Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104965**

ID профиля: **373925**

Вариант 24

Черновик

$21a_1d - 9a_1$

$a_1^2 + a_1(21d - 9) + 4 \cdot 17d^2 - 36d + 4 > 0$

$68d^2 + d(21a_1 - 36) + a_1^2 - 9a_1 + 4 > 0$

$D = (21a_1 - 36)^2 -$

5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Черновик

$a_5 \; a_{18}$

$a_{11} = a_1 + 10d$
$a_5 = a_1 + 4d$

$(a_{11} - 6d)(a_{11} + 7d)$

~~a_5~~

$a_5 = a_{10} - 5d$
$a_{18} = a_{13} + 5d$

$(a_{10} - 5d)(a_{13} + 5d) > S - 4$

$a_{10} \cdot a_{13} + 5d(a_{10} - a_{13}) - 25d^2 > S - 4$

a_{10}

$\cancel{(a_9 - 4d)(a_9 +}$

$\cancel{a_5 = S - a_6 - a_7 - a_8 - a_9}$

$\cancel{a_4 +} (a_1 + 4d)$

21104965 (U373925 M1300893)

Черновик

$(a_1+4d)(a_1+17d)$

$9a_1+36d$

$a_{11}=a_1+10d$

$9a_{11}=9a_1+90d$ $\quad -54d$

$(a_{11}-6d)(a_{11}+7d)>9a_{11}-54d$

$9a_1+36d$

$9a_{11}$

$a_{11}^2+a_{11}\cdot d-42d^2-9a_{11}+54d>0$

$(a_{11}-d)(a_{11}+20d)<9a$

$a_{11}^2+a_{11}(d-9)+54d-42d^2>0$

$54 \times 4 = 216$

$D=d^2-18d+81-216d+$

$+168d^2=$

$42 \times 4 = 168$

$=169d^2-234d+81=$

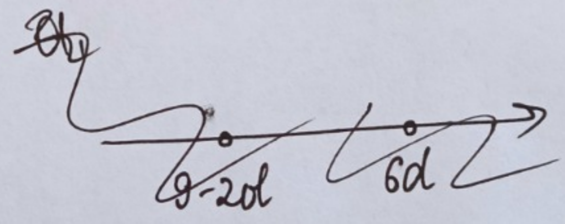
$46 - 18$

$=(13d-9)^2$

$a_{11}=\dfrac{9-d+13d-9}{2}=6d$

$a_{11}=\dfrac{9-d-13d+9}{2}=-2d+9$

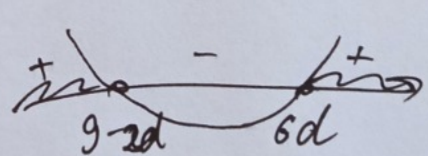
$-4d+18$



$d=1$

$9-2 \quad 6$

$d>1,2$



21104965 (U373925 M1300893)

$$-4-4\cdot17d^2<a_1^2+21da_1-9a_1-36d<60-9\cdot12d^2$$ Черновик

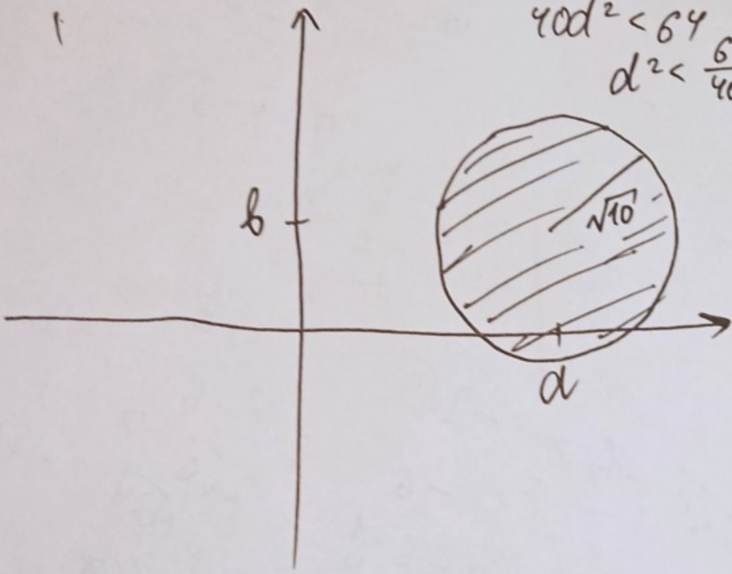
$$-4-68d^2 \quad < \quad \dots \quad <60-108d^2$$

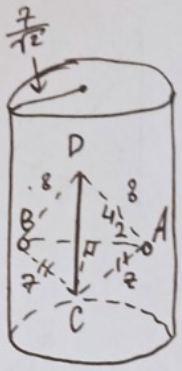
$$-4-68d^2<60-108d^2$$

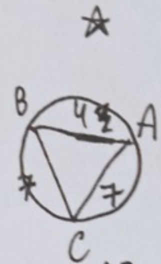
$$108d^2-68d^2<60+4$$

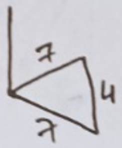
$$40d^2<64$$

$$d^2<\frac{64}{40}=\frac{8}{5}$$









$$2R=\frac{AB}{\sin\angle C}$$

$$-6a-2b<10$$

$$-3a-b<10$$

$$b>-3a-10$$

$$-30-14=-44$$

$$\begin{cases}(x-5)^2+(y-7)^2\leq 10\\ 5^2+7^2\leq \min(-6\cdot5-2\cdot7,10)\end{cases}$$

$$25+49\leq-44$$

$$16=\underbrace{49+49}_{98}-2\cdot49\cos\angle C$$

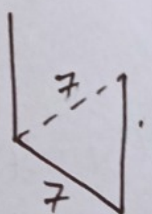
$$\begin{array}{r}98\\-\ 16\\\hline 82\end{array}$$

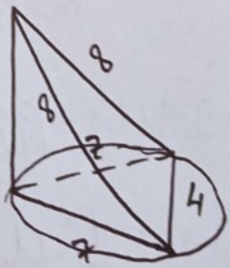
$$98\cos\angle C=82$$

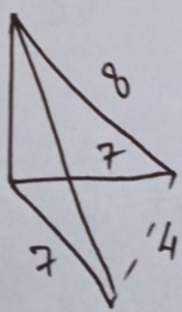
$$\cos\angle C=\frac{82}{98}=\frac{41}{49}$$

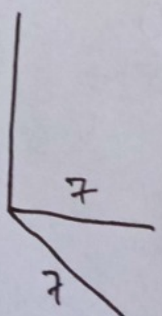
$$\sin\angle C=\sqrt{1-\frac{41}{49}}=$$

$$=\sqrt{\frac{8}{49}}=\frac{2\sqrt{2}}{7}$$





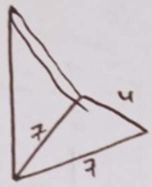




$$R=\frac{4}{2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{7}}=\frac{7}{\sqrt{2}}$$

21104965 (U373925 M1300893)

