

Олимпиада «Физтех» по физике 2022

Класс 10

Вариант 10-02

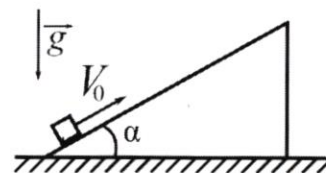
Шифр

(заполняется секретарём)

1. Фейерверк массой $m = 1 \text{ кг}$ стартует после мгновенной работы двигателя с горизонтальной поверхности, летит вертикально вверх и через $T = 3 \text{ с}$ разрывается в высшей точке траектории на множество осколков, которые летят во всевозможных направлениях с одинаковыми по величине скоростями. Суммарная кинетическая энергия осколков сразу после взрыва $K = 1800 \text{ Дж}$. На землю осколки падают в течение $\tau = 10 \text{ с}$.

- 1) На какой высоте H взорвался фейерверк?
- 2) В течение какого промежутка времени τ осколки будут падать на землю? Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.

2. На гладкой горизонтальной поверхности расположен клин. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтом угол α такой, что $\cos \alpha = 0,6$. Шайбе, находящейся на наклонной поверхности клина, сообщают некоторую начальную скорость V_0 (см. рис.), далее шайба безотрывно скользит по клину и поднимается на максимальную высоту



$H = 0,2 \text{ м}$. Масса клина в два раза больше массы шайбы. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

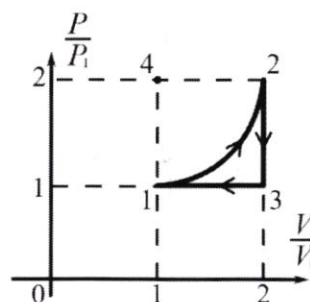
- 1) Найдите начальную скорость V_0 шайбы.
- 2) Найдите скорость V клина, в тот момент, когда шайба вернется в точку старта на клине. ~~Массы шайбы и клина одинаковы.~~

3. По внутренней поверхности проволочной сферы равномерно движется модель автомобиля. Движение происходит в горизонтальной плоскости большого круга. Сила, с которой модель действует на сферу, в два раза больше силы тяжести, действующей на модель. Модель приводится в движение двигателем. Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

- 1) Найдите ускорение a модели.
- 2) Вычислите минимальную допустимую скорость V_{MIN} равномерного движения модели по окружности в плоскости большого круга, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45^\circ$. Коэффициент трения скольжения шин по поверхности сферы $\mu = 0,8$, радиус сферы $R = 1 \text{ м}$. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

4. Один моль одноатомного идеального газа участвует в цикле 1-2-3-1 (см. рис.), участок 1-2 – дуга окружности с центром в точке 4. Считать заданными давление P_1 и объём V_1 .

- 1) Какое количество Q теплоты подведено к газу в процессе расширения?
- 2) Найдите работу A газа за цикл.
- 3) Найдите КПД η цикла.



5. Заряд $Q > 0$ однородно распределен по сфере радиуса R . В первом опыте на расстоянии $3R$ от центра сферы помещают небольшой по размерам шарик с зарядом $q > 0$.

- 1) Найдите силу F_1 , действующую на заряженный шарик.

Во втором опыте заряд q однородно распределяют по стержню длины R , стержень помещают на прямой, проходящей через центр заряженной сферы. Ближайшая к центру сферы точка стержня находится на расстоянии $3R$ от центра.

- 2) Найдите силу F_2 , с которой заряженный стержень действует на заряженную сферу.

Все силы, кроме кулоновских, считайте пренебрежимо малыми. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона k . Явлениями поляризации пренебрегите.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.) Если V_0 - начальная скорость фейерверка,

$$V_0 = gT$$

$$H = \frac{V_0^2}{2g} = \frac{g^2 T^2}{2g} = \frac{g T^2}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ м}$$

2.) Пусть V - скорость, с которой разлетелись осколки. Время t равно времени, через которое на землю упадет последний осколок

$$\text{Тогда } K = \frac{mV^2}{2} \Leftrightarrow V = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1800}{2}} = \sqrt{3600} = 60 \text{ м/с}$$

Первым на землю упадет осколок, у которого скорость сразу после взрыва будет направлена вертикально вниз.



