Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104779**

ID профиля: **192106**

Вариант 24

Задача 1:

S: от a_1 до a_9; $a_i \in \mathbb{Z}$; прогрессия - возрастающая;

$a_5 \cdot a_{18} > S-4$; $a_{10} \cdot a_{13} < S+60$ $\rightarrow$ $\boxed{a_1 - ?}$

(1) Воспользовавшись формулой арифметической прогрессии:

$a_5 = a_1 + 4d$; $a_{18} = a_1 + 17d$, $a_{10} = a_1 + 9d$; $a_{13} = a_1 + 12d$;

$$S = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{2a_1 + 8d}{2} \cdot 9 = (a_1 + 4d)9;$$

где d - разность прогрессии, которая больше 0 $\Rightarrow d > 0$ - т.к. прогрессия возрастающая. ($d \in \mathbb{Z}$, т.к. $a_i \in \mathbb{Z}$)

(2) Из н-в из условия:

$$S < a_5 \cdot a_{18} + 4; \quad S > a_{10} \cdot a_{13} - 60$$

$$\Downarrow$$

$$a_5 \cdot a_{18} + 4 > a_{10} \cdot a_{13} - 60$$

$$(a_1 + 4d)(a_1 + 17d) + 4 > (a_1 + 9d)(a_1 + 12d) - 60$$

$$64 + \cancel{a_1^2} + 4da_1 + 17da_1 + 68d^2 > \cancel{a_1^2} + 9da_1 + 12da_1 + 12 \cdot 9d^2;$$

$$64 + \cancel{21da_1} + 68d^2 > \cancel{21da_1} + 108d^2$$

$$64 > (108 - 68)d^2 = 40d^2$$

$$d^2 < \frac{64}{40} = \frac{8}{5} = 1,6$$

Значит $d^2 < 1,6 \Rightarrow d < \sqrt{1,6}$, ~~что~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow d < 2$, но т.к. $d \in \mathbb{Z}$, и $d > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{d = 1}$

(3) Подставим в первое н-во:

$$(a_1 + 4)(a_1 + 17) + 4 > \overset{\nearrow S}{(a_1 + 4) \cdot 9}$$

$$a_1^2 + 4a_1 + 17a_1 + 68 + 4 > 9a_1 + 36$$

$$a_1^2 + 12a_1 + 72 - 36 > 0$$

$$a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \Rightarrow (a_1 + 6)^2 > 0$$

$$\boxed{a_1 \neq -6}$$

Чистовик

(3) Подставим во второе н-во:

$$(a_1+9)(a_1+12) < (a_1+4)\cdot 9 + 60$$

$$a_1^2 + 21a_1 + 9\cdot 12 < 9a_1 + 36 + 60$$

$$a_1^2 + 12a_1 + 108 < 96$$

$$a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$$

$$D = 144 - 48 = 96 = (4\sqrt{6})^2$$

$$a_{1,2} \quad a_1 = \frac{-12 \pm 4\sqrt{6}}{2} = -6 \pm 2\sqrt{6} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1 \in (-6-2\sqrt{6}; -6+2\sqrt{6})$, где

$$\begin{cases} -6-2\sqrt{6} < -6-2\cdot 2 = -10 \\ -6-2\sqrt{6} > -6-2\cdot 3 = -12, \text{ но} \\ -6-2\sqrt{6} > -11, \text{ т.к. } \sqrt{6} < \sqrt{6{,}25} < 2{,}5 \end{cases}$$

Аналогично:

$$-1 < -6 + 2\sqrt{6} < -6 + 6 = 0$$

Т.к. $\overset{\Downarrow}{a_1} \in \mathbb{Z}$, то: $a_1 \in [-11, -1]$, то есть:

$a_1 \in [-10; -1]$, где $a_i \in \mathbb{Z}$, и $a_1 \neq -6$, значит:

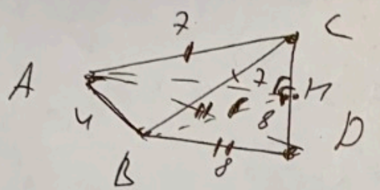
$$\boxed{a_1 = \{-10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2, -1\}}$$

Ответ:

Чистовик

Задача 2: ABCD - тетраэдр; AB = 4, AC = CB = 7, AD = DB = 8; r_{min} => $\boxed{CD - ?}$

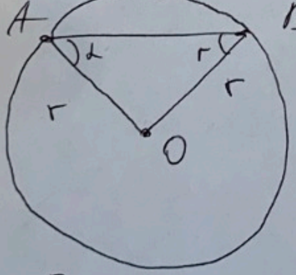
(1) Попробуем изобразить наш тетраэдр.



