Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104874**

ID профиля: **852166**

Вариант 24

Чистовик (1) [redacted]

№1

1) Пусть d - разность этой арифметической прогрессии. Арифметическая прогрессия возрастающая и состоящая из целых чисел $\Rightarrow \begin{cases} d>0 \\ d\in\mathbb{Z} \end{cases}$

2) $\begin{cases} a_5a_{18} > S-4 \\ S+60 > a_{10}a_{13} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_5a_{18} + S + 60 > S - \cancel{6}4 + a_{10}a_{13}$

$a_{10}a_{13} - a_5a_{18} < 64$

$(a_1+9d)(a_1+12d) - (a_1+4d)(a_1+17d) < 64$

$a_1^2 + 108d^2 + 21a_1d - a_1^2 - 21a_1d - 68d^2 < 64$

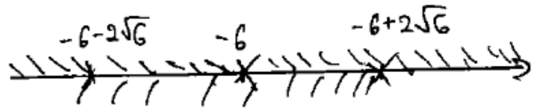
$40d^2 < 64$

$d^2 < 1{,}6 \Rightarrow$ т.к. $\begin{cases} d>0 \\ d\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow d=1$

3) $S = \frac{9}{2}(a_1+a_9) = \frac{9}{2}(2a_1+8d) = \frac{9}{2}(2a_1+8)$

$\begin{cases} \frac{9}{2}(2a_1+8) - 4 < (a_1+4)(a_1+17) \\ \frac{9}{2}(2a_1+8)+60 > (a_1+9)(a_1+12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1+6)^2 > 0 \\ (a_1 - (-6-2\sqrt{6}))(a_1 - (-6+2\sqrt{6})) < 0 \end{cases}$



$\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z} \\ a_1 \in (-6-2\sqrt{6}; -6) \cup (-6; -6+2\sqrt{6}) \end{cases}$

$-11 \overset{<}{\vee} -6-2\sqrt{6}$	$-10 \overset{>}{\vee} -6-2\sqrt{6}$	$-6+2\sqrt{6} \overset{>}{\vee} -2$	$-6+2\sqrt{6} \overset{<}{\vee} -1$
$2\sqrt{6} \overset{<}{\vee} 5$	$2\sqrt{6} \overset{>}{\vee} 4$	$2\sqrt{6} \overset{>}{\vee} 4$	$2\sqrt{6} \overset{<}{\vee} 5$
$24 \overset{<}{\vee} 25$	$24 \overset{>}{\vee} 16$	$24 \overset{>}{\vee} 16$	$24 \overset{<}{\vee} 25$

$\Rightarrow$

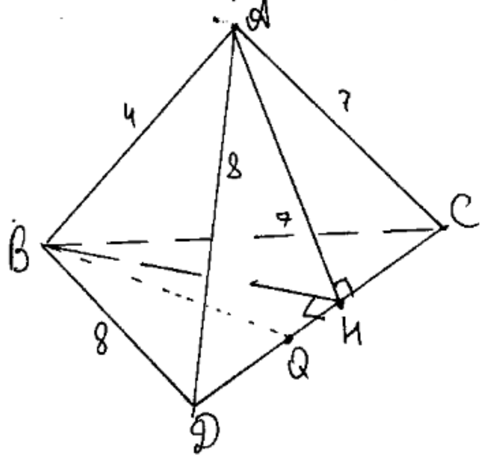
$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z} \\ a_1 \in (-11; -6) \cup (-6; -1) \end{cases} \Rightarrow a_1 = -10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2$

Ответ: $-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2$

Чистовик ②

№ 2.

Рассмотрим один из таких тетраэдров, докажем, что $AB \perp CD$.



Дано: $ABCD$ - тетраэдр.
$AB = 4$; $AC = CB = 7$; $AD = DB = 8$.

Док-ть: $AB \perp CD$

Док-во:

① Д.п. $AH \perp CD$ в $\triangle ADC$

$\triangle ACD = \triangle BCD$ по трём сторонам ($AC = CB$, $BD = AD$; CD - общ.) =>

=> Пусть BQ - высота $\triangle BCD$.

По т. Пифагора в $\triangle BCQ$ и $\triangle ACH$:

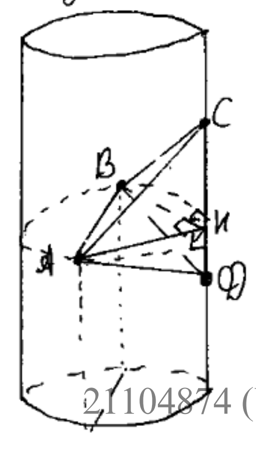
$CH^2 = AC^2 - AH^2 = 7^2 - AH^2 = BC^2 - BQ^2 = CQ^2$ =>

=> $CH = CQ$ => $H \equiv Q$ (т.к. $\triangle ACD = \triangle BCD$ => $BQ = AH = \frac{2S(\triangle ACD)}{CD}$)

② Из ① => $AH \perp CD$ и $BH \perp CD$ => $CD \perp (ABH)$ по пр-ку =>
=> $CD \perp AB$.
ч.т.д.