Пусть скорость этого осколка прямо перед падением на землю равна V_k . По

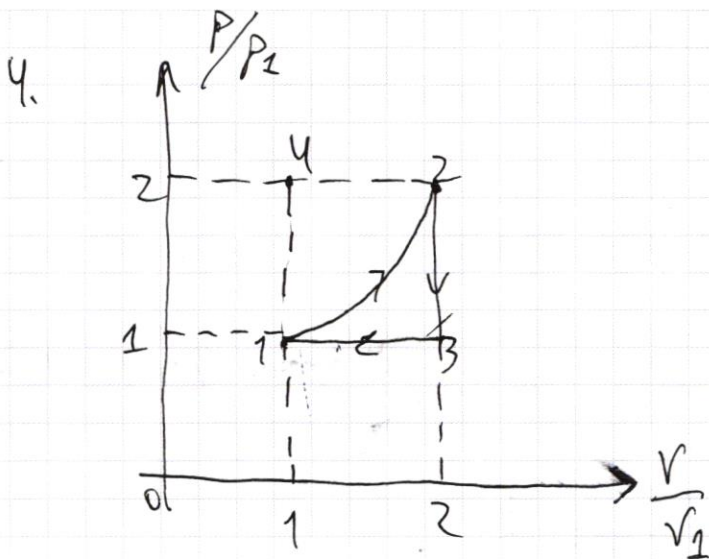
ЗСЭ

$$mgh + \frac{mV^2}{2} = \frac{mV_k^2}{2} \Leftrightarrow V_k = \sqrt{V^2 + 2gh}$$

Время t его падения равно

$$t = \frac{\sqrt{V^2 + 2gh} - V}{g} = \frac{\sqrt{4500} - 60}{10} \approx 0,7 \text{ с}$$

Ответ: 1) $H = 45 \text{ м}$ 2) $t \approx 0,7 \text{ с}$



1) Газ расширяется
 в процессе 1-2
 По 1 началу
 Термодинамики
 $Q = \Delta U_{12} + A_{12}$

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} \Delta(pV) = \frac{3}{2} (2p_1 \cdot 2V_1 - p_1 V_1) = \frac{3}{2} (4p_1 V_1 - p_1 V_1)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 3p_1 V_1 = \frac{9}{2} p_1 V_1$$

Работа A_{12} равна площади под кривой 1-2.
 Её значение равно

$A_{12} = p_1 V_1 \cdot S$, где S - площадь под кривой 1-2 в данных координатах.

$$S = 2 \cdot 1 - \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = 2 - \frac{\pi}{4}$$

$$Q = \frac{9}{2} p_1 V_1 + p_1 V_1 (2 - \frac{\pi}{4}) = p_1 V_1 (\frac{9}{2} + 2 - \frac{\pi}{4}) = p_1 V_1 (\frac{13}{2} - \frac{\pi}{4})$$

2) $A = p_1 V_1 \cdot S_{\text{ш}} \cdot \pi$, где $S_{\text{ш}}$ - площадь шара в данных координатах.

$$S_{\text{ш}} = 1 - \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$A = p_1 V_1 (1 - \frac{\pi}{4})$$

3) Тепло к газу поводится только

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на участке 1-2, поэтому

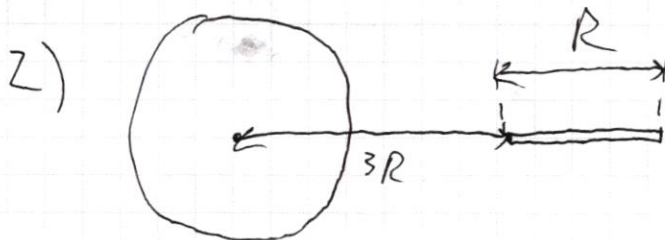
$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{\frac{13}{2} - \frac{\pi}{4}} \approx 4,5\%$$

Ответ: 1) $Q = p_1 V_1 \left(\frac{13}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$, 2) $A = p_1 V_1 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$

3) $\eta \approx 4,5\%$

4. 3. 1) По 3 закону Ньютона, сила, с которой модель действует на сферу, равна силе, с которой сфера действует на модель.

5. 1) $F_1 = \frac{k Q q}{(3R)^2} = \frac{k Q q}{9R^2}$



Рассмотрим

точечный заряд dq , находящийся на расстоянии r от центра сферы. Его сила взаимодействия со сферой равна

$$dF = \frac{kQdq}{r^2}$$

В силу того, что стержень заряжен
однородно $\frac{dq}{dr} = \frac{Q}{R} \Rightarrow dq = \frac{Qdr}{R}$

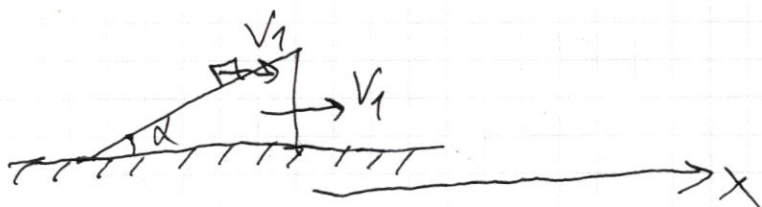
Равная сила действует в силу стержня
со стороны правки

$$F_2 = \int dF = \int \frac{kQdq}{r^2} = \int_{3R}^{4R} \frac{kQqdr}{Rr^2} = \frac{kqQ}{R} \int_{3R}^{4R} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{kqQ}{R} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{3R}^{4R} = \frac{kqQ}{R} \left(-\frac{1}{4R} + \frac{1}{3R} \right) = \frac{kqQ}{12R^2}$$

Ответ: 1) $F_1 = \frac{kqQ}{9R^2}$ 2) $F_2 = \frac{kqQ}{12R^2}$

2. 1) В момент, когда мяч поднимается
на максимальную высоту, скорости
мяча и клина будут равны. Пусть
их скорость в этот момент равна
 v_1 .