Т.к. тетраэдр вписан в цилиндр, причём CD ∥ оси цилиндра, то докажем, что AB должна лежать в плоскости параллельной основанию цилиндра.

Т.к. △ACB и △BDA - равнобедренные, то проведём плоскость ABH, где H ∈ CD, которая ∥ основанию цилиндра. Т.к. CD ∥ оси => CD ⊥ ABH => => AH ⊥ CD, BH ⊥ CD и BH = AH, т.к. △AHC = △BCH по гипотенузе и катету (AC = BC = 7, CH - общая) => Аналогично для △AHD и △BHD. => => (Т.) A и B находятся на одном и том же расстоянии от CD => лежат в ~~[illegible]~~ плоскости ∥ основанию цилиндра.

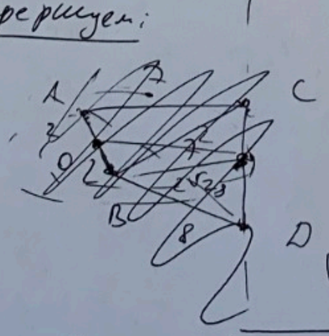
(2) Рассмотрим следующий рисунок:

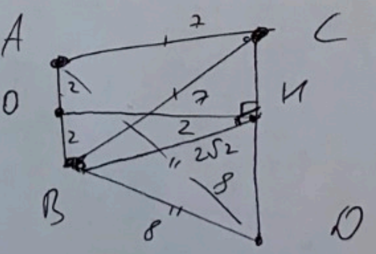


=> $AB = 2r\cos\alpha$ => => $r\cos\alpha = \frac{4}{2} = 2$

Значит r будет минимальным тогда, когда $\cos\alpha = 1$ => $r = 2$ => => AB - диаметр цилиндра.

(3) Перерисуем:





⇓ OH = 2 и BH = 2√2, значит:

$$CD = \sqrt{49-8} + \sqrt{64-8} = \sqrt{41} + \sqrt{56}$$

Ответ: $\boxed{CD = \sqrt{41} + \sqrt{56}}$

Чистовик

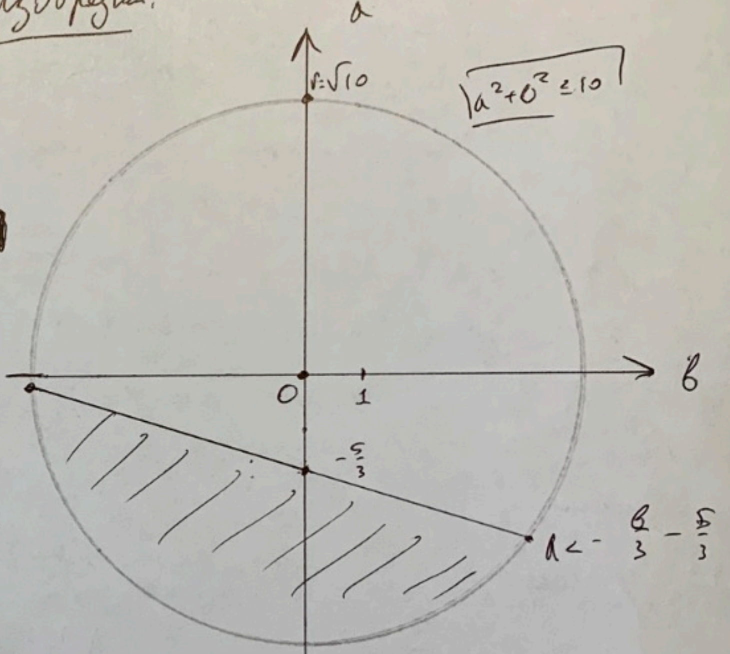
Задача 3:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b; 10) \end{cases}$$

Ⅰ. Если $-6a-2b > 10 \Rightarrow \boxed{a^2+b^2 \le 10}$

Заметим, что $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 10$ - представляет из себя круг, радиусом $r=\sqrt{10}$, где его центр (a, b).
Из системы у-ний, найдём допустимые зн-ия a и b:

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 10 \\ 3a < -b-5 \end{cases} \Bigg| \rightarrow$$ изобразим:



$a < -\frac{b}{3} - \frac{5}{3}$

Т.е. подходят все $b \in (-\frac{5}{3}; -\sqrt{10}]$

и a:

$b = -3a - 5$

$a^2 + (3a+5)^2 = 10$

$a^2 + 9a^2 + 30a + 25 = 10$

$10a^2 + 30a + 15 = 0 \quad |:5$

~~[illegible]~~

$2a^2 + 6a + 3 = 0$

$D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 36 - 24 = 12 = (2\sqrt{3})^2;$

$a < 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-3-2\sqrt{3}}{4}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a \in \left(-\frac{3-2\sqrt{3}}{4}; 0\right)}$

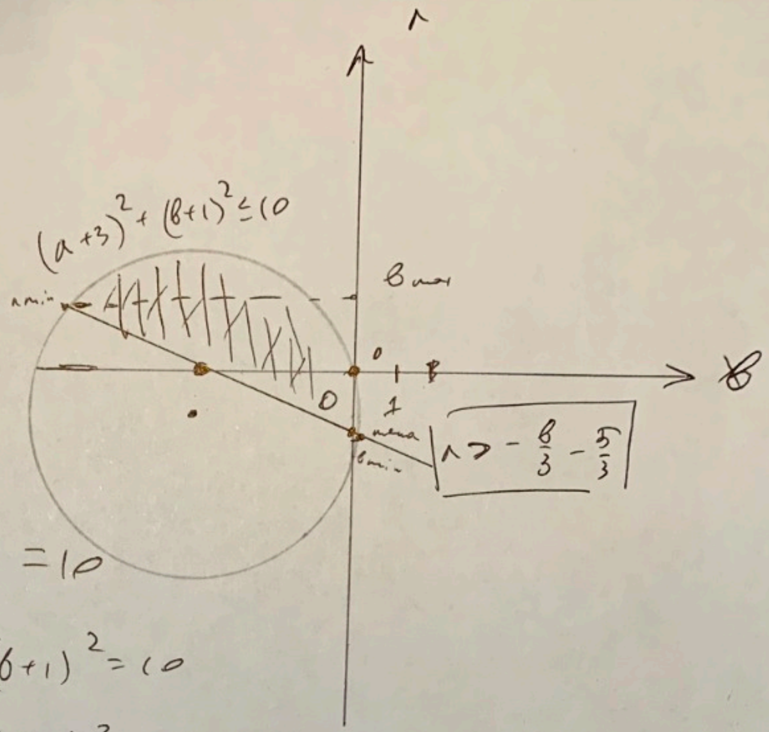
Ⅱ. Если $-6a-2b < 10 \Rightarrow a^2+b^2 \le -6a-2b \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+3)^2 + (b+1)^2 \le 10$

$a > -\frac{b}{3} - \frac{5}{3}.$

Снова найдём подходящие з-ия:

Чистовик:



$$\left(-\frac{b}{3} - \frac{5}{3} + 3\right)^2 + (b+1)^2 = 10$$

$$\left(-\frac{b}{3} + \frac{9-5}{3}\right)^2 + (b+1)^2 = 10$$

$$(-b + 4)^2 + 9(b+1)^2 = 10$$

$$16 - 8b + b^2 + 9(b^2+2b+1) = 10$$

$$b^2 + 9b^2 + 18b - 8b + 9 + 16 - 10 = 0$$

$$10b^2 + 10b + 15 = 0 \quad |:5$$

$$2b^2 + 2b - 3 = 0$$

$$D = 4 + 8 \cdot 3 = \quad 4 + 24 = 28 = (2\sqrt{7})^2$$

$$b_{1,2} =$$

5 ЧП

Черновик

$b \in \left(-\frac{5}{3}; -\sqrt{10}\right]$ [illegible]   min = 10

$\boxed{0 \in (0; -\sqrt{10})}$

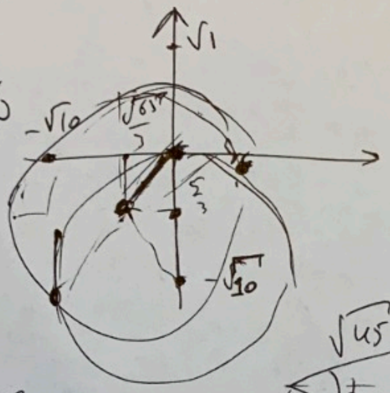
$b = \frac{5}{3} \Rightarrow a^2 + \frac{25}{9} = 10$