черновик



$2\sqrt{6}-6 < \ldots -1$

$2\sqrt{6} \ldots \cancel{5}$

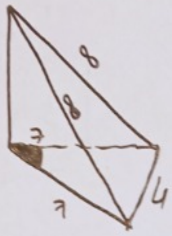
$2\sqrt{6}$ $\sqrt{49}$

$\cancel{\sqrt{24}}$ $< \sqrt{25}$

$2\sqrt{6}-6$ $\sqrt{24}$

$0 \quad 2\sqrt{9}-6 > \ldots$

2



-8

$-2\sqrt{6}-6 < \ldots -2$

$-2\sqrt{6} \quad \leq \quad$

$2\sqrt{6} > 2$

$-2\sqrt{9}$

$-2\sqrt{6}-\cancel{6} >$ $=$ -6

$-2\sqrt{6}-6 > -6-6$

$\cancel{2}$

$2\sqrt{6}-6 \quad ? \ldots -2$

$2\sqrt{6} \quad ? \quad 4$

$\sqrt{24} > \sqrt{16}$

108
-96

96

$-2 < -1$

-9

$-2\sqrt{6}-6 \quad \ldots \quad -3$

$-2\sqrt{6} \quad > \ldots$

$2\sqrt{6} < 3$

$a_1^2+21a_1+108-9a_1-36-60<0$

$(a_1^2+12a_1+12<0$
$m=6$

$\cancel{68}$

72
-36

$a_1^2+21a_1+\cancel{6}8-9a_1-36\cancel{a}+4>0$

$a_1^2+12a_1+36>0$

$(a_1+6)^2>0 \qquad a_1 \neq -6$

$4\cdot 6$

$\frac{D}{4}=36-12=24=(2\sqrt{6})^2$

$a_1=-6+2\sqrt{6}$

$a_2=-6-2\sqrt{6}$

$\frac{\cancel{D}}{4}$

$(a_1+6)^2$

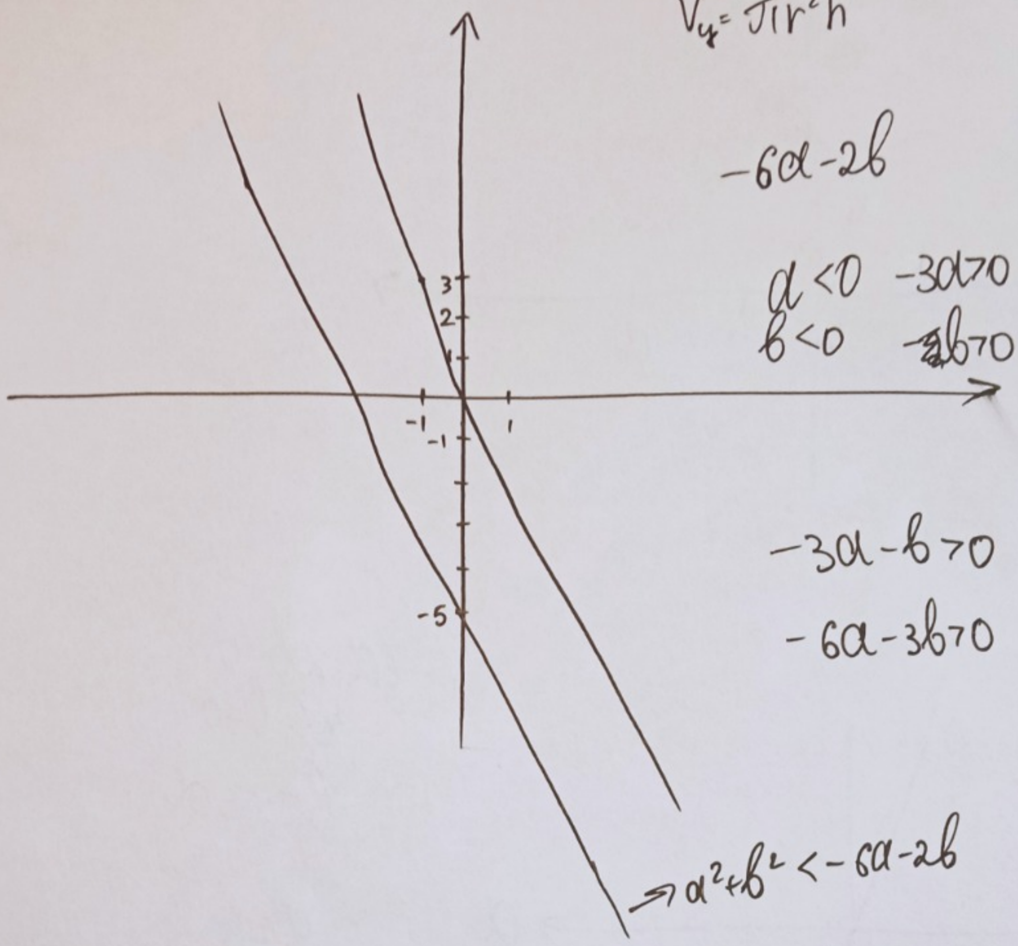
$12-36=-24$

$+36-36$

21104965 (U373925 M1300893)

Черновик

$V_ц = \pi r^2 h$



$-6a-2b$

$a<0 \quad -3a>0$

$b<0 \quad -\cancel{2}b>0$

$-3a-b>0$

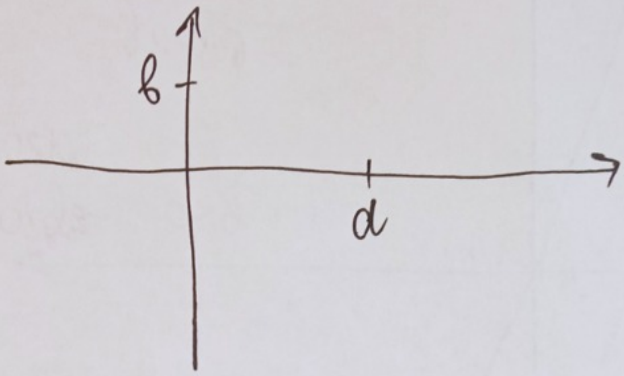
$-6a-3b>0$

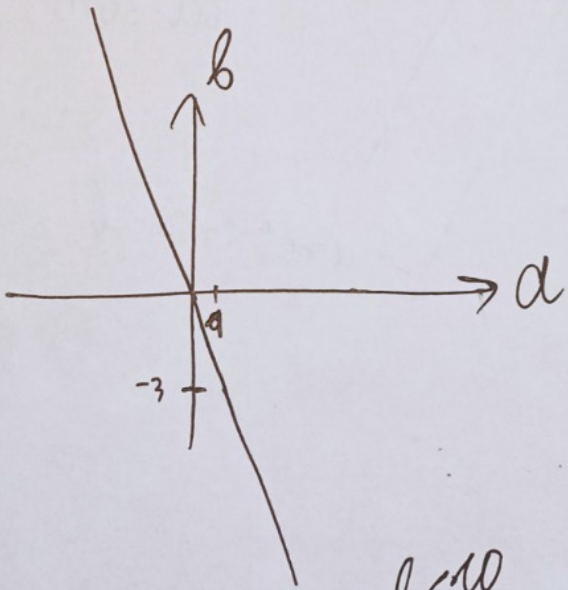
$\to a^2+b^2<-6a-2b$

Ч

21104965 (U373925 M1300893)

Черновик





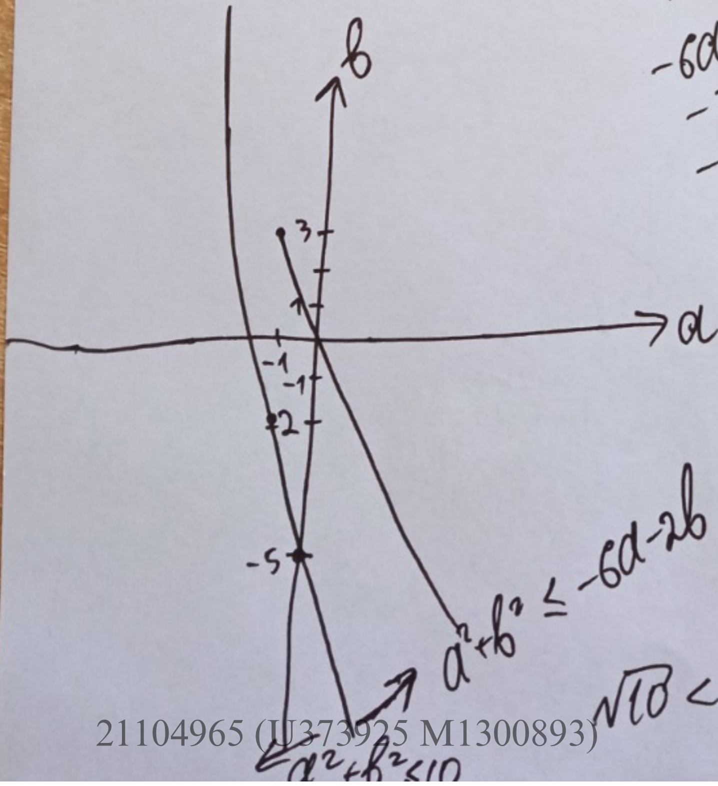
$-6a-2b=0$

$-3a-b=0$

$b=-3a$

$a=1$

$b=-3$



$-6a-2b<10$

$-3a-b<5$

$-3a-5<b$

$b>-3a-5$

$a=0$

$b=-5$

$a=-1$

$b=-2$

min(x+y; 10)

$x+y<10$

$y<10-x$

$-3a=5$

$-6a-2b=0$

$b+3a=0$

$b=-3a$

a	b
0	0
-1	3

$\sqrt{10}<4=\sqrt{16}$

Черновик

№1

$S = S_9$

$a_5 a_{18} > S-4$

$a_{10} a_{13} < S+60$

$d \ne 0$

$S_9 = S = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \ldots + a_1 + 3d$
$a_1 + 4d + a_1 + 5d + a_1 + 6d + a_1 + 7d +$
$+ a_1 + 8d =$