Введём горизонтальную ось x , направленную
прямо вправо. Все внешние силы, действующие

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

на систему - вертикальные силы.

Поэтому импульс системы в проекции

на ось x сохраняется

$mV_0 \cos \alpha = mV_1 + 2mV_1 = 3mV_1$, где m - масса шара

$$V_1 = \frac{V_0 \cos \alpha}{3}$$

в силу ЗСЭ

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{2mV_1^2}{2} + mgM = \frac{3mV_1^2}{2} + mgM \quad \text{или}$$

$$V_0^2 = 3V_1^2 + 2gM$$

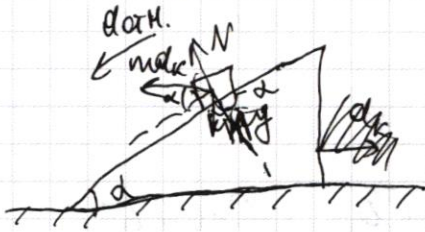
$$V_0^2 - 3V_1^2 = 2gM$$

$$3V_0^2 - 3V_0^2 \cos^2 \alpha = 2gM$$

$$\frac{V_0^2 (3 - \cos^2 \alpha)}{3} = 2gM \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{6gM}{3 - \cos^2 \alpha}} \approx 2,2 \text{ м/с}$$

2) Пусть a_k - ускорение клина, а N - сила нормальной реакции, действующая на шар со стороны клина.

Переведем в систему отсчёта клина.



В ней на массу будет действовать сила инерции $m a_k$. Так как

в этой СО масса может двигаться только вдоль поверхности клина, то

$$N \sin \alpha + m a_k \sin \alpha = m g \cos \alpha \quad (1)$$

На клин будут действовать сила тяжести, сила реакции со стороны земли и сила со стороны массы, равная N по 3 закону Ньютона. Из них горизонтально проекция имеет только сила N . Тогда

$N \sin \alpha = m a_k$ (т.к. ускорение клина горизонтально). С учётом (1) получим, что

$$m g \sin \alpha \cos \alpha - m a_k \sin^2 \alpha = m a_k$$

$$g \sin \alpha \cos \alpha = a_k + a_k \sin^2 \alpha = a_k (1 + \sin^2 \alpha)$$

$$a_k = g \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} \approx 3 \text{ м/с}^2$$

В СО клина масса будет двигаться с постоянным ускорением

$m a_{\text{отн}} = m a_k \cos \alpha + m g \sin \alpha \approx 0,99 \frac{m g}{c^2}$ Время движения массы от точки старта равно

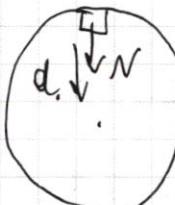
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\tau = \frac{2V_0}{a_{\text{отн.}}} \approx \frac{2 \cdot 22}{9,8} \approx 4,4 \text{ с}$$

За это время клим разгонится до скорости

$$V = a_{\text{к}} \tau \approx 3 \cdot 4,4 \approx 13,2 \text{ м/с}$$

Ответ: 1) $V_0 \approx 22 \text{ м/с}$ 2) ~~$V_0 \approx 22 \text{ м/с}$~~ $V \approx 13,2 \text{ м/с}$

3.  вид сверху. Так как автомобиль движется равномерно, то у него может быть только нормальное ускорение, которое будет сообщать сила нормальной реакции N . Сила взаимодействия с дорогой с автомобилем равна $\sqrt{N^2 + F_{\text{тр}}^2}$, где $F_{\text{тр}}$ — сила трения, действующая на автомобиль. При этом $F_{\text{тр}} = m \cdot a$. Тогда $N \sqrt{1 + \mu^2} = 2mg$, где m — масса автомобиля.

$$N = ma = \frac{2mg}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

$$a = \frac{2g}{\sqrt{1+\mu^2}} \approx 15 \text{ м/с}^2$$

2) Обозначим скорость автомобиля в верхней точке траектории за v .



Единственные силы, сообщают машине автомобильно нормальное ускорение a_0 — сила нормальной реакции N_0 и сила тяжести mg .

