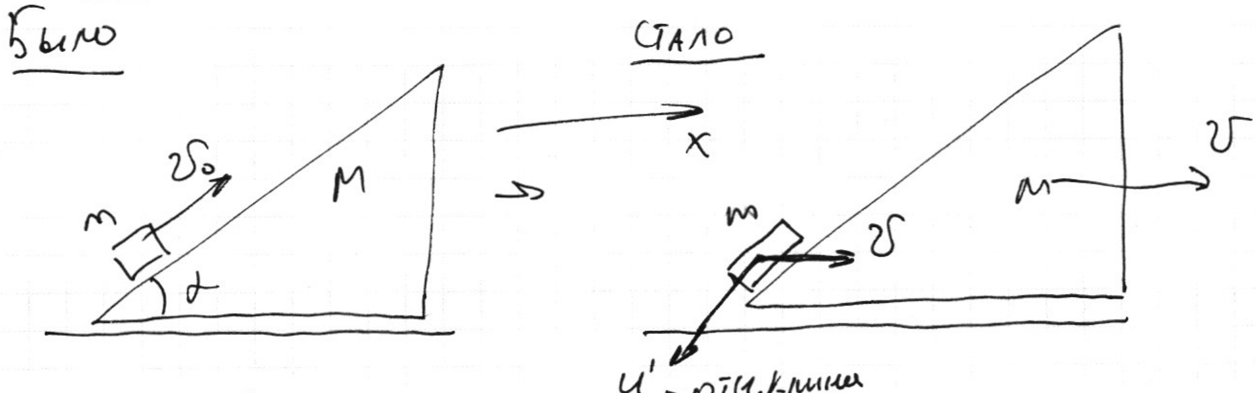
$$v_0^2 = 2gH + \frac{1}{3} v_0^2 \cos^2\alpha$$

$$v_0^2\left(1 - \frac{1}{3}\cos^2\alpha\right) = 2gH$$

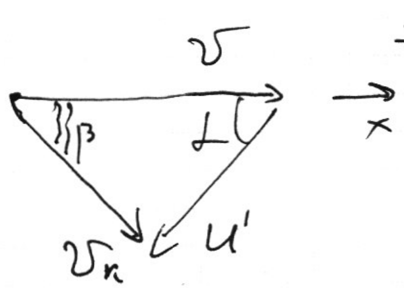
$$v_0 = \sqrt{\frac{2gH}{1-\frac{1}{3}\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 0{,}2}{1-\frac{1}{3}\cdot 0{,}6^2}} = \sqrt{\frac{4}{1-0{,}12}} = \frac{2}{\sqrt{0{,}88}}$$

$$\boxed{v_0 = \frac{2}{\sqrt{0{,}88}} \approx \frac{2}{0{,}9} = \frac{20}{9} \approx 2{,}2\ \frac{м}{с}}$$

2) M = m



Когда шайба вернётся в точку старта её скорость можно будет представить как $\vec{v}_к = \vec{v} + \vec{u}'$, где v - скорость клина u' - скорость шайбы относительно клина.



1) ЗСИ ox: $m v_0 \cos\alpha = m v_к \cos\beta + Mv$

$m v_0 \cos\alpha = m(v - u'\cos\alpha) + Mv$; $m = M$

$$\boxed{v_0 \cos\alpha = 2v - u'\cos\alpha}$$

$v_к \cos\beta = v - u'\cos\alpha$

2) ЗСЭ: $\boxed{\frac{m v_0^2}{2} = \frac{M v^2}{2} + \frac{m v_к^2}{2}}$

3) $v_к^2 = v^2 + u'^2 - 2 v u' \cos\alpha$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1): $v_0 \cos\alpha = 2v - u' \cos\alpha$

$\rightarrow u' = \frac{2v}{\cos\alpha} - v_0$; $u'\cos\alpha = 2v - v_0\cos\alpha$