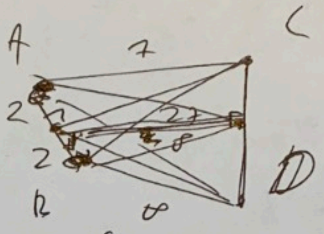
$a^2 = \frac{90-25}{9} = \frac{65}{9}$

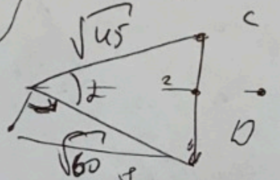
$\boxed{a = \pm\frac{\sqrt{65}}{3}}$

$a^2 + (3a+5)^2 = 10$

$a^2 + 9a^2 + 15$







$60 = 5 \cdot 12 =$
$= 20 \cdot 3$
$= 4 \cdot 15$

$a^2 + b^2$

$CO^2 = 60 + 45 - 2\sqrt{60 \cdot 45} \cdot \cos\angle$

$CO^2 = 135 - \cancel{2 \cdot 3 2}\, 2 \cdot \sqrt{4 \cdot 15 \cdot 3^2 \cdot 5} \cdot \cos\angle =$

$= 135 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5^2 \cdot 3} \cdot \cos\angle =$

$= 135 - 12 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} \cos\angle;$

$\boxed{CO^2 = 135 - 60\sqrt{3} \cos\angle}$

$\left(\frac{b}{3} + \frac{5}{3}\right)^2 + b^2 = 10$

$(b+5)^2 + 9b^2 = 90$

$b^2 + 10b + 25 + 9b^2 = 90$

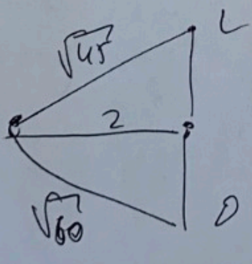
$10b^2 + 20b - 65 = 0$

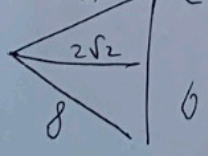
$2b^2 + 2b - 13 = 0$

$D = 4 + 8 \cdot 13 = 4 + 80 + 24 = 4 + 104 = 108;$

$CO = \sqrt{45-4} + \sqrt{60-2},^2$

$= \sqrt{41} + \sqrt{58}$





$CO = \sqrt{49-8} + \sqrt{64-8} = \sqrt{41} + \sqrt{58};$

Черновик

③ $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 10$ — Область ~~[illegible]~~ окр. $\boxed{r < \sqrt{10}}$

$a^2+b^2 \le \min(-6a-2b, 10)$

$\underline{I}$. $-6a-2b \ge 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \min(-6a-2b, 10) = 10$

$\Downarrow$ $a^2+b^2 \le 10$

$6a+$~~$2b$~~ ≤ -10

$6a+2b \le -10$

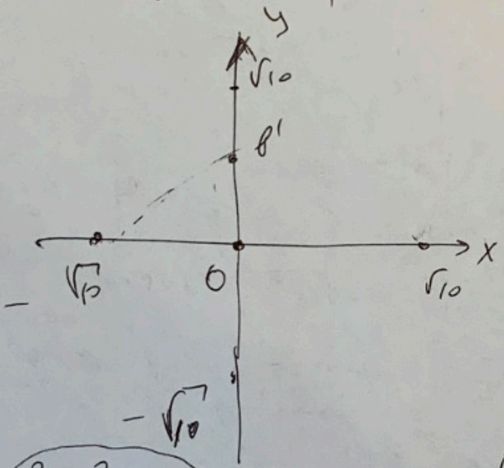
$\boxed{3a+b \le -10}$

---

③ $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 10;$

$\textcircled{I}$ $a^2+b^2 \le 10$; $\Rightarrow$ $-6a-2b > 10$

$\boxed{3a+2b < -5}$.