При этом

$$N + mg \sin \alpha = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow N = \frac{mv^2}{R} - mg \sin \alpha$$

Автомобиль сможет двигаться по окружности, если сила N_0 в верхней точке траектории ≥ 0 . То есть

$$\frac{mv^2}{R} \geq mg \sin \alpha$$

$$v^2 \geq gR \sin \alpha$$

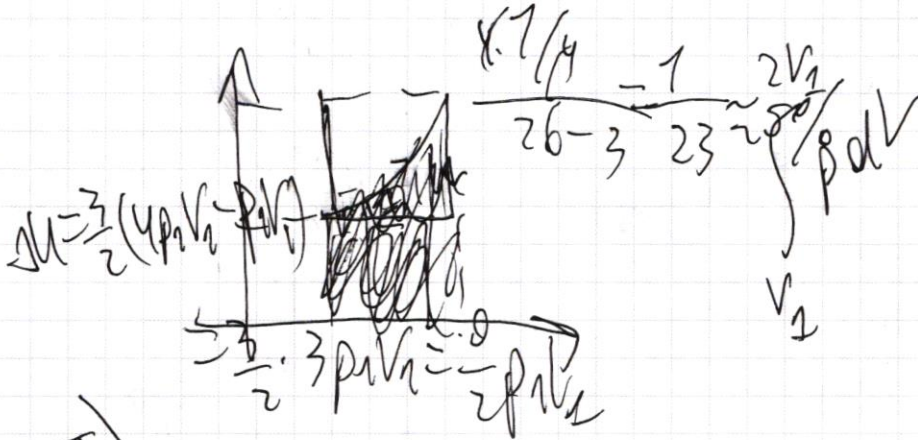
$$v \geq \sqrt{gR \sin \alpha} \text{ Тогда}$$

$$V_{\min} = \sqrt{gR \sin \alpha} \approx 2,7 \text{ м/с} \text{ Ответ: } 1) a \approx 15 \text{ м/с}^2$$

$$2) V_{\min} \approx 2,7 \text{ м/с}$$

$$P_1 V_1 (1 - \frac{\pi}{4}) + \frac{\rho}{2} P_1 V_1^2 = \frac{Q = P_1 V_1 (\frac{11}{2} - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2V_1 - V_2} dV}$$

$$A = \frac{1}{4} (1 - \frac{\pi}{4}) P_1 V_1$$



$$\frac{1 - \frac{3}{4}}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\eta = \frac{(1 - \frac{\pi}{4}) P_1 V_1}{P_1 V_1 (\frac{13}{2} - \frac{\pi}{4}) \frac{13 - \pi}{4}}$$

$$P_1 V_1 (1 - \frac{\pi}{4}) = \frac{2 \pi R^2}{4} \left(\frac{P}{P_1} - 2R + \frac{V}{V_1} - 1 \right) = 1/2$$



$$\left(\frac{P}{P_1} \right)^2 - \frac{4P}{P_1} + 4 + \left(\frac{V}{V_1} \right)^2 - \frac{2V}{V_1} = 1$$

$$\left(\frac{P}{P_1} \right)^2 - \frac{4P}{P_1} + 4 + \left(\frac{V}{V_1} \right)^2 - \frac{2V}{V_1} = 0$$

$$P_1 V_1 \sqrt{V_2 - V_1} = 2 \sqrt{2} E$$

$$P_1 V_1 (2 - \frac{\pi}{4}) + \frac{\rho}{2} P_1 V_1^2$$

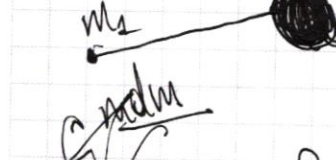
$$\approx P_1 V_1 \left(2 - \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} \right) P_1 = \frac{4 \rho - 2 \sqrt{\frac{2V}{V_1} + \left(\frac{V}{V_1} \right)^2}}{2} = 2 - \sqrt{\frac{2V}{V_1}}$$

$$2 P_1 V_1 \left(\frac{13}{2} - \frac{\pi}{4} \right) P_1$$

$$D = \sqrt{16 - 4 \left(4 + \left(\frac{V}{V_1} \right)^2 \right) \frac{2V}{V_1}}$$

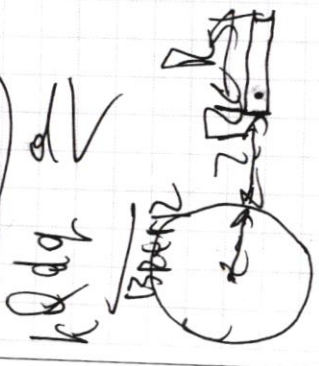
$$k \frac{Q \rho}{2 \sqrt{2} E} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \frac{dm}{m_2}$$

$$P = P_1 \left(2 - \sqrt{\frac{2V}{V_1} + \left(\frac{V}{V_1} \right)^2} \right)$$