(2): $\frac{m v_0^2}{2} = \frac{M v^2}{2} + \frac{m v_k^2}{2}$

(3): Th. cos, $v_k^2 = v^2 + u'^2 - 2vu'\cos\alpha$

(4): $M = m$

$\rightarrow v_0^2 = v^2 + v_k^2$

$v_0^2 = v^2 + v^2 + u'^2 - 2vu'\cos\alpha$

$v_0^2 = 2v^2 + u'^2 - 2vu'\cos\alpha$

$$v_0^2 = 2v^2 + \left(\frac{2v}{\cos\alpha} - v_0\right)^2 - 2v\cdot(2v - v_0\cos\alpha)$$

$$\cancel{v_0^2} = 2v^2 + \frac{4v^2}{\cos^2\alpha} - \frac{4vv_0}{\cos\alpha} + \cancel{v_0^2} - 4v^2 + 2vv_0\cos\alpha$$

$$0 = -2v^2 + \frac{4v^2}{\cos^2\alpha} - \frac{4vv_0}{\cos\alpha} + 2vv_0\cos\alpha \quad \Big| : 2v$$

$$0 = -v + \frac{2v}{\cos^2\alpha} - \frac{2v_0}{\cos\alpha} + v_0\cos\alpha$$

$0{,}216 = \cos^3\alpha$

$0{,}36 = \cos^2\alpha$

$\cos\alpha = 0{,}6$

$$v\left(1 - \frac{2}{\cos^2\alpha}\right) = v_0\left(\cos\alpha - \frac{2}{\cos\alpha}\right) \quad \Big| \cdot \cos^2\alpha$$

$0{,}420 - 0{,}216 = 0{,}504$

$$v(\cos^2\alpha - 2) = v_0(\cos^3\alpha - 2\cos^2\alpha)$$

$2 - 0{,}36 = 1{,}64$

$$v = v_0 \frac{\cos^3\alpha - 2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - 2} = v_0 \frac{0{,}216 - 2\cdot 0{,}36}{0{,}36 - 2} = \frac{0{,}504}{1{,}64}$$

$$\boxed{v \approx 0{,}35 v_0}$$

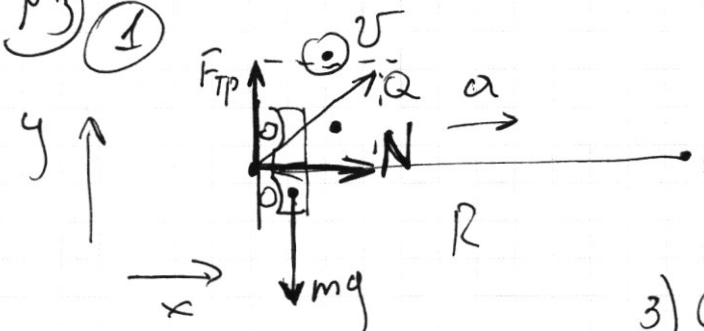
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\boxed{v = 0{,}35 v_0} = 0{,}77 \frac{м}{с}$$

Ответ: 1) $v_0 = 2{,}2 \frac{м}{с} = \sqrt{\dfrac{2gH}{1 - \frac{1}{3}\cos^2\alpha}}$

2) $v = 0{,}35 v_0 = 0{,}77 \frac{м}{с}$

№3) ①



II з-н Ньютона

1) $oy: F_{тр} - mg = 0$

2) $ox: N = ma$

3) $Q = \sqrt{N^2 + F_{тр}^2}$ – сила с которой модель действует на сферу. и сфера на модель по III з-н. Ньютона