$b = \sqrt{10} \Rightarrow 3a+2\sqrt{10} < -5$

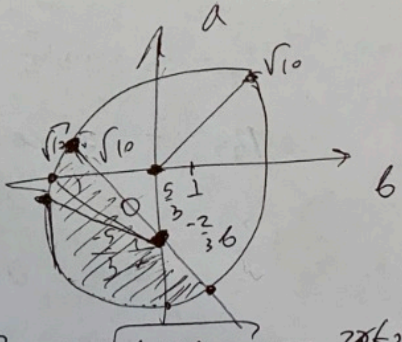
$\boxed{\cancel{b} < -5}$

$\boxed{\cancel{3}a < -\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{10}}$

$a^2+b^2 \le 10$

$3a+2b < -5$

$\boxed{a < -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}b}$



$\sqrt{10} < \sqrt{10{,}89} = (3{,}3)^2$

$b \in \left(-\frac{5}{3}; -\sqrt{10}\right]$

$0{,}35$
$\times 35$
175
105
1225

~~$3{,}64$~~
~~$\times 34$~~

33
$\times 33$
99
99
1089

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{3\cdot 10} =$

$= \frac{5\sqrt{10}}{6} \overset{?}{\vee} \frac{2}{3}$

$5\frac{\sqrt{10}}{2} \overset{?}{\vee} 2$

$\boxed{\cancel{5\sqrt{10}}\ 34}$

$\left(\frac{2}{3}b + \frac{5}{3}\right)^2 + b^2 = 10$

$(2b+5)^2 + 9b^2 = 90$

$4b^2 + 20b + 25 + 9b^2 = 90$

$4b^2 + 11b + 65 = 0$

$4b^2 + 11b + 65 = 0$

$D = 121 - 4\cdot 4\cdot 65$

черновик

③

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 10$ - мн-во точек [illegible]

$a^2+b^2 \le \min(-6a-2b, 10)$

① Если $\min(-6a-2b, 10) = -6a-2b \Rightarrow$

$\Rightarrow -6a-2b \le 10 \Rightarrow \boxed{3a+2b > -5}$, то:

$a^2+b^2 \le -6a-2b$

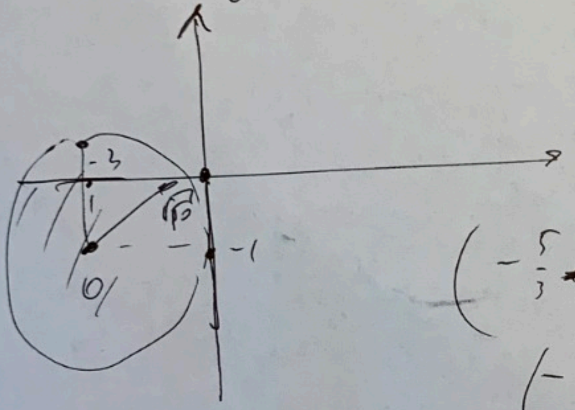
$a^2+6a+b^2+2b \le 0 \quad |+10$

$a^2+6a+3+b^2+2b+1 \le 10$ $\quad 3a > -5+2b$

$$\boxed{(a+3)^2+(b+1)^2 \le 10}$$

$a > -\frac{5}{3}+\frac{2}{3}b$

~~$\left(-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}b\right)^2+6a+b^2+$~~

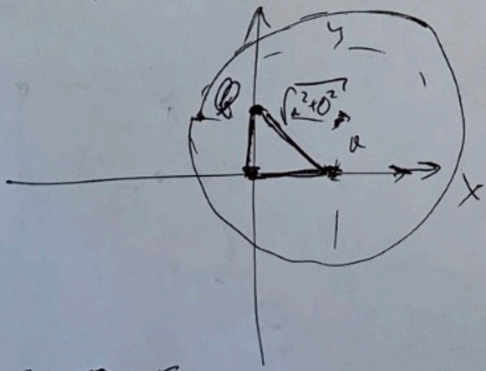


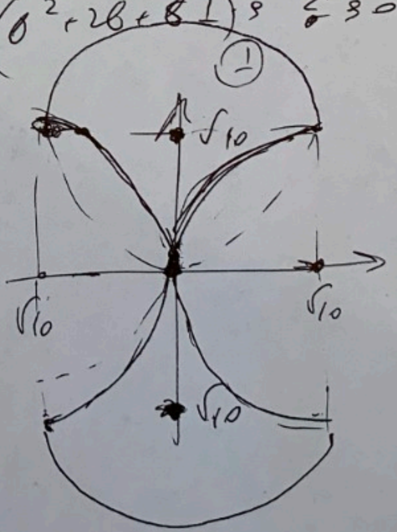
$\left(-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}b+3\right)^2+(b+1)^2 \le 10$