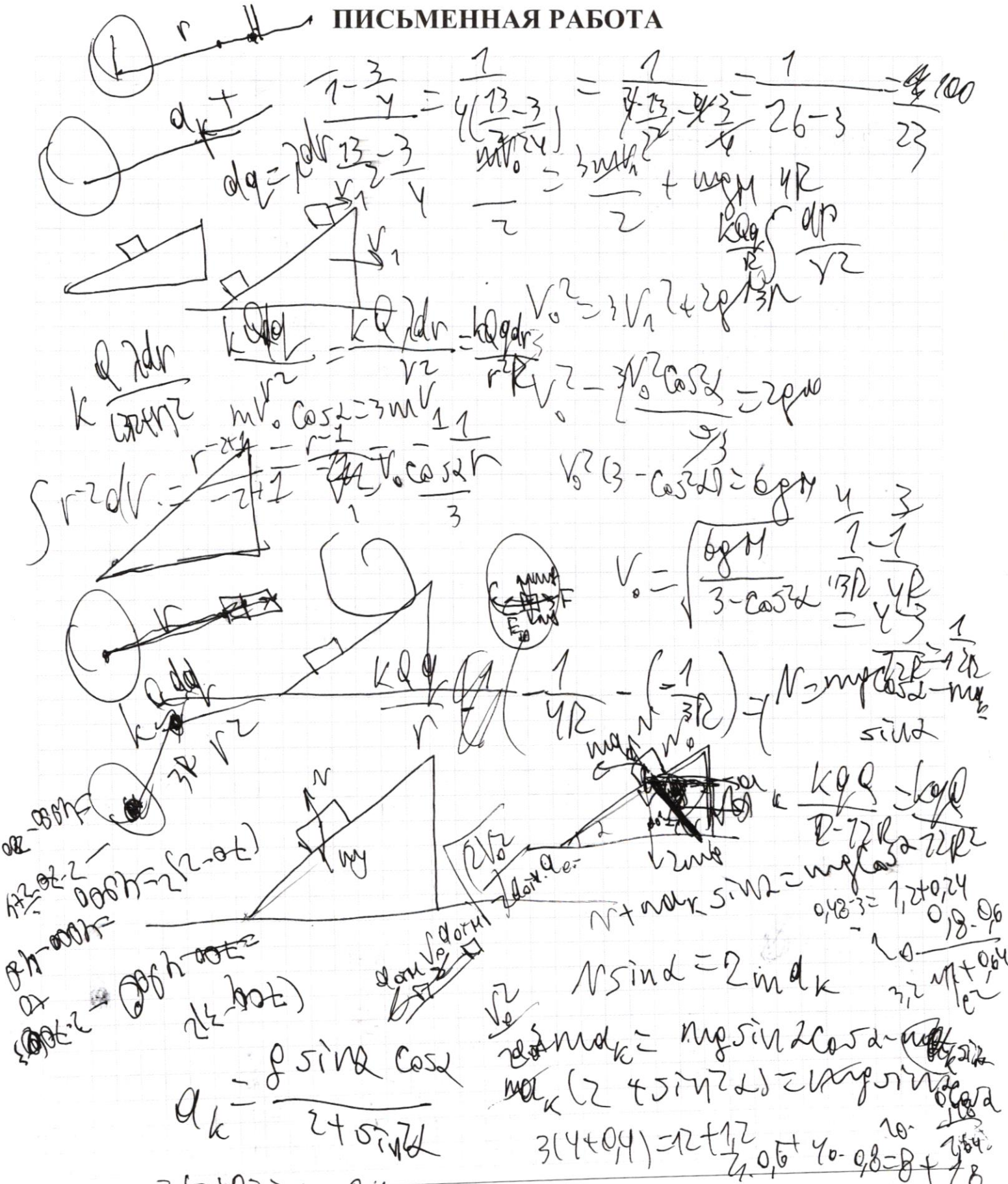


$$P_1 \int \left(2 - \sqrt{\frac{2V}{V_1} + \left(\frac{V}{V_1} \right)^2} \right) dV$$

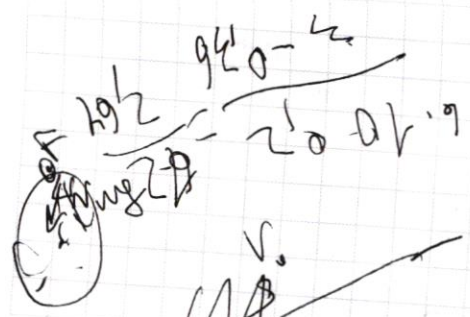
$$G \frac{dm}{R^2} = G m_2 \int \frac{dm}{R^2}$$



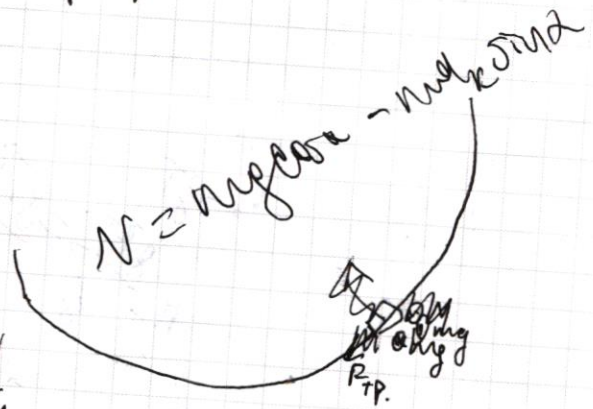
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