4) $Q = 2mg$

---

1) $F_{тр} = mg$

2) $N = ma$

$\rightarrow$ 3), 4): $\sqrt{(ma)^2 + (mg)^2} = 2mg$

$$\sqrt{a^2 + g^2} = 2g$$

$$a^2 + g^2 = 4g^2$$

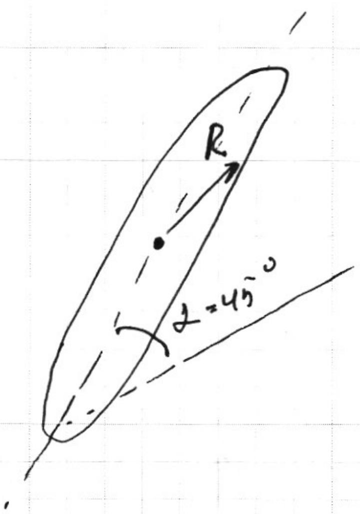
$$a^2 = 3g^2$$

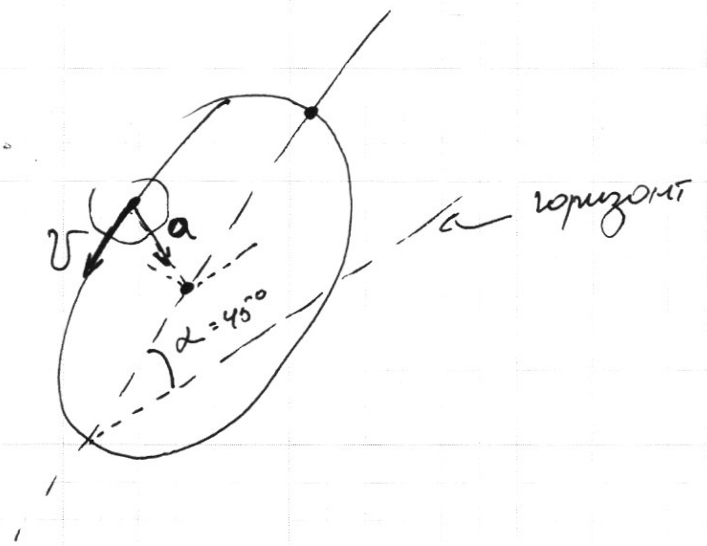
$$\boxed{a = g\sqrt{3} \approx 17{,}3 \frac{м}{с^2}}$$

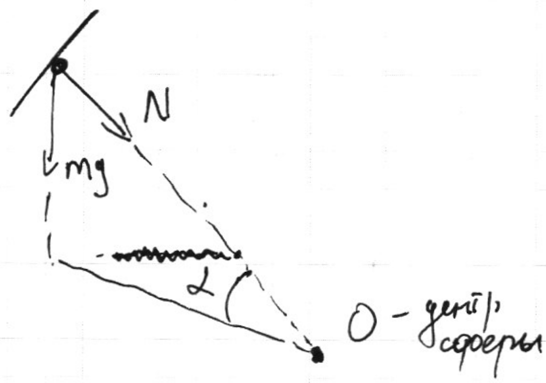
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

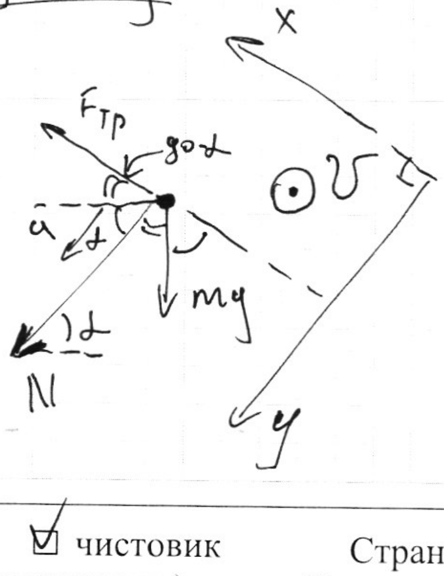
2







Вид сбоку



II з-н. Ньютона

1) $Ox:\ F_{тр} - mg\cos\alpha = 0$

2) $Oy:\ ma = N + mg\sin\alpha$

3) $a = \frac{v^2}{R}$ – центростремит. ускор.