Значит AB перпендикулярно оси цилиндра, а значит проекция AB на одну из окружностей оснований равна по длине AB и является хордой этой окр-ти =>
=> т.к. самая большая по длине хорда окр-ти - диаметр =>
=> радиус цилиндра минимален *, ~~когда проекция AB на окр-ть основания является её диаметром =>~~
~~=> $R_{min} = \frac{AB}{2}$~~ * когда AB - диаметр цилиндра => $R_{min} = \frac{AB}{2} = 2$.

Рисунок:



Если $(ABH) \perp CD$, то (ABH) параллельна плоскости основания цилиндра => Вокруг $\triangle ABH$ описана окр-ть такая, что AB - диаметр этой окр-ти => $\angle AHB = 90°$ и $BH = AH$ =>

=> По т. Пифагора в $\triangle AHB$: $AB^2 = 16 = AH^2 + BH^2 = 2AH^2$ =>

=> $AH = BH = \sqrt{\frac{AB^2}{2}} = 2\sqrt{2}$

По теореме Пифагора в $\triangle AHD$ и $\triangle BHC$:

$CD = DH + HC = \sqrt{AD^2 - AH^2} + \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{64-8} + \sqrt{49-8} =$
$= 2\sqrt{14} + \sqrt{41}$

Ответ: $2\sqrt{14} + \sqrt{41}$

Черновик №1

№1

$\frac{a_1+a_9}{2}\cdot 9=\frac{9}{2}(a_1+a_9)=\frac{9}{2}(2a_1+8d)=S$

$\frac{9}{2}(2a_1+8d)-4<(a_1+4d)(a_1+17d)$

$18a_1+72d$

$\frac{a_1+a_9}{2}\cdot 9=\frac{9}{2}(2a_1+8d)=S$

$(a_1+4d)(a_1+17d)=a_1^2+21a_1d+68d^2$

$(a_1+9d)(a_1+12d)=a_1^2+21a_1d+108d^2$

$\frac{9}{2}(2a_1+8d)-4<a_1^2+21a_1d+68d^2$

$a_1^2+21a_1d_1+108d^2<\frac{9}{2}(2a_1+8d)+60$

$9a_1+36+60>a_1^2+108+21a_1$

$a_1^2+12a_1+12=0$

$17\cdot 4=68$ $\quad 16\cdot 6=96$ $\quad 12\cdot 9=108$ $\quad 144-48=96$

$96 \mid 16$

$D=144-48=96$

-10

$-20+8=-12\cdot\frac{9}{2}=-54$ $\quad 108-68=40$

$\frac{12\pm 4\sqrt{6}}{2}=6\pm 2\sqrt{6}$

-54

-58

$64 \mid 4 = 16$

$a_5=-6$

$a_{18}=7$

d - разность.

$\cancel{\frac{9}{2}(2a_1+8d)}-4+\cancel{a_1^2}+\cancel{21a_1d_1}+108d^2<\cancel{a_1^2}+\cancel{21a_1d}+68d^2+\cancel{\frac{9}{2}(2a_1+8d)}+60$

$40d^2<64$

$10d^2<16$

$d^2<1,6$

d - целое число $\Rightarrow d=1$

$16\cdot 6=96$ $\quad 36\cdot 4=144$

$\frac{9}{2}(2a_1+8)$ $\quad 144-36$

$$\begin{cases}\frac{9}{2}(2a_1+8)-4<(a_1+4)(a_1+17)\\ \frac{9}{2}(2a_1+8)+60>(a_1+9)(a_1+12)\end{cases}$$