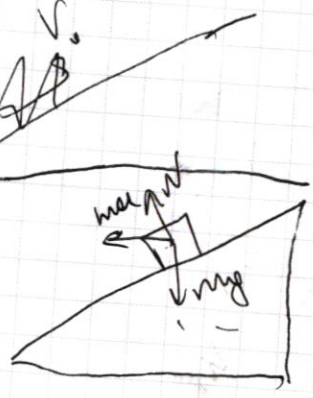
$a_k = \dots$
 $dv = \dots$
 $\int r^2 dv = \dots$
 $v_0 = \dots$
 $N = \dots$
 $a_k = \frac{g \sin \alpha \cos \alpha}{2 + \sin^2 \alpha}$



$$F_{тр. \sin \alpha}$$



$$m \sin \alpha / \cos \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$$

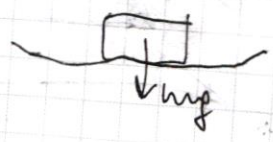


$$dA = \rho dV / 2v_1$$

$$A = \int \rho dV / v_1$$

$$2mg \sqrt{mg \sin \alpha}$$

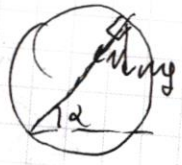
$$4mg \sin \alpha = m^2 \rho^2 \sin^2 \alpha$$



$$\rho^2 = 4mg \sin \alpha - m^2 \rho^2 \sin^2 \alpha$$

$$\rho^2 = 4mg \sin \alpha$$

$$a = g \sin \alpha \approx 7.4/2$$



$$Q = \Delta u + A_{тр} + mg \sin \alpha = m v^2 / R$$

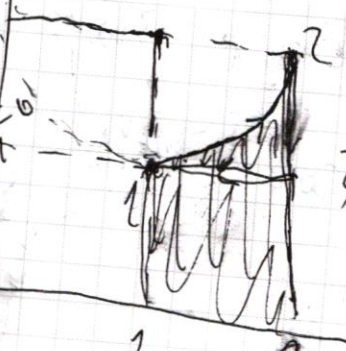
$$\Delta u = \frac{3}{2} (2P_1 v_1 - P_1 v_1)$$

$$\Rightarrow (4P_1 v_1 - P_1 v_1)$$

$$\Rightarrow 3P_1 v_1$$

$$= \frac{3}{2} P_1 v_1$$

$$S \cdot \frac{v_1^2}{2} = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \frac{1}{2} \rho v_1^2$$



$$v_2 = \frac{v_1}{4}$$

$$N + mg \sin \alpha = m v^2 / R$$

$$N = \frac{m v^2}{R} - mg \sin \alpha \geq 0$$

$$1 - \frac{\pi}{4} + 1 = 2 - \frac{\pi}{4}$$

$$v \geq \sqrt{\frac{gR}{\sqrt{2}}}$$

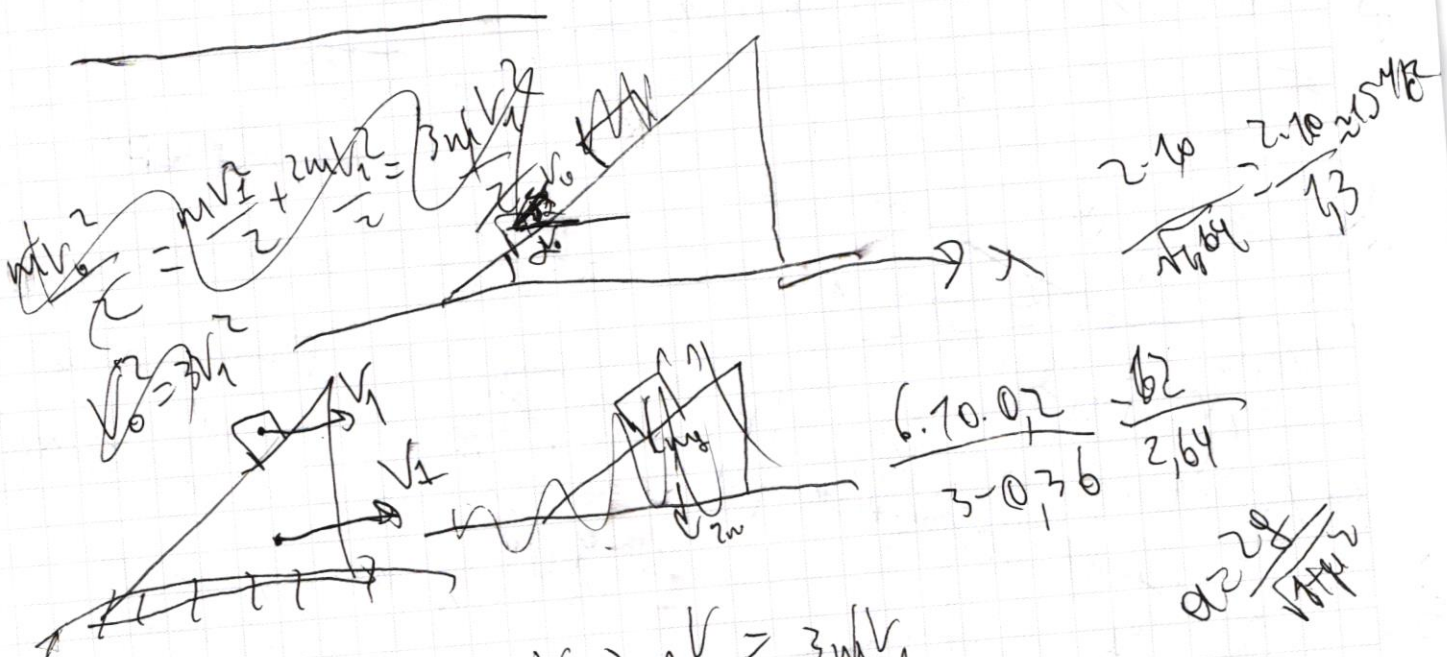
$$v \geq gR \sin \alpha$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$V_0 = gT$$