4) $F_{тр} \le \mu N$

$\Rightarrow F_{тр} = mg\cos\alpha$

$N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\sin\alpha\right)$

$\Rightarrow mg\cos\alpha \le \mu m\left(\frac{v^2}{R} - g\sin\alpha\right)$

$\mu\frac{v^2}{R} - \mu g\sin\alpha \ge g\cos\alpha$

$\mu\frac{v^2}{R} \geqslant g(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)$

$v \geqslant \sqrt{\frac{1}{\mu}\cdot gR(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}$

$$\rightarrow v_{min} = \sqrt{\frac{1}{\mu}gR(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{0{,}8}\cdot 10\cdot 1\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4}\cdot 10\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1{,}8} = \sqrt{\frac{50}{8}\cdot 1{,}8\cdot\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{50}{8}\cdot\frac{18}{10}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5\cdot 18}{8}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{45}{4}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{9\cdot 5}{4}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{5\sqrt{2}} \approx \frac{3}{2}\sqrt{7} \approx \frac{3}{2}\cdot 2{,}6 \approx 3{,}9\ \frac{м}{с}$$

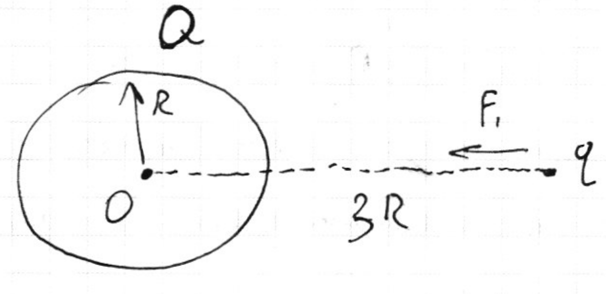
$$\boxed{v_{min} = \sqrt{\frac{1}{\mu}gR(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} \approx 3{,}9\ \frac{м}{с}}$$ – min скорость при которой машина поедет по такому кругу

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

1

F_1 - ?



Для нахождения силы F_1 воспользуемся методом электростатических изображений. Если мы сможем найти изображение заряда q в сфере и заменить сферу на точечный заряд таким образом, чтобы не изменить поля вокруг, то тогда по теореме о единственности мы сможем доказать что эти две системы будут эквивалентны.

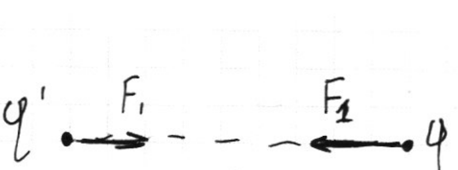
Внутри сферы $E = 0$, $\Rightarrow \varphi = const$, для удобства будем расчитывать потенциал т. O (центра сферы)

$$\varphi_0 = \frac{KQ}{R} + \frac{kq}{3R}$$ – это будет потенциал в центре сферы, а так же и на поверхности.

Заменим сферу на точечный заряд помещённый в центр (в т. O) в силу симметрии. Тогда на расстоянии R от себя он должен давать такой же потенциал, как и система „сфера + q"