$\left(-\frac{2}{3}b+\frac{4}{3}\right)^2+(b+1)^2 \le 10$

$(4-2b)^2+(b+1)^2\cdot 9 \le 90$

$16-4\cdot 2\cdot 2b+4b^2+(b^2+2b+1)\cdot 9 \le 90$





Ел $3a+2b < -5$

и $a < -\frac{2}{3}b-\frac{5}{3}$

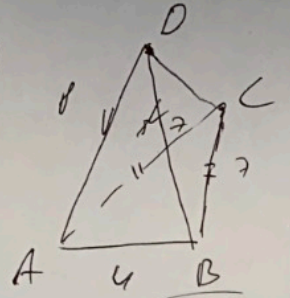
$-(2b+5)^2+9b^2 \ ? \ 10$

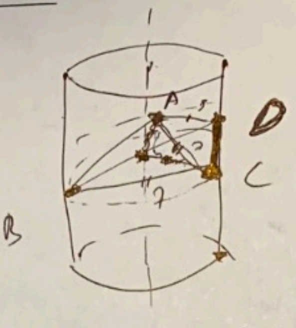
$4b^2+20b+25+9b^2 \ ? \ 10$

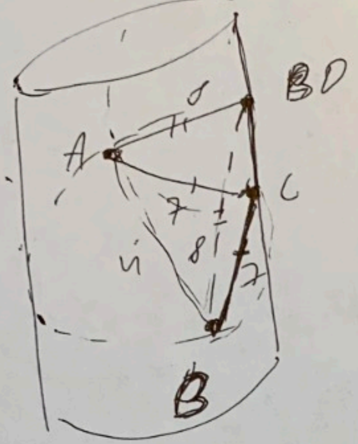
$13b^2+20b+15 \ ? \ 0$

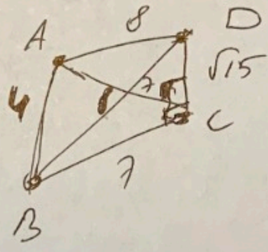
чернoвик

②

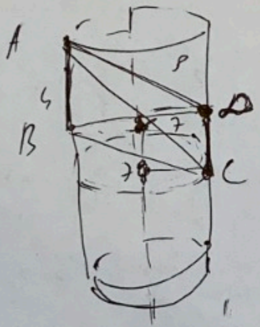


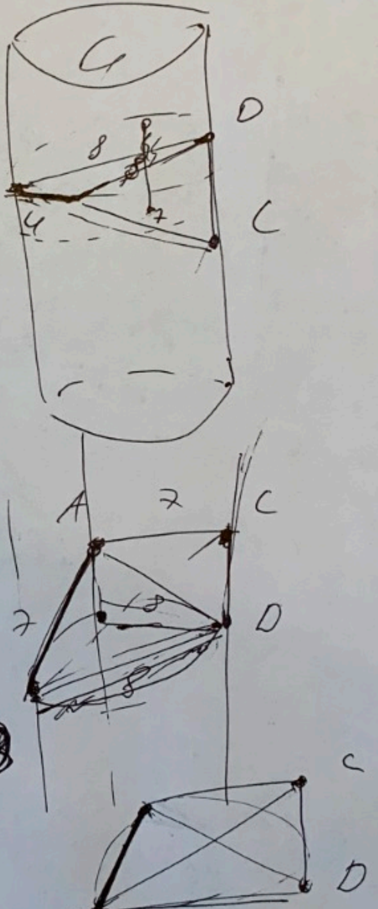


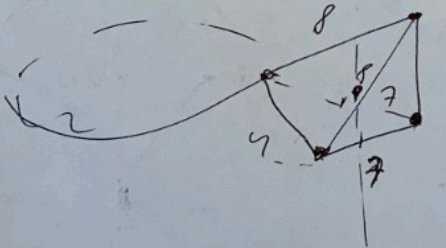




64 − 49 = 15



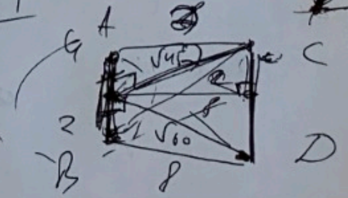




2R cos α = 4

R min, если cos α = 0 =>

=> $\boxed{2R = 4 => R = 2}$



$\sqrt{64-4}$

$\sqrt{49-4} = \sqrt{45}$

черновик

① $S = \{a_1 \to a_9\}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$

$a_5 \cdot a_{18} > S - 4$

$a_{10} \cdot a_{13} < S + 60$

$a_5 = a_1 + 4d; \quad a_{18} = a_1 + 17d$

$a_{10} = a_1 + 9d; \quad a_{13} = a_1 + 12d$

$S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{a_1 + a_1 + 8d}{2} \cdot 9 =$