$34\cdot 4=136$ $\quad D\ 144-48=96$

$$\begin{cases}a_1^2+12a_1+34>0\\ a_1^2+12a_1+12<0\end{cases}$$

$96 \mid 16 \cdot 6$

$4\sqrt{6}$

$D=144-136=8$

$a_1=\frac{-12\pm 2\sqrt{2}}{2}=-6\pm\sqrt{2}$

$a_1=\frac{-12\pm 4\sqrt{6}}{2}=-6\pm 2\sqrt{6}$

$-6-2\sqrt{6}\ \overset{<}{\vee}\ -8$

$-2\sqrt{6}\ \overset{<}{\vee}\ -2$

$-6-2\sqrt{6}\vee -10$

$-2\sqrt{6}\vee -4$

$4\vee 2\sqrt{6}$

$16\vee 24$

$-6-2\sqrt{6}\vee -11$

$5\vee 2\sqrt{6}$

$25>$

$68-36=32$ $\quad 36$

$108-96=12$

$-6+\sqrt{2}\ \overset{>}{\vee}\ -5$

$\sqrt{2}\ \overset{>}{\vee}\ 1$

$\vee -4$

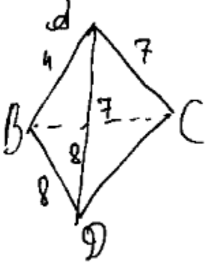
$-6+2\sqrt{6}\ \overset{>}{\vee}\ -2$

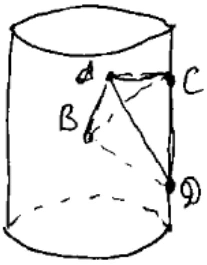
$2\sqrt{6}\ \overset{>}{\vee}\ 4$

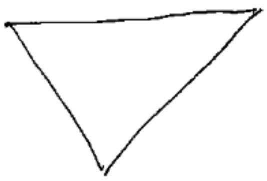
Черновик №2

$$9a_1 + 36 + 60 = a_1^2 + 21a_1 + 108$$

$$a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$$



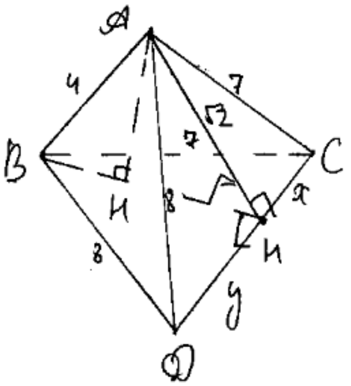




$$\begin{array}{r} 49 \\ +\ 64 \\ \hline 113 \\ -\ 16 \\ \hline 97 \end{array}$$

$CD > 11$

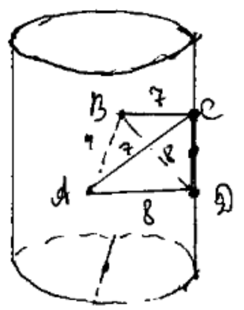
$CD < 15$

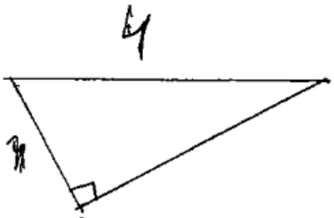


$7^2 - x^2 + 8^2 - y^2 = 4^2$

$x^2 + y^2 = 97$

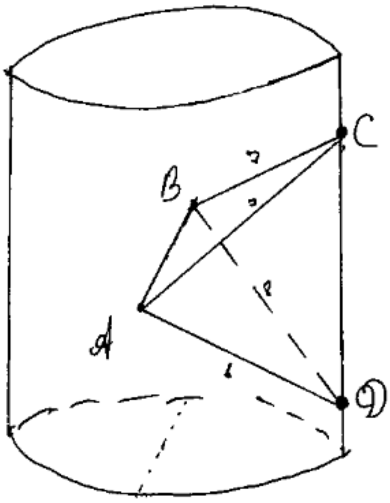
$49 - 2$

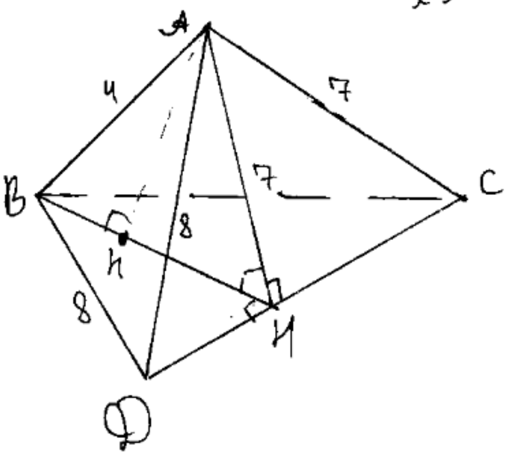


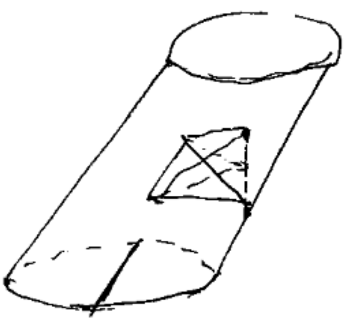


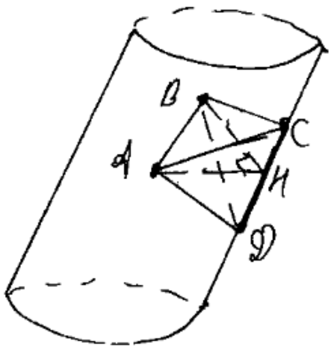
$2x^2 = 4$

$x = \sqrt{2}$



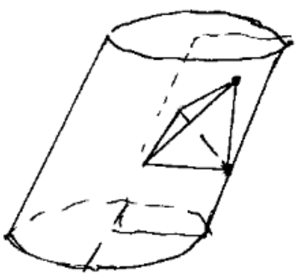






$56 : 4 = 14$

$$\begin{array}{r} 68 \\ -\ 36 \\ \hline 32 \end{array}$$



[redacted]