$$H = \frac{gT^2}{2}$$

$$\cos \alpha = 0,6$$



$$mV_0 \cos \alpha = mV_1 + 2mV_1 = 3mV_1$$

$$V_0 \cos \alpha = 3V_1$$



$$N = mg$$

$$N = \frac{mg}{3}$$

$$V_0^2 = 3V_1^2 + 2gH$$

$$V_0^2 = 3 \cdot V_0^2 \cos^2 \alpha + 2gH$$

$$\frac{2}{3} V_0^2 - V_0^2 \cos^2 \alpha = 2gH$$

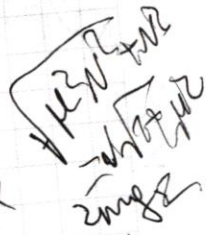
$$V_0^2 (3 - \cos^2 \alpha) = 6gH$$



$$N = \frac{mg}{3}$$

$$V_0^2 = \frac{6gH}{3 - \cos^2 \alpha}$$

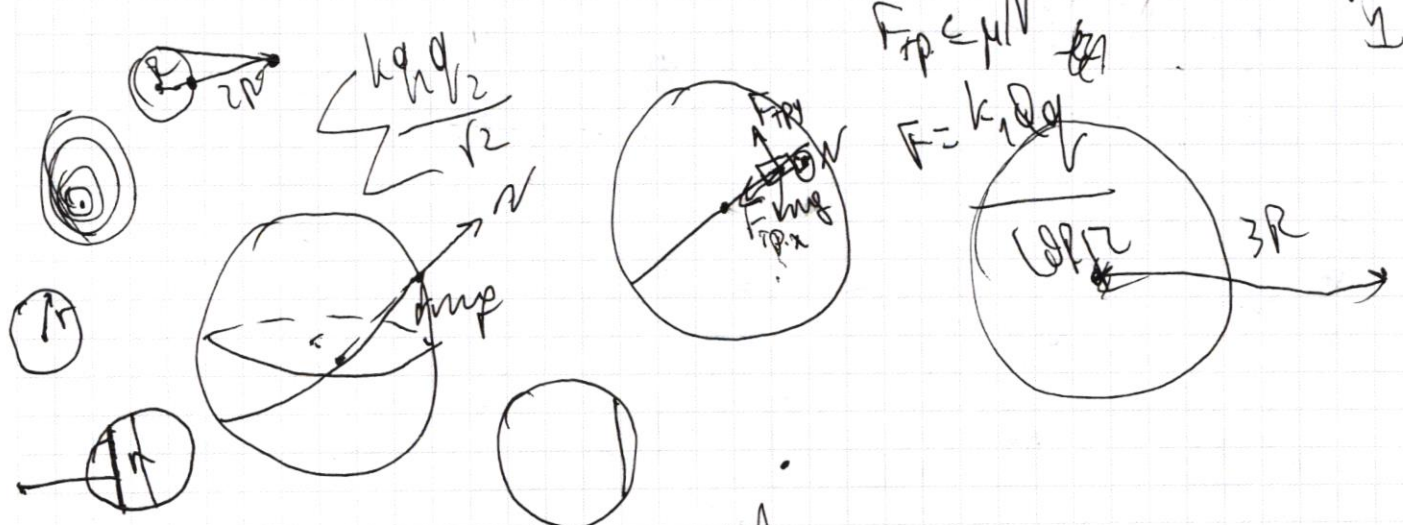
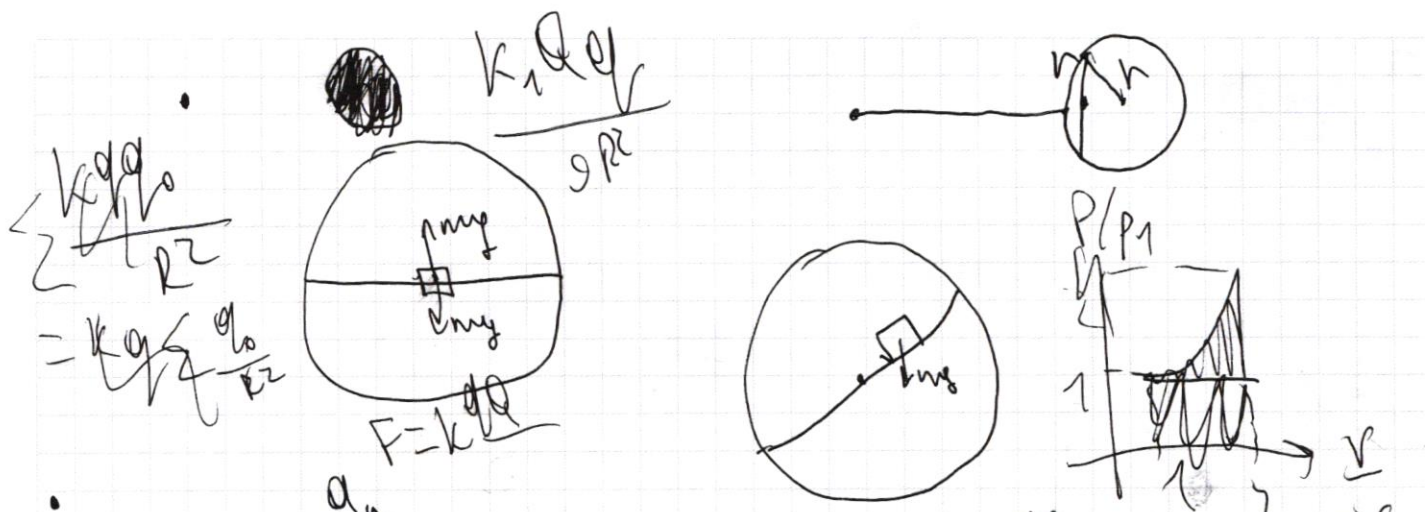
$$V_0 = \sqrt{\frac{6gH}{3 - \cos^2 \alpha}} \approx 2,27$$



$$N = \frac{mg}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{m_1 v_0^2}{2} + \frac{m_2 v_0^2}{2} = \frac{m v_0^2}{2}$
 $k = \frac{m v_0^2}{2}$
 $Q = \Delta U + A$
 $\Delta U = \frac{Q}{2} P_1 V_1$
 $\sqrt{ax - x^2} dx$
 $\int \sqrt{ax - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{ax - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right)$