$= 9a_1 + 4 \cdot 9d$

$(a_1 + 4d) \cdot (a_1 + 17d) = a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 > 9a_1 + 4 \cdot 9d - 4$

$(a_1 + 9d)(a_1 + 12d) \le a_1^2 + 21a_1 d + 102d^2 < 9a_1 + 4 \cdot 9d + 60$

$\begin{array}{r} 12 \\ \times 9 \\ \hline 102 \end{array}$

$\cancel{a_1^2 \ge 21a_1 d}$

$a_1^2 + a_1(21d - 9) + 68d^2 - 36d + 4 > 0$

$D =$

$(21d - 9)^2 =$
$= 441d^2 - 378d + 81 -$
$- 272d^2 + 144d$
$- 16 = 169d^2 - 234d + 65 = (13d)^2 - 2 \cdot 13d \cdot 9 + 81 - 16$

$a_1^2 + a_1(21d - 9) + 102d^2 - 36d - 60 < 0$

$\begin{array}{r} 21 \\ \times 21 \\ \hline 21 \\ +42 \\ \hline 441 \end{array}$

$\begin{array}{r} 18 \\ \times 21 \\ \hline 18 \\ +36 \\ \hline 378 \end{array}$

$\begin{array}{r} 68 \\ \times 4 \\ \hline 272 \end{array}$

$\begin{array}{r} 36 \\ \times 4 \\ \hline 144 \end{array}$

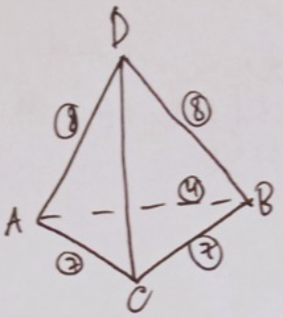
$\begin{array}{r|l} 234 & 26 \\ -26 & \\ \hline 60 & \end{array}$

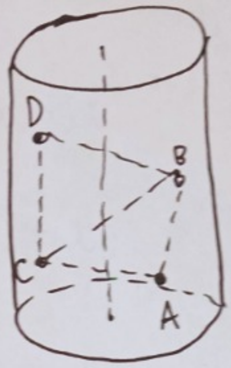
$\begin{array}{r} 441 \\ -272 \\ \hline 169 \end{array}$

$\begin{array}{r} 378 \\ -144 \\ \hline 234 \end{array}$

$\begin{array}{r} 81 \\ -16 \\ \hline 65 \end{array}$

Черновик





$$S_9 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d + a_1 + 5d + a_1 + 6d + a_1 + 7d + a_1 + 8d =$$

$$= 9a_1 + 36d = S$$

$$\begin{cases} (a_1+4d)(a_1+17d) > 9a_1+36d-4 \\ (a_1+9d)(a_1+12d) < 9a_1+36d+60 \end{cases}$$

$$a_1^2 + 21da_1 + \cancel{4\cdot 17d^2} - 9a_1 - 36d + 4 > 0 \quad -4 - 4\cdot 17d^2$$

$$-9\cdot 12d^2 + 60$$

$$a_1^2 + 21da_1 + 9\cdot 12d^2 - 9a_1 - 36d - 60 < 0$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 4 \\ \hline 68 \end{array}$$

$$a_1^2 + (21d-9)a_1 + 4\cdot 17d^2 - 36d + 4 > 0$$

$$a_1^2 + (21d-9)a_1 + 9\cdot 12d^2 - 36d - 60 < 0$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 9 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$D = (21d-9)^2 - 4\cdot 4\cdot 17d^2 + 4\cdot 36d - 4\cdot 4 =$$

$$= 441d^2 - 378d + 81 - 272d^2 +$$

$$+ 144d - 16 =$$

$$= 169d^2 - 234d + 65$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times\ 9 \\ \hline 378 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \times\ 17 \\ \hline 112 \\ +\ 16 \\ \hline 272 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36 \\ \times\ 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 441 \\ -\ 272 \\ \hline 169 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 169 \\ +\ 272 \\ \hline 441 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 378 \\ -\ 144 \\ \hline 234 \end{array}$$

21104965 (U373925 M1300893)

Черновик

$a_5 \cdot a_{18} > S-4$

$a_{10} \cdot a_{13} < S+60$

5	6	7	8	9	10
13	14	15	16	17	18

$\cancel{(a_1+4d)(a_1+17d) > 9a_1}$

$(a_1+9d)(a_1+12d) < 9a_1+36d+60$

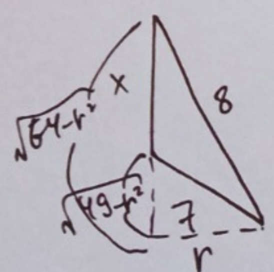
$(a_1+4d)(a_1+17d)$

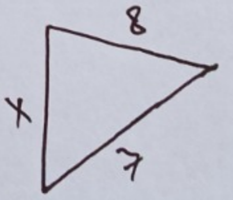
$(a_7-2d)(a_{15}+3d) > S-4$

$(a_7+3d)(a_{15}-2d) < S+60$

$a_7 \cdot a_{15} + 3da_7 - 2da_{15} - 6d^2 > S-4$

$a_7 \cdot a_5 - 2d \cdot a_7 + 3d \cdot a_{15} - 6d^2 < S+60$

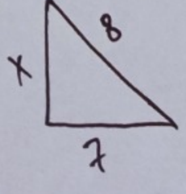




$64 = x^2 + 49 - 2 \cdot 7 \cdot x\cos\alpha$

$x^2 - 14x\cos\alpha = 15$

$x^2 - 14x\cos\alpha = 15$



$x^2 =$

~~Чистовик~~

Задача №3. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10\\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b;10)\end{cases}$

1) на ~~декартовой~~ плоскости (x,y) первое уравнение системы представляет из себя уравнение окружности с центром в ~~точке~~ (a;b) и

Черновик

−2 −3 −4 −5 −7 −8

$(a_1+4d)(a_1+17d) \overset{?}{>} 9a_1+36d-4$

$(-2+4)(-2+17) \overset{?}{>} -18+36-4$

14 $\quad$ 32 $\quad$ 27 $\quad$ 32

$2\cdot 15$ $\qquad 9(-3)+36-4$

$(-3+4)(-3+17)=14$

$(-8+4)(-8+17)=(-4)\cdot 9 \overset{?}{>} -72+36-4$

-40 $\quad$ 32

~~-94~~

$-36>-40$

$(a_1+9d)(a_1+12d)<9a_1+36d+60$

$(-2+9)(-2+12)<-18+36+60$

70

$(-8+9)\cdot(-8+12)=4<-72+36+60$

-36

21104965 (U373925 M1300893)

~~Черновик~~
Черновик

В

~~Чистовик~~ 1

Черновик

21104965 (U373925 M1300893)

$\boxed{\text{Чистовик}}$

Задача №1.

$a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_1 + 2d$
$\ldots$
$a_9 = a_1 + 8d$

a_1 – первый член прогрессии
$d > 0$, т.к. прогрессия возрастающая
$d \in \mathbb{Z}$, чтобы все члены прогрессии $\in \mathbb{Z}$

1) $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + 8d) =$
$= 9a_1 + 36d$ (*)

1

2) $a_5 \cdot a_{18} > S - 4$
$\Downarrow$
$(a_1 + 4d)(a_1 + 17d) > \underbrace{9a_1 + 36d}_{\text{по } (*)} - 4$

$a_1^2 + 21a_1 \cdot d + 68d^2 - 9a_1 - 36d + 4 > 0$
$a_1^2 + 21a_1 d - 9a_1 - 36d > -4 - 68d^2$ (1)

3) $a_{10} \cdot a_{13} < S + 60$
$\Downarrow$
$(a_1 + 9d)(a_1 + 12d) < \underbrace{9a_1 + 36d}_{\text{по } (*)} + 60$

$a_1^2 + 21a_1 d + 108d^2 - 9a_1 - 36d - 60 < 0$
$a_1^2 + 21a_1 d - 9a_1 - 36d < 60 - 108d^2$ (2)

4) из уравнений (1) и (2) получаем, что:

$$-4 - 68d^2 < a_1 + 21a_1 d - 9a_1 - 36d < 60 - 108d^2$$

чтобы были решения, необходимо, чтобы выполнялось условие: $-4 - 68d^2 < 60 - 108d^2$
$40d^2 < 64$
$d^2 < \frac{8}{5}$