№1 Черновик №3

1) Пусть d - разность этой арифметической прогрессии.
Арифметическая прогрессия возрастающая и состоящая из целых чисел $\Rightarrow \begin{cases} d>0 \\ d\in\mathbb{Z} \end{cases}$

2) $\begin{cases} a_5a_{18} > S-4 \\ S+60 > a_{10}a_{13} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_5a_{18} + S+60 > S-4 + a_{10}a_{13}$

$a_{10}a_{13} - a_5a_{18} < 64$

$(a_1+9d)(a_1+12d) - (a_1+4d)(a_1+17d) < 64$

$a_1^2 + 108d^2 + 21da_1 - a_1^2 - 68d - 21da_1 < 64$

$40d^2 < 64$

$d^2 < 1{,}6 \Rightarrow$ т.к. $\begin{cases} d>0 \\ d\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow d=1$

3) $S = \frac{9}{2}(a_1+a_9) = \frac{9}{2}(2a_1+8d) = \frac{9}{2}(2a_1+8)$

$\begin{cases} \frac{9}{2}(2a_1+8)-4 < (a_1+4)(a_1+17) \\ \frac{9}{2}(2a_1+8)+60 > (a_1+9)(a_1+12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a_1+36-4 < a_1^2+21a_1+68 \\ 9a_1+36+60 > a_1^2+21a_1+108 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+12a_1+34>0 \\ a_1^2+12a_1+12<0 \end{cases} \quad \begin{cases} (a_1-(-6+\sqrt{2}))(a_1-(-6-\sqrt{2}))>0 \\ (a_1-(-6-2\sqrt{6}))(a_1-(-6+2\sqrt{6}))<0 \end{cases}$

$-6-2\sqrt{6} \quad -6-\sqrt{2} \quad -6+\sqrt{2} \quad -6+2\sqrt{6}$

$\Rightarrow -6-2\sqrt{6} \overset{<}{V} -6-\sqrt{2}$, $0 \overset{<}{V} 2\sqrt{6}-\sqrt{2}$; $-6+2\sqrt{6} \overset{>}{V} -6+\sqrt{2}$, $2\sqrt{6}-\sqrt{2} \overset{>}{V} 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \in (-6-2\sqrt{6}; -6-\sqrt{2}) \cup (-6+\sqrt{2}; -6+2\sqrt{6}) \\ a_1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$-11 \overset{<}{V} -6-2\sqrt{6}$ $2\sqrt{6} \overset{<}{V} 5$ $24 \overset{<}{V} 25$	$-10 \overset{>}{V} -6-2\sqrt{6}$ $2\sqrt{6} \overset{>}{V} 4$ $24 \overset{>}{V} 16$	$-8 \overset{<}{V} -6-\sqrt{2}$ $\sqrt{2} \overset{<}{V} 2$ $2 \overset{<}{V} 4$	$-7 \overset{>}{V} -6-\sqrt{2}$ $\sqrt{2} \overset{>}{V} 1$ $2 \overset{>}{V} 1$	$-5 \overset{<}{V} -6+\sqrt{2}$ $1 \overset{<}{V} \sqrt{2}$ $1 \overset{<}{V} 2$	$-4 \overset{>}{V} -6+\sqrt{2}$ $2 \overset{>}{V} \sqrt{2}$ $4 \overset{>}{V} 2$
$-6+2\sqrt{6} \overset{>}{V} -2$ $2\sqrt{6} \overset{>}{V} 4$ $24 \overset{>}{V} 16$	$-6+2\sqrt{6} \overset{<}{V} -1$ $2\sqrt{6} \overset{<}{V} 5$ $24 \overset{<}{V} 25$	$\Rightarrow$ ~~$\begin{cases} a_1 \in -11; -6 \\ a_1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$~~	~~$-6 \overset{>}{V} -6-\sqrt{2}$, $0 \overset{>}{V} \sqrt{2}$~~	$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \in (-11; -7) \cup (-5; -1) \\ a_1 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow a_1 = -10; -9; -8; -4; -3; -2$ Ответ: $-10; -9; -8; -4; -3; -2$	

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104874**

ID профиля: **852166**

Вариант 24

Чистовик ①

№4

1) Если ~~ℓ~~НОК$(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15}$, очевидно, что числа a, b, c имеют вид: $3^n\cdot 11^k$, ~~где $n, k \in \mathbb{Z}$~~ где n, k ~~положительные~~ неотрицательные целые числа.

Если НОД$(a;b;c)=33$, то очевидно, что $n\geq 1, k\geq 1$.