 $P = \frac{4 \pm 2 \sqrt{\frac{2V}{V_1} - \left(\frac{V}{V_1}\right)^2}}{2} = 2 \pm \sqrt{\frac{2V}{V_1} - \left(\frac{V}{V_1}\right)^2}$
 $P = P_1 \left(2 - \sqrt{\frac{2V}{V_1} - \left(\frac{V}{V_1}\right)^2} \right) dV$
 $\int P dV = \int P_1 \left(2 - \sqrt{\frac{2V}{V_1} - \left(\frac{V}{V_1}\right)^2} \right) dV$
 $\frac{Q}{2} \left(2 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{Q}{2} \left(4 - \frac{\pi}{4} \right)$
 $\frac{2V_0}{2} = \frac{V_0}{2} \frac{2V_0}{V_0}$
 $P = \frac{G M m}{g R}$



$Q = \Delta u \cdot A$

$Q_{23} = \Delta u_{23} = \frac{3}{2} V (P_1 - 2P_2) = \frac{3}{2} P_1 V_1$

$Q =$

$Q = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31}$
 $= Q_{12} - \frac{3}{2} P_1 V_1 - \frac{5}{2} P_1 V_1$
 $= Q_{12} - 4 P_1 V_1$

$Q = A$

$Q_{12} = 4 P_1 V_1$
 $Q_{12} - 4 P_1 V_1 = A_{12}$

$Q_{13} = P_1 V_1 - \frac{3}{2} (P_1 V_1 - 2 P_2 V_2)$
 $= P_1 V_1 - \frac{3}{2} P_1 V_1$
 $= -\frac{1}{2} P_1 V_1$

$Q_{23} = \frac{3}{2} P_1 V_1$

$Q_{31} = P_1 V_1 - \frac{3}{2} P_1 V_1 = -\frac{1}{2} P_1 V_1$