$$\Rightarrow \frac{Kq'}{R} = \varphi_0 = \frac{KQ}{R} + \frac{Kq}{3R}$$

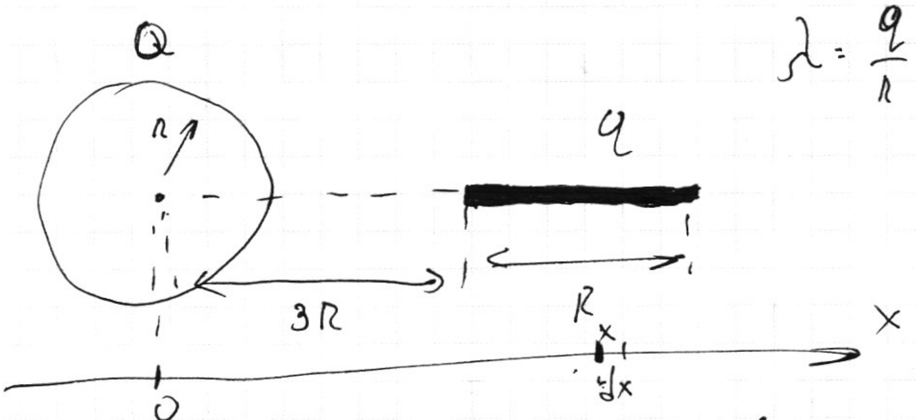
$$\boxed{q' = Q + \frac{q}{3}}$$



$$\boxed{F_1 = \frac{Kqq'}{(3R)^2} = \frac{K(Q+\frac{q}{3})q}{9R^2}}$$

(2)

$\lambda = \frac{q}{R}$ — линейная плотн. заряда



Воспользуемся аналогичным методом, что и в пункте 1, но теперь разобьём стержень на маленькие части dx, зарядом $\lambda dx = dq$ и найдём изображение каждого.

$$\frac{K\Delta q(x)}{R} = \frac{KQ}{R} + \frac{Kdq}{x}$$

$\Delta q(x) = Q + \frac{R}{x}dx\lambda$; где $\Delta q(x)$ — изображение кусочка dx на расстоянии x от центра

~~Воспользуемся аддитивностью эл. поля. поэтому сложим~~ все $\Delta q(x)$ и это будет суммарный заряд, который должен оказаться в центре сферы.

$$q' = \sum \Delta q(x) = \sum Q + \frac{R}{x}dx\lambda = \sum Q + \sum R\lambda\frac{dx}{x},$$

заметим, что $\frac{R}{dx}$ — число кусочков $\Delta q \to \infty$

$\Rightarrow \sum Q \to \infty$, $F_2 = \frac{KQq}{\cdot}$

$\Rightarrow F_2 \to \infty$

$x^{-1} : -x^{-2}$ $\qquad 1 \; x^{-2}$ $\quad -\frac{1}{x^{-1}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Суммарная сила F_2 будет складываться из сил взаимодействия маленьких изображений с их кусочками стержней.

$$\Delta F_2 = \frac{Kdq(x)\cdot dq}{x^2} = \frac{K\left(Q + R\lambda\frac{dx}{x}\right)\cdot \lambda dx}{x^2}$$

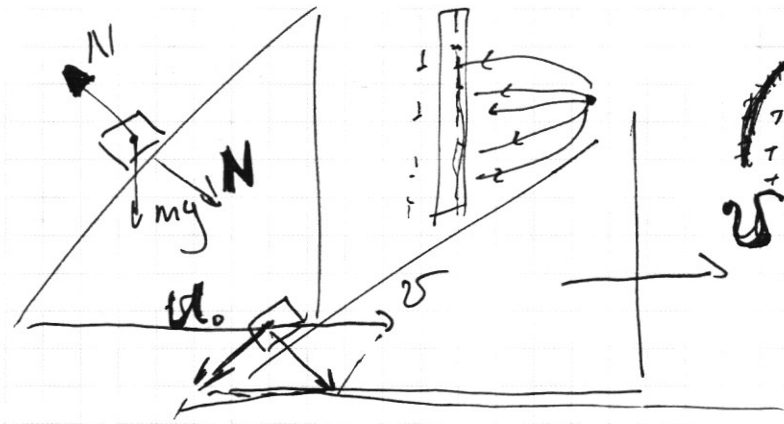
$$\Delta F_2 = \frac{KQ\lambda dx}{x^2} = \frac{KQq}{R}\cdot\frac{dx}{x^2}$$