~~Пусть n_1 - максимальная степень тройки, на которую делится хотя бы одно из чисел a, b, c, k_1 - максимальная степень 11~~

Пусть n_1 - максимальная степень тройки, такая, что

$$\left[\begin{array}{l} a \vdots 3^{n_1} \\ b \vdots 3^{n_1} \\ c \vdots 3^{n_1} \end{array}\right.$$

Пусть k_1 - максимальная степень 11, такая, что

$$\left[\begin{array}{l} a \vdots 11^{k_1} \\ b \vdots 11^{k_1} \\ c \vdots 11^{k_1} \end{array}\right.$$

Очевидно, что НОК$(a;b;c)=3^{n_1}\cdot 11^{k_1} \Rightarrow n_1=19, k_1=15$.

Также, из того, что НОД$(a;b;c)=33=3\cdot 11$ следует, что у одного из чисел a, b, c должна быть в разложении 3 в 1 степени, а также у одного из чисел a, b, c должна быть 11 в 1 степени в разложении.

Пусть $a=3^{n_a}\cdot 11^{k_a}$; $b=3^{n_b}\cdot 11^{k_b}$; $c=3^{n_c}\cdot 11^{k_c}$.

Из вышесказанного следует, что какие-то четыре числа из $n_a, k_a, n_b, k_b, n_c, k_c$ равны $1, 1, 19, 15$.

Значит два из шести числа могут быть от 1 до 15 (если речь идёт о степени 11) или от 1 до 19 (если речь идёт о степени 3)(. Как раз мы ~~[illegible]~~ присвоили двум числам из n_a, n_b, n_c 1 и 19, а двум числам из k_a, k_b, k_c 1 и 15.)

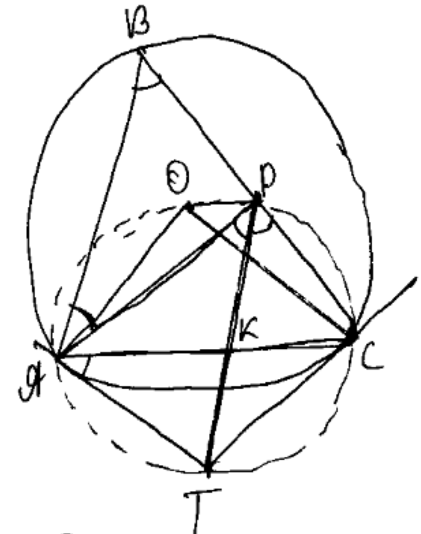
Значит всего вариантов троек $(a;b;c)$ равно:

$C_6^2\cdot 15\cdot 19=\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 15\cdot 19=4275$

Ответ: 4275.

21104874 (U852166 M1295500)

№7 Чистовик ②



Дано: ΔABC; ω - описанная окр-ть ΔABC с центром O.
Окр-ть, проходящая через A, O, C пересекает сторону BC в P
точка T; TA, TC - кас-ные к ω
$TP \cap AC = K$; $S(\Delta PKC) = 14$; $S(\Delta APK) = 16$
Найти: а) $S(\Delta ABC)$
в) AC, если $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$

Решение:

① $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ как угол между кас-ой и радиусом, проведённым в точку касания :)

=> т.к. $\angle OAT + \angle OCT = 180^\circ$ => AOCT - вписанный 4-угольник по пр-ку => в силу единственности описанной окр-ти ΔAOC => A, O, P, C, T - лежат на одной окр-ти.

② По св-ву вписанных углов, опирающихся на одну и туже дугу и по св-ву угла между кас-ой и хордой:

$\angle TPC = \angle TAC = \angle ABC$ => $AB \parallel PT$ (т.к. $\angle ABC = \angle TPC$ - соответственные углы.) => $S(\Delta AKK) = S(\Delta KBP) = 16$.

③ По св-ву отрезков кас-ных к окр-ти, проведённых из одной точки: $TA = TC$ => ΔATC - р/б => $\angle TAC = \angle TCA = \angle APT = \angle BAP$ как накрестлежащие => ΔAPB - р/б => $BP = AP$

③ $\angle APT = \angle TPC$ => $\frac{S(\Delta APK)}{S(\Delta KPC)} = \frac{AP \cdot PK}{CP \cdot PK} = \frac{AP}{CP} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7} = \frac{BP}{CP}$ =>

=> $\frac{S(\Delta ABP)}{S(\Delta APC)} = \frac{BP}{CP} = \frac{8}{7}$ (как Δ-ки с общей высотой) =>

=> $S(\Delta ABP) = \frac{8}{7} S(\Delta APC) = \frac{8}{7}(S(\Delta APK) + S(\Delta PCK)) = \frac{8}{7} \cdot (16+14) =$
$= \frac{240}{7}$ => $S(\Delta ABC) = S(\Delta ABP) + S(\Delta APC) = \frac{240}{7} + 30 = \frac{450}{7}$