$= \frac{2a_1 + 8d}{2} \cdot 9 = (a_1 + 4d) 9;$

$a_5 \cdot a_{18} = (a_1 + 4d)(a_1 + 17d) < (a_1 + 4d) 9 - 4$

~~$a_1^2 + 17da_1 + 4da_1 + 68d^2 < 9a_1 + 36d$~~ -4

$(a_1 + 9d)(a_1 + 12d) > S + 60 = (a_1 + 4d) 9 + 60$

$(a_1 + 4d)(a_1 + 17d - 9d) < -4$

$(a_1 + 4d)(a_1 + 8d) < -4$

$(a_1 + 9d)(a_1 + 12d) < (a_1 + 4d) 9 + 60$

$\boxed{a_{10} \cdot a_{13} + 60 < S < a_5 \cdot a_{18} + 4}$

$a_5 \cdot a_{18} + 4 > a_{10} \cdot a_{13} - 60$

$4 + (a_1 + 4d)(a_1 + 17d) > (a_1 + 9d)(a_1 + 12d) - 60$

$64 + a_1^2 + \cancel{17da_1 + 4da_1} + 68d^2 > a_1^2 + \cancel{9da_1 + 12da_1} +$

$+ 108d^2$

$\boxed{d > 0}$

$64 + 68d^2 > 108d^2$

$108d^2 - 68d^2 < 64$

$40d^2 < 64 \Rightarrow \boxed{d^2 < \frac{64}{40} = \frac{8}{5}}$

~~$d<$~~ $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{d = 1}$

~~$(a_1 + 9)(a_1 + 12) >$~~

<u>Черновик</u>

$(a_1+4)(a_1+17) > (a_1+4)9 - 4$

$a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + 36 - 4$

$a_1^2 + 12a_1 + 68 - 32 > 0$

$$\begin{array}{r} 68 \\ -32 \\ \hline 36 \end{array}$$

$a_1^2 + 12a_1 + \cancel{68 - 32}\ 36 > 0$

$a_1^2 + 2 \cdot 6a_1 + 6^2 > 0$

$\boxed{(a_1+6)^2 > 0}$

$(a_1+9d)(a_1+12d) < (a_1+4d) \cdot 9 + 60$

$\cancel{a_1 + a}\ a_1^2 + 9a_1 + 12a_1 + 9 \cdot 12 < 9a_1 + 36 + 60$

$a_1^2 + 21a_1 + 108 < 9a_1 + 96;$

$a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$

$D = 144 - 4 \cdot 12 = 144 - 48 =$

$= 104 - 8 = 90 = 6\ (4\sqrt{6})^2$

$a_{1,2} = \frac{-12 \pm 4\sqrt{6}}{2} = \underline{-6 \pm 2\sqrt{6}}$

$d \in (-6 - 2\sqrt{6}; -6 + 2\sqrt{6})$ $\quad \underline{2 < \sqrt{6} < 3}$

~~$|-6-2\sqrt{6} > -6-$~~

$-1 < 2\sqrt{6} - 6 \cancel{>} 0$

$-6 - 2\sqrt{6} \cancel{>} -12 < \underline{-11}$

$d \in [-10; -1] \Rightarrow$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104779**