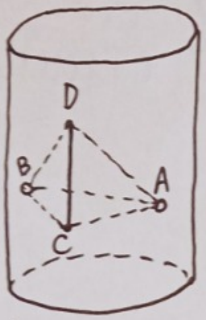
т.к. $d \in \mathbb{Z}$, то единственное значение d^2, которое оно может принимать, равно $1 \Rightarrow d = \pm 1$, но т.к. $d > 0$, то $\boxed{d = 1}$

5) подставляя $d = 1$ в уравнения (1) и (2), получаем:
(1): $a_1 + 12a_1 + 36 > 0 \Rightarrow (a_1 + 6)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -6$
(2): $a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \Rightarrow (a_1 + 6)^2 < 24 \Rightarrow |a_1 + 6| < 2\sqrt{6}$

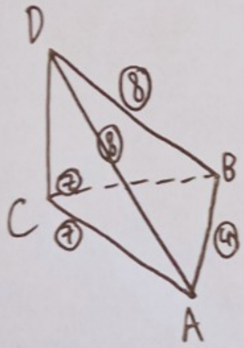
см. продолжение

Чистовик

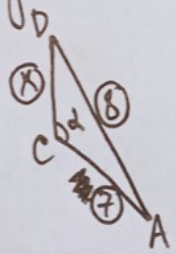
Задача №2.



④



минимальный радиус цилиндра достигается при максимальном угле ACD (и ∠BCD соотв., т.к. они равны)



по теореме косинусов имеем: $8^2=7^2+x^2-2\cdot7\cdot x\cdot\cos\alpha$

$15=x^2-14x\cos\alpha$

$x^2-14x\underset{m=7\cos\alpha}{\cos\alpha}-15=0$

$\frac{D}{4}=m^2-ac$

$\frac{D}{4}=49\cos^2\alpha-1\cdot15=$

$=49\cos^2\alpha-15\geq0$

$\cos^2\alpha\geq\frac{15}{49}$

$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha\geq\frac{\sqrt{15}}{7}\\ \cos\alpha\leq-\frac{\sqrt{15}}{7}\end{array}\right.$

нам выгоднее, чтобы $\cos\alpha$ был наименьшим отрицательным (угол α будет тупым)

?!!

21104965 (U373925 M1300893)

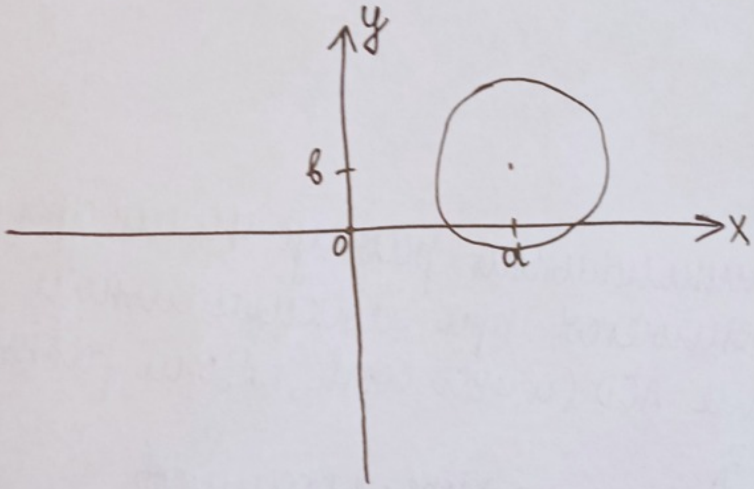
$\boxed{\text{Чистовик}}$

Задача №3. $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2\le 10 \\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b;10) \end{cases}$

③

1) уравнение $(x-a)^2+(y+b)^2=10$ задаёт окружность с центром в точке $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{10}$

неравенство $(x-a)^2+(y-b)^2\le 10$ задаёт область внутри этой окружности



2) заметим, что при $a,b>0$ $\min(-6a-2b;10)=-6a-2b$

~~уравне a^2+b^2 – уравнение окружности~~

a^2+b^2 – ~~точка~~ область окружности при $x=0, y=0$;

по первому ~~уравнению~~ неравенству получаем: $(0-a)^2+(0-b)^2\le 10$

$\Leftarrow a^2+b^2\le 10$

по второму неравенству тогда:

① $a^2+b^2\le 10$
тогда
$\min(-6a-2b;10)=10$
$-6a-2b>10$
$-3a-b>5$
$\boxed{b<-3a-5}$

② $a^2+b^2\le 10$
тогда
$\min(-6a-2b;10)=-6a-2b\le 10$
$-3a-b\le 5$
$\boxed{b\ge -3a-5}$

продолжение задачи №1: $\boxed{\text{Чистовик}}$

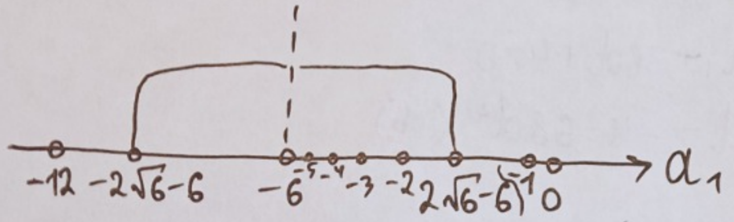
2

получаем систему:

$$\begin{cases} a_1 \neq -6 \\ |a_1+6| < 2\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \neq -6 \\ -2\sqrt{6} < a_1+6 < 2\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \neq -6 \\ -2\sqrt{6}-6 < a_1 < 2\sqrt{6}-6 \end{cases}$$



$-2\sqrt{6}-6 > -9$; $-2\sqrt{6}-6 < -8$

$-2\sqrt{6}-6 < -1$; $-2\sqrt{6}-6 > -2$

целочисленные a_1: $-2, -3, -4, -5, -7, -8$

это все возможные значения a_1:
они удовлетворяют условиям зодачи.

Ответ: $a_1 \in \{-2; -3; -4; -5; -7; -8\}$

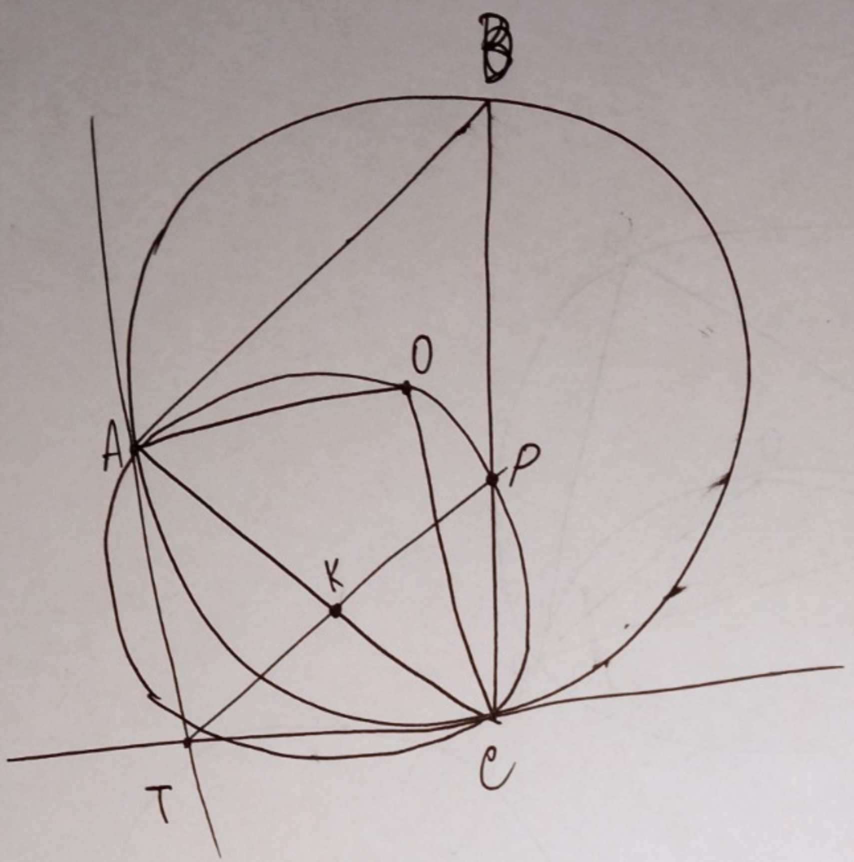
Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