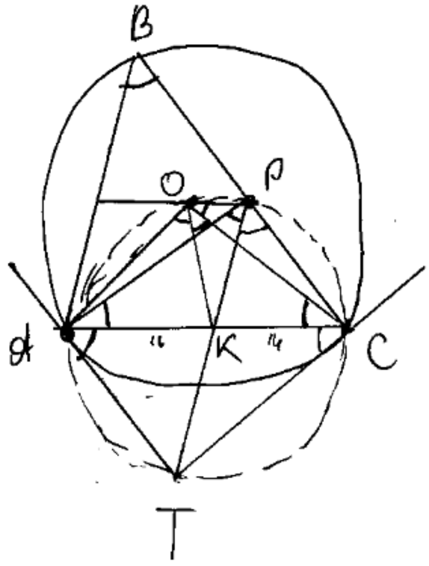
Чистовик (3)

(4) $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{5}$.

$AO = R = \frac{AC}{}$

21104874 (U852166 M1295500)

№7 Черновик №1



$\frac{AP}{PC} = \frac{8}{7}$

$180^\circ - 2\beta = \alpha + 2\beta$

$180^\circ - 4\beta$

$OP \parallel AC$

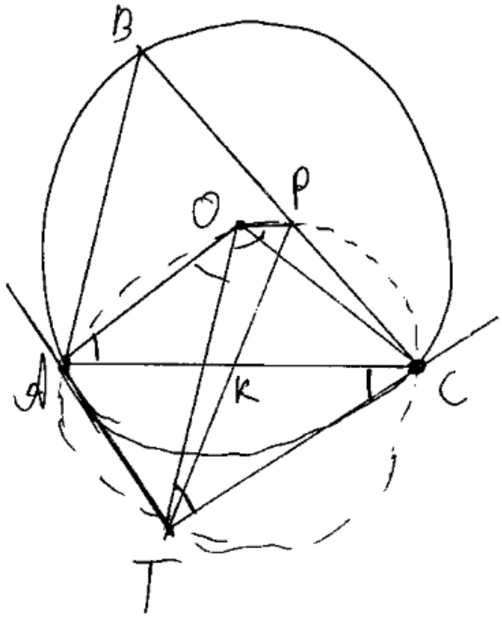
19 15 1 1 19 · 15

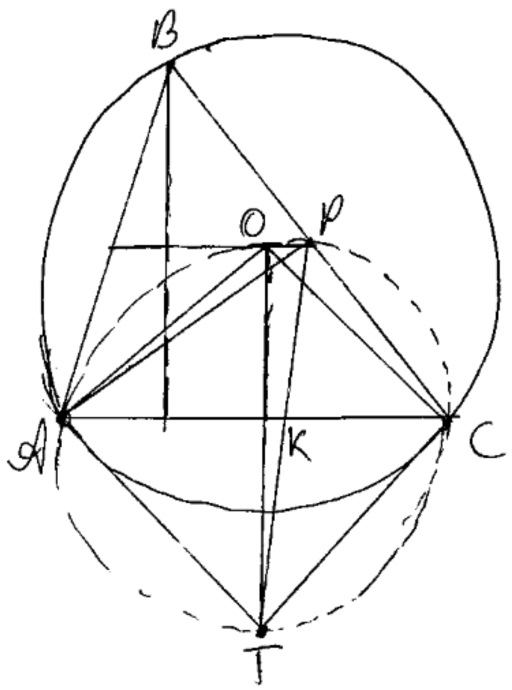
$C_6^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$

$\times \begin{array}{r} 225 \\ 19 \end{array}$

$+ \begin{array}{r} 2025 \\ 225 \\ \hline 4275 \end{array}$

$S(\triangle APK) + S_\triangle CPK = S(\triangle AOC) + S(\triangle COK) =$
$= 30$





$OP \parallel AC \Rightarrow$
$\Rightarrow S(\triangle APK) +$
$+ S(\triangle PCK) =$
$= S(\triangle AOC) =$
$= 30$

№4.

НОД $(a; b; c) = 33$

НОК $(a; b; c) = 3^{19} \cdot 11^{15}$

$3 \cdot 11 \quad (3^{19} \cdot 11^{15}; 33; 33)$

$3 \cdot 11^{15} \quad 3^{19} \cdot 11$

№5.