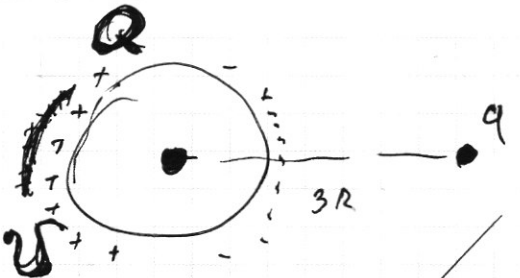
$$F_2 = \sum \Delta F_2 = \int_{3R}^{4R} \frac{KQq}{R}\cdot\frac{dx}{x^2} = -\frac{KQq}{R}\left(\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{3R}^{4R}$$

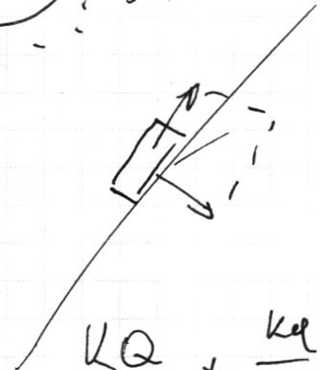
$$F_2 = -\frac{KQq}{R}\cdot\left(\frac{1}{4R}\right) - \left(-\frac{KQq}{R}\cdot\left(\frac{1}{3R}\right)\right) =$$

$$\boxed{F_2 = \frac{KQq}{R^2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{KQq}{12R^2}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





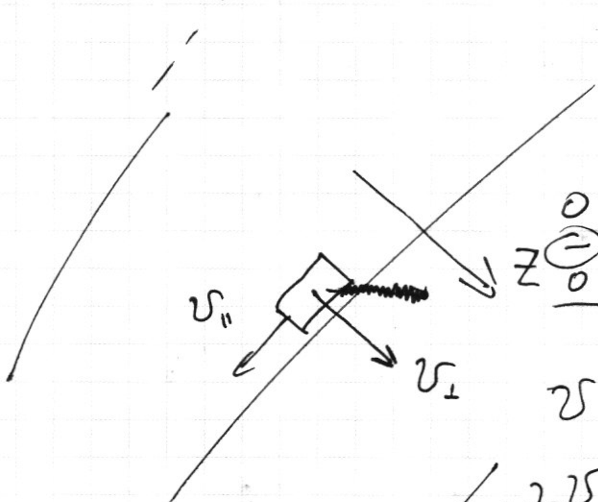


$\uparrow v_0$

$\downarrow v$

$$\frac{kQ}{R} + \frac{kq}{3R} = \frac{kq'}{R}$$

$$Q + \frac{q}{3} = q'$$



$$0 = H + v_0 t_1 - g\frac{t_1^2}{2}$$

$$0 = H - v t_2 - g\frac{t_2^2}{2}$$

$$v(t_1+t_2) + \frac{g(t_2^2-t_1^2)}{2} = 0$$

$$2v(t_1+t_2) = g(t_1^2-t_2^2) = g(t_1+t_2)(t_1-t_2)$$

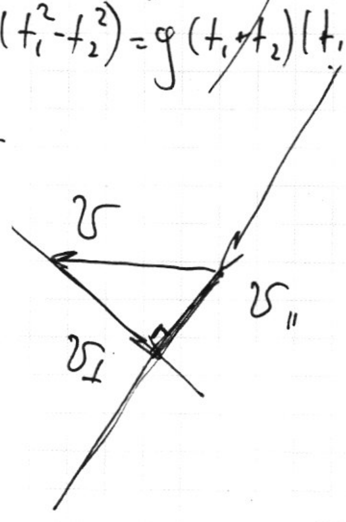
u

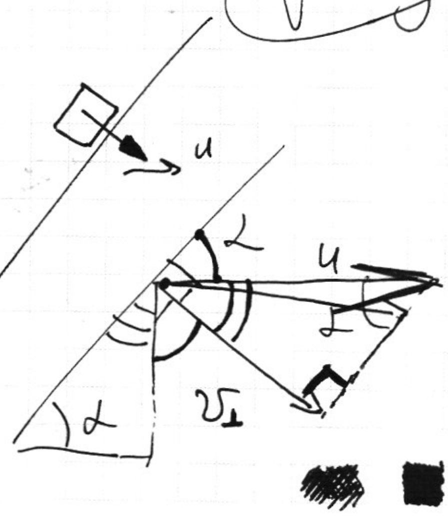
u

$$v = \frac{g\tau}{2}$$

OZ:

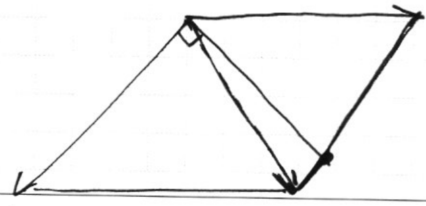
$$\tau = \frac{2v}{g}$$





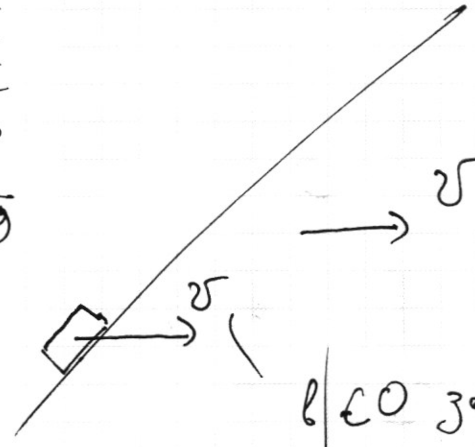
$$v_{\perp} = u\sin\alpha$$

$$v_{\perp} = v_z$$



$$\begin{array}{r} 2{,}7 \\ \times\ 2{,}7 \\ \hline 189 \\ 54\ \ \\ \hline 7{,}29 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2{,}6 \\ \times\ 2{,}6 \\ \hline 156 \\ +\ 52\ \ \\ \hline 6{,}76 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ 28 \\ \hline 224 \\ 56\ \ \\ \hline 784 \end{array}$$