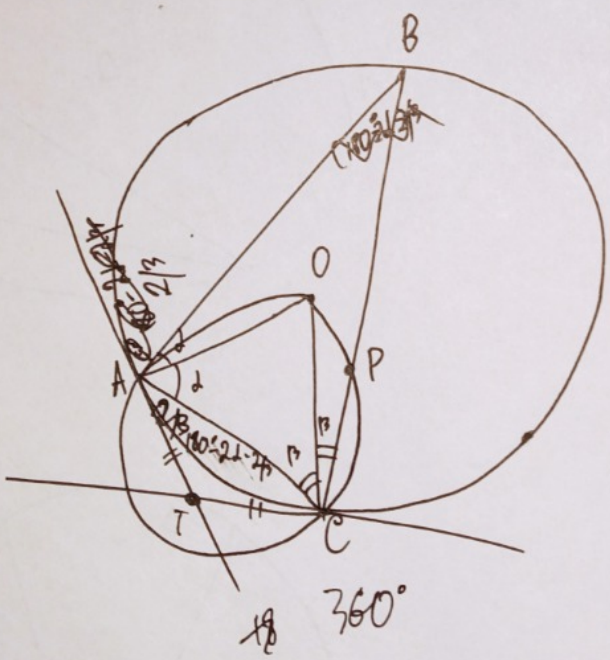
Шифр: **21104965**

ID профиля: **373925**

Вариант 24

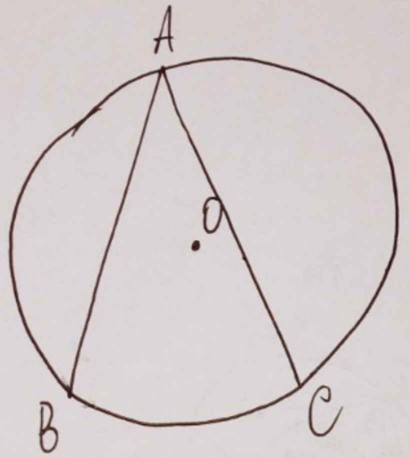


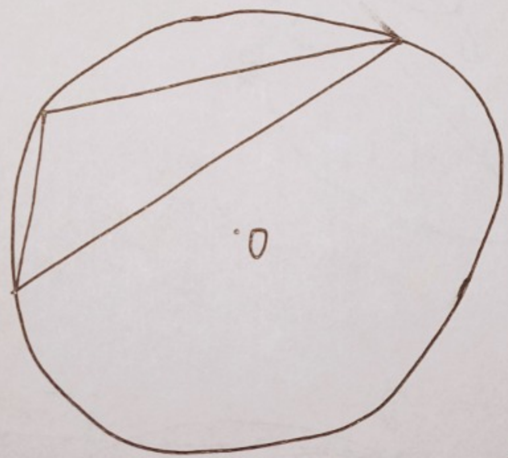
$180^\circ - 180^\circ + 2\gamma + 2\beta - 2\gamma$

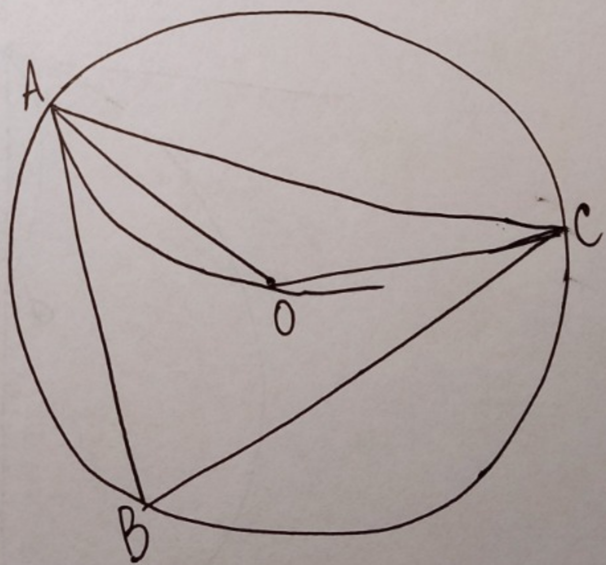


$PC \parallel AT$

Черновик







$\cancel{\log} \sqrt{29-x}$

$D = 169 + 4 \cdot \cancel{42} \cdot 7$

$42 \times 28 = 336 + 84 = 1176$, $+169 = 1345$

$(x+1)^2 \neq 0$ $\neq 1$

$x \neq -1$ $x \neq 0$

35×35: $175 + 105 = 1205$

$29 - x = a$

$-x - 1 \geq 0$

$x + 1 < 0$

$x < -1$

$2 \cdot \frac{x}{7} \cdot 7$ $\frac{x}{7} + 7 = b$

$t^3 + t^2 - 2 \mid t - 1$
$t^2 + 2t + 2$
$-t^3 - t^2$
$2t^2 - 2$
$-2t^2 - 2t$
$2t - 2$