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7} + 7\right) = \log_{(x+1)^2}(29 - x)$

21104874 (U852166 M1295500)

№5 . черновик №2

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$a=b$

$c=a+1$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

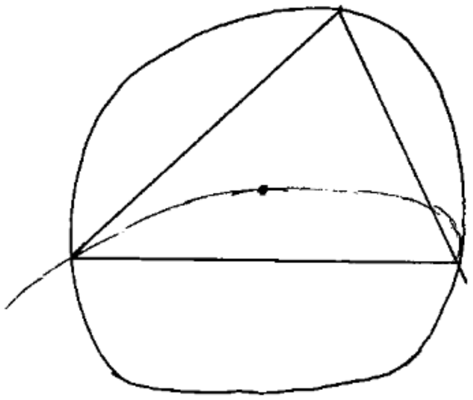
$\cancel{\frac{2}{\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)}=\log}$

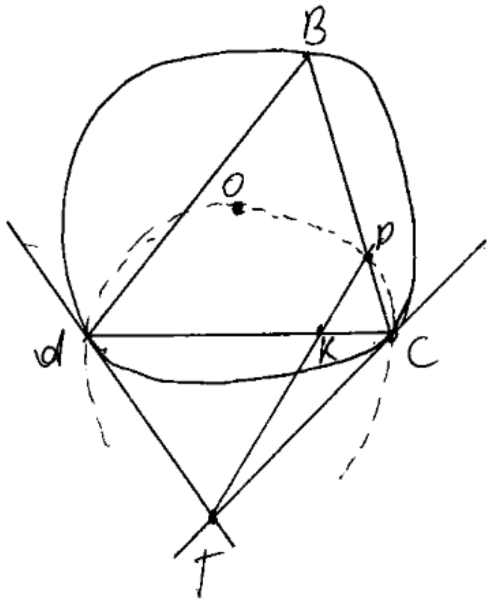
$\frac{2}{\log_{\frac{x}{7}+7}(29-x)}=\log_{(x+1)^2}(29-x)$

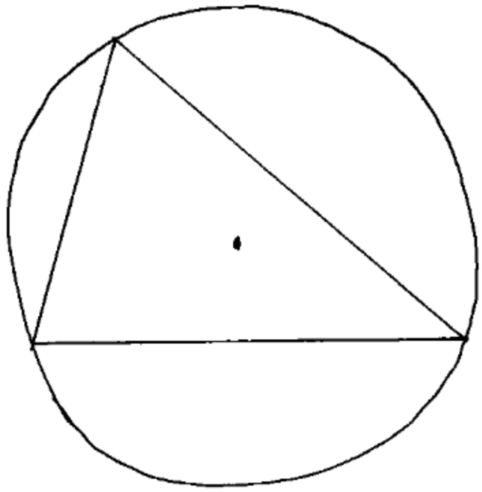
$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$\log_a b=\log_c a^*$

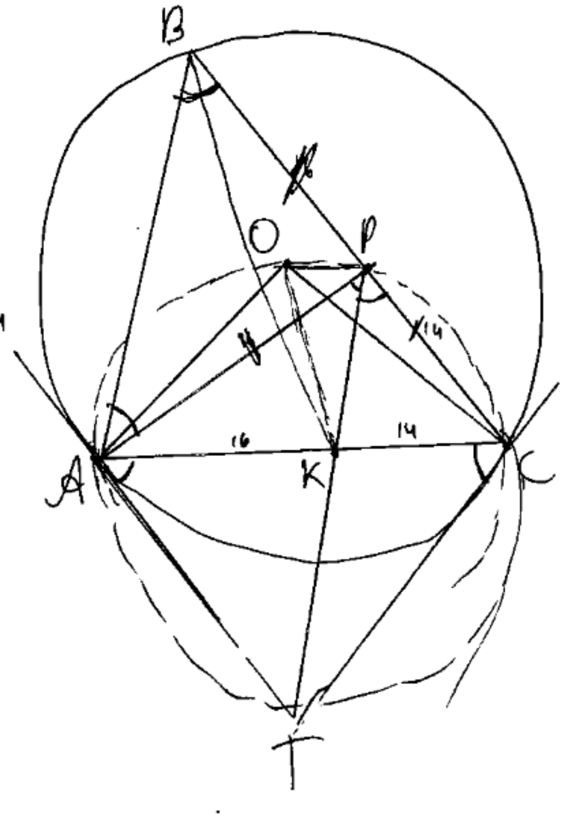
$\log_a b-\log_c d$







$S_{\triangle dPK}=6$ $S(\triangle PKC)=14$



Черновик №3

№4

$НОД\ (a; b; c) = 33 \quad = 3 \cdot 11$

$НОК\ (a; b; c) = 3^{19} \cdot 11^{15}$

$a = 3 \cdot 11 \cdot x;\ b = 3 \cdot 11 \cdot y;\ \cancel{c} = 3 \cdot 11 \cdot z$

$18 - 3,\ 14 - 11$

$0 \xrightarrow{3} 18 \quad$ 19 Вар-ов

$0 \xrightarrow{11} 14$

$\cancel{19 +}\ 3^{19} \cdot 11^{15}.$

$a > c$

$b > d$

$\log_a b - \log_c d$

$(a-1)(c-1)(b-d)$

№5.