$ma = N + mg\cos(90-\alpha)$

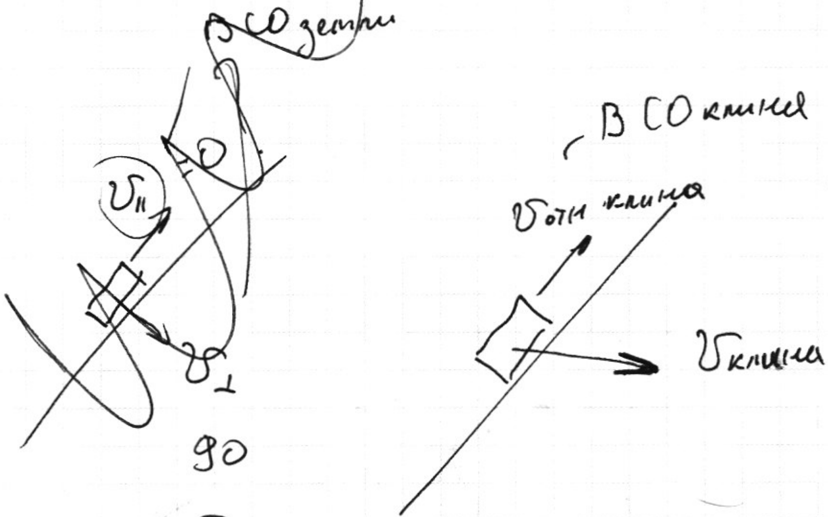
$ma = N + mg\sin\alpha$

$m\frac{v^2}{R} = N + mg\sin\alpha$

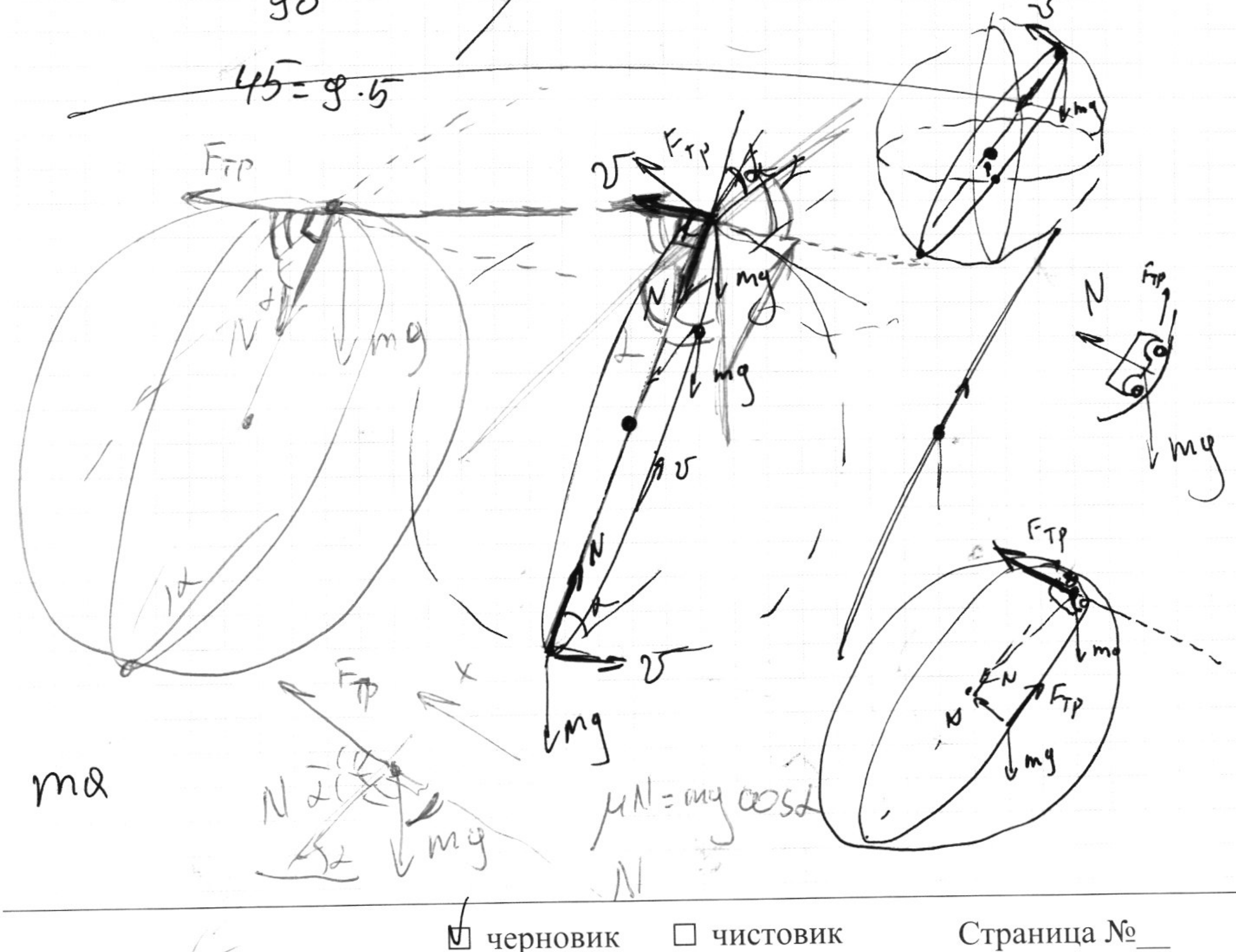
$\mu N \geqslant mg\cos\alpha$

$\mu\left(m\frac{v^2}{R} - mg\sin\alpha\right) \geqslant mg\cos\alpha$

$\mu\frac{v^2}{R} - \mu g\sin\alpha \geqslant g\cos\alpha$



$45 = 9 \cdot 5$



ma

$\mu N = mg\cos\alpha$

N

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)