$-x - 1 = c$

$2 - \frac{1}{7} = \frac{13}{7}$

$50^2 = 2500$
$10^2 = 100$
$20^2 = 400$
$40^2 = 1600$
35

$49 \times 9 = 441$, -80, 361

$\log_{a^{\frac{1}{2}}} b$ $2\log_a b$

19×19: $171 + 19 = 361$

$\log_{c^2} a$ $\frac{1}{2}\log_c a$

$\frac{-7}{7} + 7 \geq 0$

$\log_{b^{\frac{1}{2}}} c$ $2\log_b c$

x $\frac{x}{7} + 7 \geq 0$

$-\frac{140}{7} +$

$49 \times 3 = 147$

$\cancel{2lo}$ $2 \log_a b \log_b c \log_c a = 2$

$(x+1)^2$

$19 \times 7 = 133$

$147 + 133 = 280$

$\begin{cases} x \cdot y z = 2 \\ x = y \\ x + 1 = z \end{cases}$

$x^2 + x + 2 = 0$
$D = 1 - 4 < 0$

$2\frac{1}{7}$

14 133

$\cancel{2} \frac{1}{7}$

$28 \times 4 = 112$

$x^2 \cancel{x} \cdot (x+1) = 2$

$D = 9 + 28 \cdot 4$

$x^3 + x - 2 = 0$

$x^3 + x - 2 \mid x - 1$
$x^2 + x + 2$
$-x^3 - x^2$
$x^2 + x - 2$
$-x^2 - x$

11

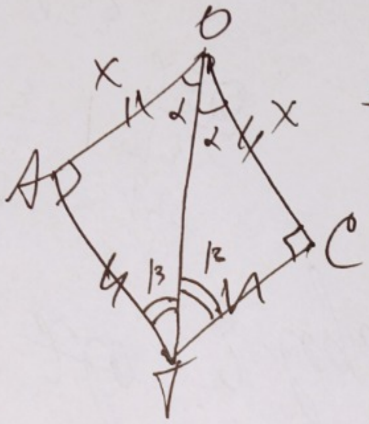
$x_1 = \frac{-3+11}{2} = 4$ $2x - 2$

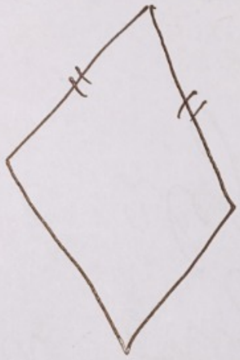
$x_2 = \frac{-3-11}{2} = -7$

$(x-1)(x^2+x+2) = 0$

~~Чистовик~~

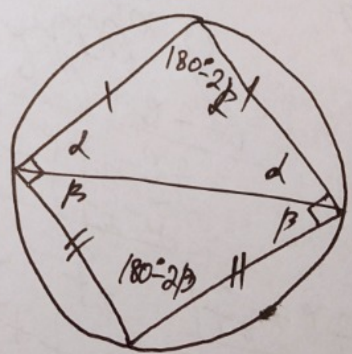
Черновик





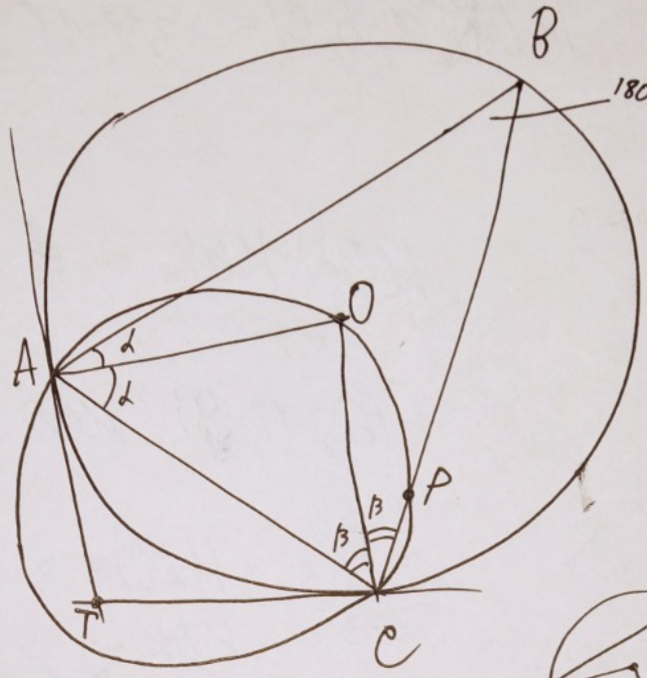
$$S=\frac{abc}{4R}$$

$$2R=\frac{AC}{\sin B}$$



$$\alpha+\beta=90^\circ$$

$$180^\circ-2\alpha+\cancel{180^\circ}-2\beta=\cancel{180^\circ}$$



$180° - 2\alpha - 2\beta$

$$\begin{array}{r|l} 450 & 7 \\ -42 & 64 \\ 30 & \\ -28 & \\ 2 & \end{array}$$

$\cancel{\dfrac{30 \cdot 15}{7}}$

$\cancel{450}$

$\dfrac{3 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 5}{7}$

$180° - 2\alpha - 2\beta$

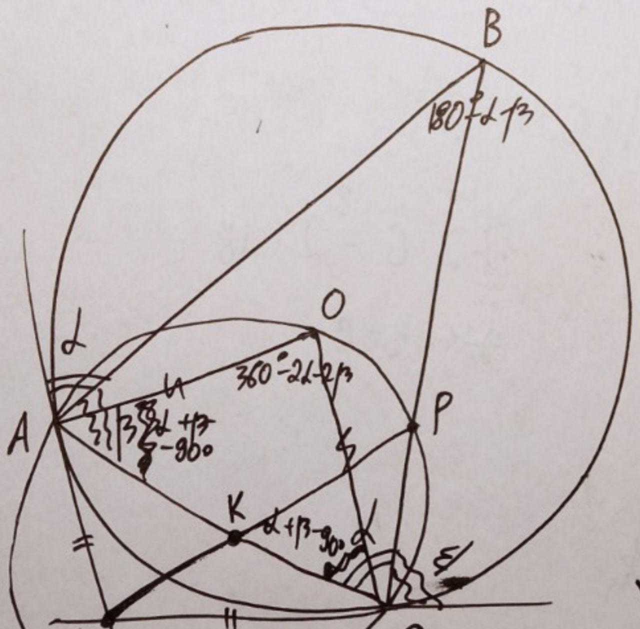
$180° - \alpha - \beta = 360° - 4\alpha - 4\beta$

$3\alpha + 3\beta = 180°$

$\alpha + \beta = 60$

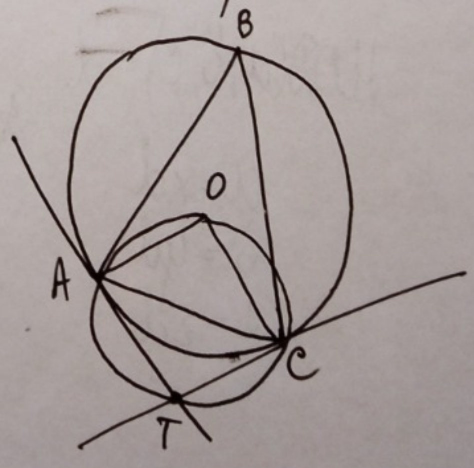
$\sqrt{5} \times \sqrt{5}$

$2\sqrt{5}$



$180° - 360° + 2\alpha + 2\beta$

$\alpha + \beta - 90°$



$НОД(a, b, c) = 3^1 \cdot 11^1$

$НОК(a, b, c) = 3^{19} \cdot 11^{15}$

~~ctg~~ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{5}$

$34 \sin^2 \angle ABC = 9$

$НОД \cdot НОК = 18 \cdot 6 \cdot 9$

$\frac{7+5+5}{10}$

17

$(6; 18; 9)$ НОД

$2 \cdot 3$

$2 \cdot 3 \cdot 3$

$3 \cdot 3$

$НОД = 3$

$НОК = 2 \cdot 3 \cdot 3$

$\frac{15}{7}$

38

24, 18

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

$НОК = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{8} \cdot 3 \cdot 3 = 8 \cdot 9 = 72$

$450 \mid 7$

$-42 \quad 65$

30

$65 \times 7 = 450$

$НОД = 6$

$72 \cdot 6 \overset{?}{=} 24 \cdot 18$

~~$24 \cdot 3 \cdot 6$~~

$НОД(a, b, c) = d$ ☆

$a = xd$

$b = yd$

$c = zd$

$НОД(a,b,c) = 3 \cdot 11$

$НОК(a,b,c) = 3^{19} \cdot 11^{15}$

$a = 3^k \cdot 11^l$

$b = 3^m \cdot 11^n$

$c = 3^t \cdot 11^p$

$НОД(a,b,c) = 3^{\min(k,m,t)} \cdot 11^{(\min(l,n,p)}$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times\ 15 \\ \hline 95 \\ +\ 19\ \ \\ \hline 285 \end{array}$$

$6!$

$$\begin{array}{r} {}^{5} \\ 19 \\ \times\ 6 \\ \hline 114 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {}^{1}\,{}^{3} \\ 114 \\ \times\ 90 \\ \hline 10260 \end{array}$$

21104965 (U373925 M1300894)

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 14 \\ \hline 196 \\ +\ 49 \\ \hline 686 \\ -\ 13 \\ \hline 673 \end{array}$$

$x < -1$ $\quad \frac{x}{7} + 7 > 0$

$\frac{x}{7} > -7$

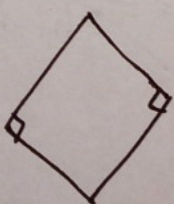
$\frac{-13 - \sqrt{1348}}{14 \cdot 7}$ ... -7

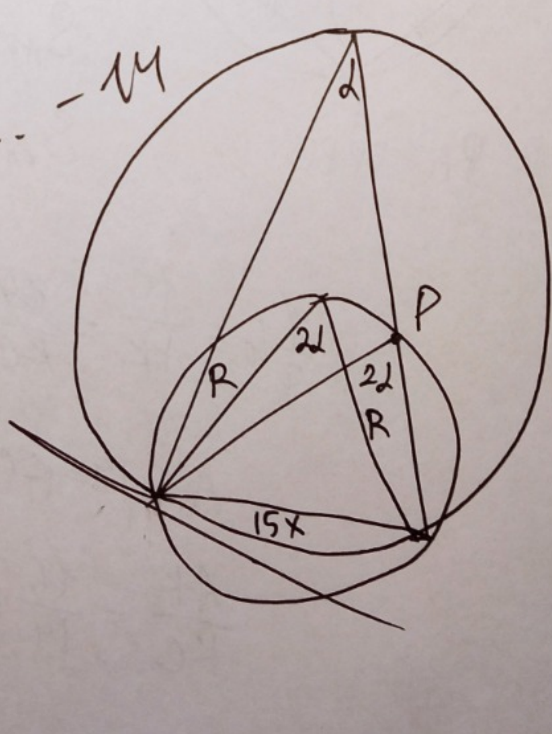
$225x^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha$

$-13 - \sqrt{1345}$

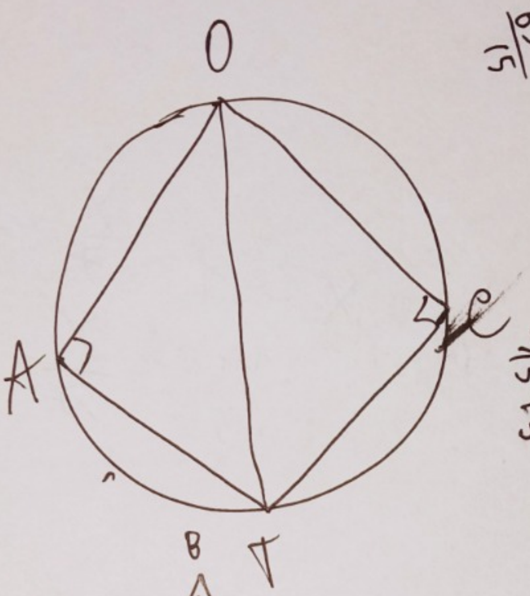
$-13 - \sqrt{1345}$ ... -14

$-\sqrt{1345}$





21104965 (U373925 M1300894)