$\log_{\sqrt{29-x}} \left(\frac{x}{7}+7\right),\ \log_{(x+1)^2}(29-x),\ \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

$a = b$

$c = a+1 = b+1$

$\log_a b - \log_c a^2$

$\log_a b - \log_c d$

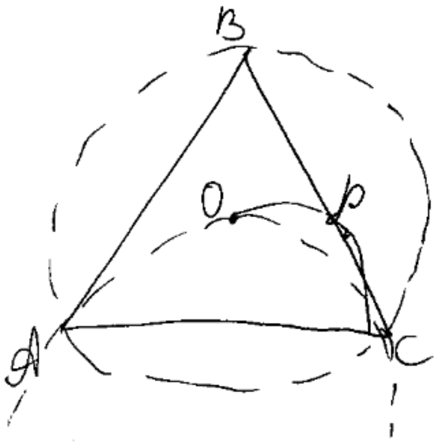
$\log_{\sqrt{29-x}} \left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{(x+1)^2}(29-x) \qquad \frac{1}{\log_{(29-x)}(x+1)^2} = \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

ОДЗ $\qquad \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) - \log_{(x+1)^2}(29-x)$

$(a-1)(c-1)(b-d)(a-c)$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{(x+1)^2}(29-x)$

№6.



21104874 (U852166 M1295500)

Черновик №4

№5

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{(x+1)^2}(29-x)$

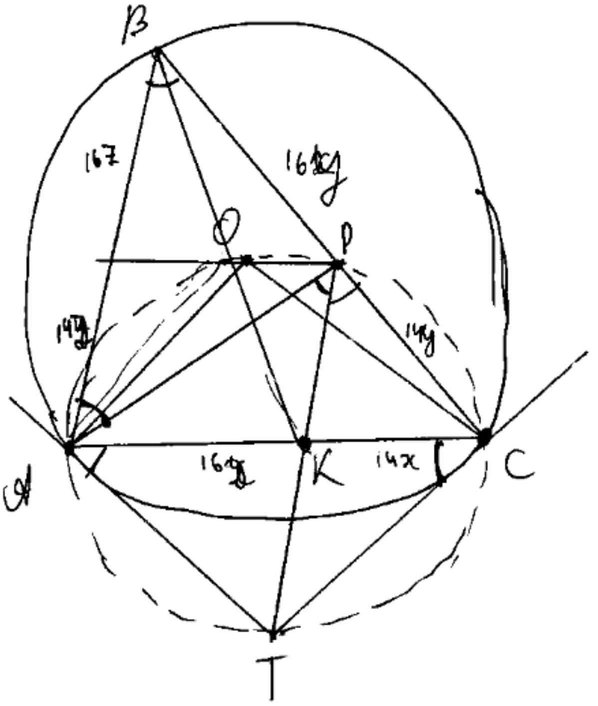
$\begin{cases} \sqrt{29-x} - (x+1)^2 \\ \end{cases}$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}} |-x-7|$

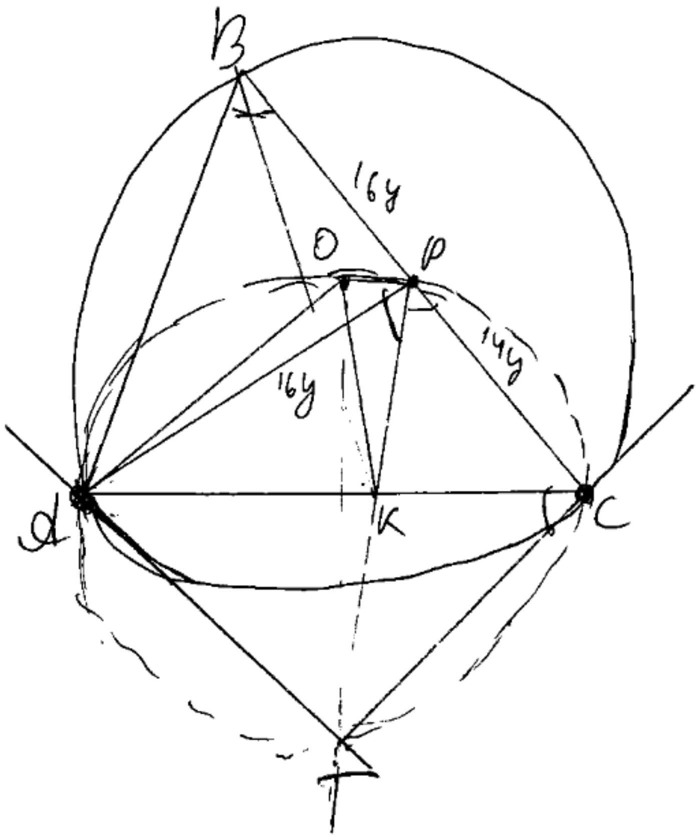
$a = b$

$c = a+1$

$a+b-2c = 2a-2a-2 = -2$



TK ∥ AB



$R = \frac{AC}{\sin}$

21104874 (U852166 M1295500)