$7x^2+13x-42=0$

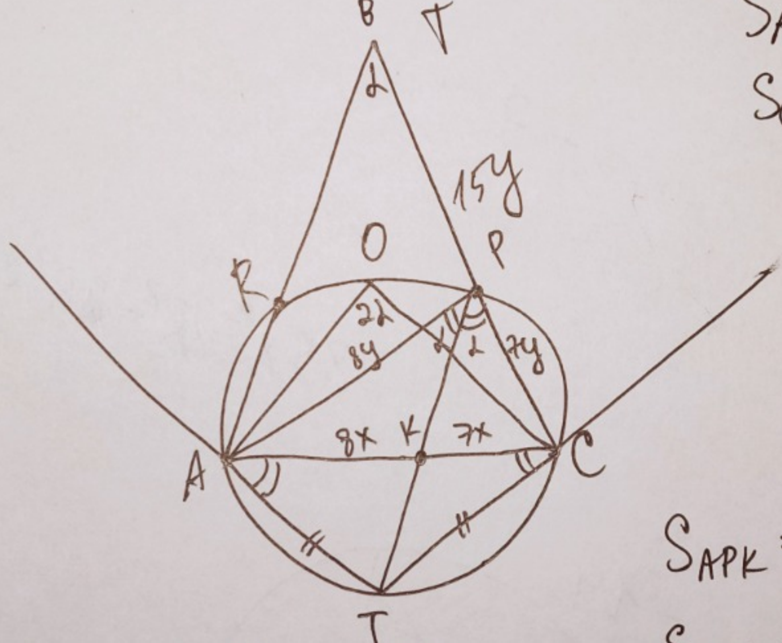
$D=169+4\cdot 42\cdot 7=$

$=1345$

$1345 : 5 = 269$

$S_{APK}=16$

$S_{CPK}=14$



$BR\cdot BA=BP\cdot BC$

$S_{APK}=\frac{1}{2}h\cdot AK=16$

$S_{CPK}=\frac{1}{2}\cdot h\cdot KC=14$

$\frac{1}{2}h=\frac{16}{AK}=\frac{14}{KC}$

$AK=\frac{16}{\frac{1}{2}h}$

$KC=\frac{14}{\frac{1}{2}h}$

$=7$

$\frac{1}{2}$

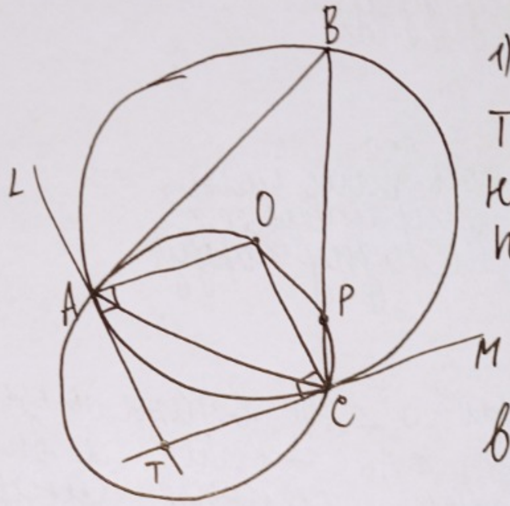
$AK\cdot 14=KC\cdot 16$

$\frac{AK}{KC}=\frac{16}{14}=\frac{8}{7}$

Чистовик

Задача №6.

а)



1) докажем, что точка T принадлежит окружности, которая ~~пересек~~ проходит через точки A, O, C

1

~~1. пусть это не так~~

1. OA – радиус, проведенный в точку касания $\Rightarrow OA \perp LT$

аналогично $OC \perp TM$

2. тогда $\angle OAT + \angle OCT = 180°$

$\angle AOC + \angle ATC = 180°$ $\Big| \Rightarrow$

(т.к. $\angle AOC + \angle OCT + \angle CTA + \angle TAO = 360°$)

$\Rightarrow$ четырёхугольник AOCT – вписанный $\Rightarrow$ точка T лежит на окружности

2) правильный рисунок:

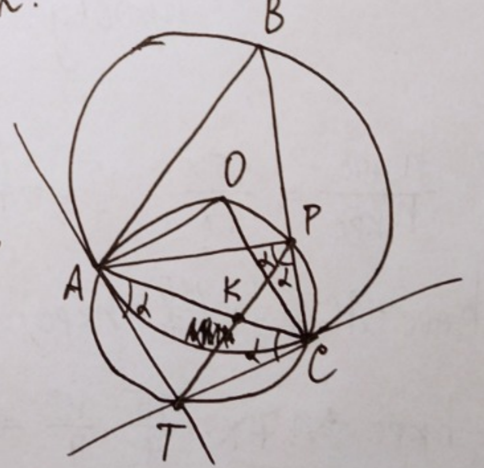
~~1. четырёхугольник AOCT:~~

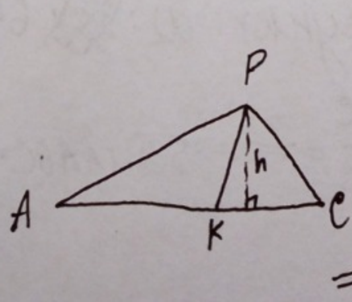
~~$\angle OAT = \angle OCT = 90°$~~

~~AO = OC (как радиусы)~~

~~AT = TC (как отрезки касательных, проведённых из одной вершины)~~ $\Big| \Rightarrow$

~~$\Rightarrow$~~





$S_{APK} = 16 = \frac{1}{2} h \cdot AK$

$S_{PKC} = 14 = \frac{1}{2} h \cdot KC$ $\Big| \Rightarrow \frac{16}{AK} = \frac{14}{KC} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow AK = 8x,\ KC = 7x$

3) пусть $\angle TAC = \angle TCA = \alpha$ ($\triangle ATC$ – р/б, т.к. $AT = TC$ как отрезки касатель-

ных, проведённых из одной точки) $\Rightarrow$ Чистовик

②

$\Rightarrow \angle TPC = \angle TAC = \alpha$ (как впис. углы, опирающиеся на одну дугу)
$\angle APT = \angle ACT = \alpha$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APC = 2\alpha \Rightarrow \angle AOC = 2\alpha$ (как впис. углы, опирающиеся на одну хорду) $\angle AOC = \angle APC$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = \alpha$ (т.к. в окружности ω $\angle AOC$ ~~в 2 раза больше~~ — центральный, $\angle ABC$ — впис., а впис. угол в 2 раза меньше центрального) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$ (по двум углам: $\angle ABC = \angle KPC = \alpha$, $\angle BCA$ — общий) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{KC} = \dfrac{h_{ABC}}{h_{KPC}}$ (где h_{ABC} — высота, провед. из точки B на AC, и h_{KPC} — высота, провед. из точки P на AC) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{h_{ABC}}{h_{KPC}} = \frac{15x}{7x} = \frac{15}{7} \Rightarrow h_{ABC} = \frac{15}{7} h_{KPC}$$

4) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h_{ABC} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{15}{7} \cdot h_{KPC}\right) \cdot (15x) =$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot h_{KPC} \cdot 7x}_{14} \cdot \frac{15}{7} \cdot \frac{15}{7} = \overset{2}{\cancel{14}} \cdot \frac{225}{7 \cdot \cancel{7}} = \frac{450}{7} = 64\frac{2}{7}.$$

Ответ на пункт а): $64\frac{2}{7}$.

б) 1) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} \angle ABC = \frac{3}{5} \Rightarrow \dfrac{\sin \angle ABC}{\cos \angle ABC} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5 \sin \angle ABC =$

$= 3 \cos \angle ABC \Rightarrow 5 \sin \angle ABC = 3\sqrt{1 - \sin^2 \angle ABC} \Rightarrow$ ($\angle ABC$ >0)

$\Rightarrow 25 \sin^2 \angle ABC = 9 - 9 \sin^2 \angle ABC$

$\sin^2 \angle ABC = \frac{9}{34} \Rightarrow \sin \angle ABC = \frac{3}{\sqrt{34}}$

Чистовик

продолжение задачи 6 3

2) для треугольника ABC по обобщённой теореме синусов: $2R = \frac{AC}{\sin\angle ABC} \Rightarrow AC = 2R\cdot\sin\angle ABC = R\cdot\frac{6}{\sqrt{34}}$

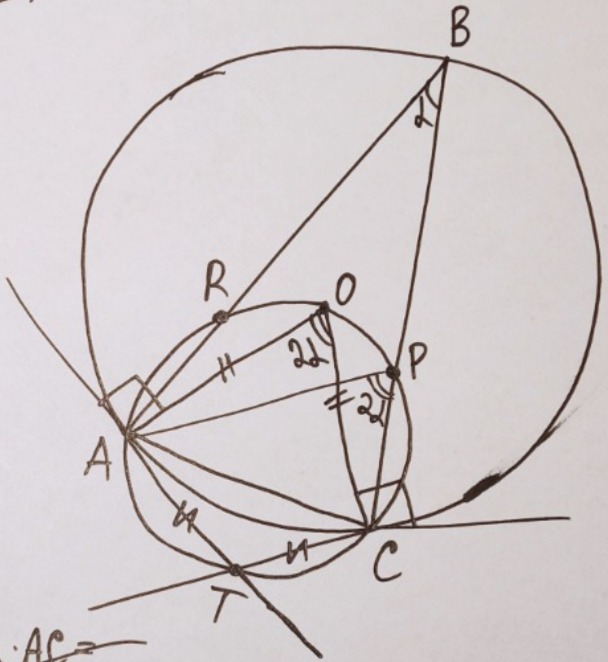
где R – радиус ω

3)

$S_{APC} = S_{APK} + S_{CPK} = 16 + 14 = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot h_{APC}\cdot AC = 30$

высота из точки P



$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC \sin\alpha = 65$

$\cancel{S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{7} h_{KPC}\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{7} h_{APC}\cdot AC =}$

для окружности, проход. через A, O, C: $BR\cdot BA = BP\cdot BC$

Чистовик.

см. страницу 5

Чистовик

5

[redacted]

Задача №5. 1) пусть $a = 29-x$, $b = \frac{x}{7}+7$, $c = (-x-1)$.

Тогда $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{a^{\frac{1}{2}}} b = 2\log_a b$

$$\log_{(x+1)^2}(29-x) = \log_{c^2} a = \frac{1}{2}\log_c a$$

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = \log_{b^{\frac{1}{2}}} c = 2\log_b c$$

ОДЗ:
$29-x>0,\ x\neq 29$
~~...~~; $x+1<0$
$\frac{x}{7}+7>0,\ \frac{x}{7}+7\neq 1$

Заметим, что $(2\log_a b)\cdot\left(\frac{1}{2}\log_c a\right)\cdot(2\log_b c) = 2$

~~2) пусть~~ $\cancel{\begin{cases} 2\log_a b = t_1 \\ \frac{1}{2}\log_c a = t_2 \\ 2\log_b c = t_3 \end{cases}}$ ~~2) пусть каждый логарифм равен~~ $\cancel{t_1, t_2}$ ~~или~~ $\cancel{t_3}$ (

~~тогда имеем~~

2) пусть логарифмы равны t_1, t_2, t_3 (неважно, в каком порядке):

тогда имеем: $\begin{cases} t_1\cdot t_2\cdot t_3 = 2 \\ t_1 = t_2 \\ t_1+1 = t_3 \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$t_1\cdot t_1\cdot(t_1+1) = 2$$
$$t_1^3 + t_1^2 - 2 = 0$$
$$(t_1-1)(t_1^2+2t_1+2) = 0$$
$$(t_1-1)\cdot\big(\underbrace{(t_1+1)^2+1}_{\geq 1}\big) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$t_1 - 1 = 0$$
$$t_1 = 1$$

то есть мы получаем, что какой-то из логарифмов равен 1

см. продолжение

3) рассмотрим все случаи: $\boxed{\text{Чистовик}}$

6

[redacted]

1. $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1$

$\Downarrow$

$\sqrt{29-x}=\frac{x}{7}+7$

(на ОДЗ $\begin{cases}\frac{x}{7}+7>0\\ 29-x>0\end{cases} \Rightarrow$ обе части уравнения ~~неотриц~~ положит.)

возведём обе части в квадрат:

$29-x=\frac{x^2}{49}+2x+49$

$\frac{1}{49}x^2+3x+20=0$

$x^2+49\cdot 3x+49\cdot 20=0$

$D=49^2 3^2-4\cdot 49\cdot 20=49(49\cdot 9-4\cdot 20)=$

$=49\cdot 361=(7\cdot 19)^2$

$x_1=\frac{-49\cdot 3+7\cdot 19}{2}=-7$ (удовл. ОДЗ)

$x_2=\frac{-49\cdot 3-7\cdot 19}{2}=-140$ (не удовл. ОДЗ, т.к. $\frac{-140}{7}+7<0$)

2. $\log_{(x+1)^2}(29-x)=1$

$(x+1)^2=29-x$

$x^2+2x+1-29+x=0$

$x^2+3x-28=0$

по т. Виета:

$\begin{cases}x_1=4 \text{ (не удовл. ОДЗ, т.к. } 4+1>0)\\ x_2=-7 \text{ (удовл. ОДЗ)}\end{cases}$

3. $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=1$

$\sqrt{\frac{x}{7}+7}=-x-1$

(на ОДЗ обе части уравнения положит. $\Rightarrow$ возведём в квадрат обе части)

$\frac{x}{7}+7=x^2+2x+1$

$x^2+\frac{13}{7}x-6=0$

$7x^2+13x-42=0$

$D=1345$

не удовл. ОДЗ, т.к. $x+1>0$, а не <0

$x_1=\frac{-13+\sqrt{1345}}{14}$; $x_2=\frac{-13-\sqrt{1345}}{14}$

$\boxed{\text{Чистовик}}$

$$x_2=\frac{-13-\sqrt{1345}}{14}$$

сравним $\frac{x_2}{7}$ с -7:

$$\frac{-13-\sqrt{1345}}{7\cdot 14} \;?\; -7 \quad \Big|\cdot(7\cdot 14)$$

$$-13-\sqrt{1345} \;?\; -686$$

$$-\sqrt{1345} \;?\; -673$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{-13-\sqrt{1345}}{7\cdot 14}+7>0$$

при этом $\frac{-13-\sqrt{1345}}{14}<-1 \Rightarrow$ корень удовлетворяет ОДЗ

Ответ: $-7;\ \frac{-13-\sqrt{1345}}{14}$.

$\boxed{\text{Чистовик}}$

8

Задача №4.

1) пусть $a=3^k\cdot 11^l$ (другие простые делители ~~множители~~ отсутствуют, иначе они бы были в НОК)

$b=3^m\cdot 11^n$

$c=3^t\cdot 11^p$

~~где $k, l, m, n, t, p \in \{0;1;2;\dots$~~

где $k, m, t \in \{1; \dots 19\}$;

$l, n, p \in \{1; \dots 15\}$

2) $НОД(a,b,c) = 3^{\min(k,m,t)}\cdot 11^{\min(l,n,p)} = 3^1\cdot 11^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ что-то из $k,m,t=1$ (пусть $k=1$, $l=1$, остальные случаи симметричны)

что-то из $l,n,p=1$

$НОК(a,b,c) = 3^{\max(k,m,t)}\cdot 11^{(l,n,p)} = 3^{19}\cdot 11^{15} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ что-то из $k,m,t=19$ (пусть $m=19$, $n=15$, ост. случаи симметричны)

что-то из $l,n,p=15$

3) тогда: $k=1$, $m=19$, $t\in\{1;2;\dots;19\}$

$l=1$, $n=15$, $p\in\{1;2;\dots;15\}$

тогда кол-во способов выбрать $t=19$, $p=15$

~~итого: количество способов выбрать t и $p = 19\cdot 15 = 285$~~

~~но также могут быть~~

также могут быть $k=19$, $m=1$, $t\in\{1;\dots 19\}$

$k=\{1;\dots 19\}$, $m=1$, $t=19$ $\Rightarrow$

всего таких 3!

Чистовик

9

тогда количество способов выбрать показатели степени 3 : $19 \cdot 3! = 19 \cdot 2 \cdot 3 = \underline{114}$

а количество способов выбрать показатели степени 11 : $15 \cdot 3! = 15 \cdot 2 \cdot 3 = \underline{90}$

аналогично перестановок $l, n, p = 3!$

т.к. показатели степеней 3 и 11 мы выбираем независимо друг от друга, то общее

ответ: $90 \cdot 114 = \underline{10260}$

Ответ: $\underline{10260}$.