ID профиля: **192106**

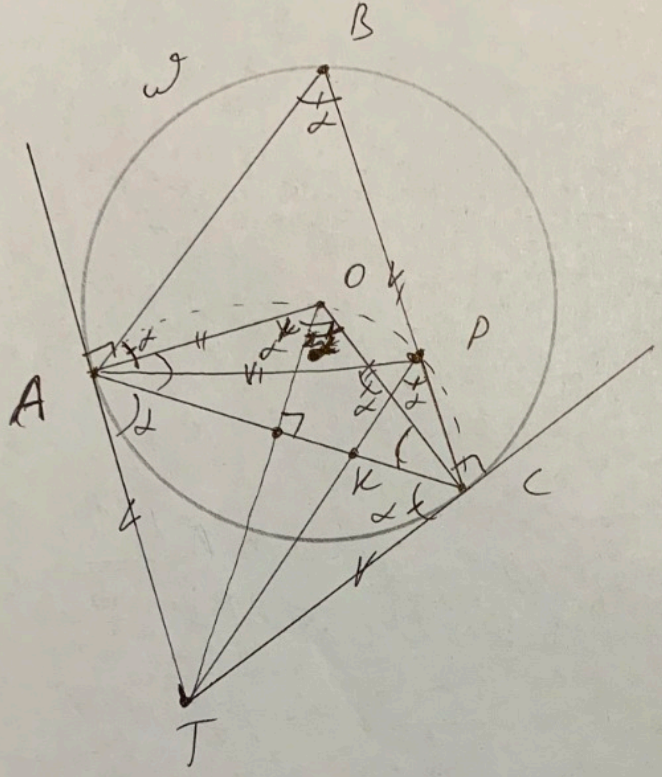
Вариант 24

Чистовик:

Олимпиада Физтех по математике

11 класс
В - 24

Задача 6)



Дано:

$S_{KPC} = 14$

$S_{APK} = 16$

Найти:

а) S_{ABC} -?

б) AC, если $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{5}$;

(1) $\angle ABC = \alpha \Rightarrow \angle AOC = 2\alpha$ – как центральный.

~~AT~~ AOCT – вписанный четырёхугольник, т.к.

$\angle OAC + \angle OCT = 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ATC = 180 - 2\alpha \Rightarrow$ (т.) T лежит на окр, опис около ΔAOC!

(2) ΔATC – равнобедренный, т.к. $AT = TC$ – как отрезки касательных $\Rightarrow \angle TAC = \angle TCA = \angle AOT = \alpha$ – т.к. в дельтоиде OT – биссектриса против. углов

(3) $\angle TPC = \angle TAC = \alpha \Rightarrow TP \parallel AB$ при секущей BC, т.к. $\angle ABC = \angle TPC = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~S_{ABC}~~ $\Delta ABC \sim \Delta KPC$, ~~т.к.~~ по двум равным углам ($\angle KPC = \angle TBC$, $\angle C$ – общий).

(4) Из условия задачи следует, что:

$\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{AK}{KC} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$ (треуг. с общей вершиной)

1 стр

чистовик:

Тогда: $AC = AK + KC = \frac{8}{7}KC + KC = \frac{15}{7}KC.$

$\frac{S_{ABC}}{S_{PKC}} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2$ — из подобия $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 \cdot S_{PKC} = 14 \cdot \left(\frac{\frac{15}{7}KC}{KC}\right)^2 =$

$= 14 \cdot \left(\frac{15}{7}\right)^2 = 2 \cdot \frac{15^2}{7} = \frac{2 \cdot 225}{7} = \frac{450}{7};$

(б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{5}\right) \rightarrow AC - ?$

$\frac{BC}{CP} = \frac{AC}{CK} = \frac{15}{7} \Rightarrow \boxed{BC = \frac{15}{7}CP}$

$BP = \frac{15}{7}CP - CP = \frac{8}{7}CP \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~AB~~ т.к. $\angle TPA = \angle PAB = \alpha$, то $\triangle APB$ — равнобедренный $\Rightarrow AP = BP \Rightarrow AB = 2BP\cos\alpha; = 2BP\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} =$

$= 2BP \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{25}}} = \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot 2 \cdot \frac{8}{7}CP =$

$= \frac{16 \cdot 5}{7\sqrt{34}}CP;$

Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \sin\alpha =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{90}{7\sqrt{34}}CP \cdot \frac{15}{7}CP \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{450}{7}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{90 \cdot 15 \cdot 3}{7^2 \cdot 34} \cdot CP^2 = \frac{450}{7};$

$\frac{9 \cdot 15 \cdot 3}{2 \cdot 7 \cdot 34} \cdot CP^2 = 45$

$\frac{15 \cdot 3}{2 \cdot 7 \cdot 34} \cdot CP^2 = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3^2}{2 \cdot 7 \cdot 34} \cdot CP^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{CP = \frac{\sqrt{14 \cdot 34}}{3}}$

Тогда AC: ~~$AC = \frac{15}{7}$~~

2стр

Чистовик

Из $\triangle APC$:

$$AC^2 = \cancel{AP^2}\ \frac{64}{49}CP^2 + CP^2 - 2\,CP\cdot\frac{8}{7}CP\cdot\cos 2\alpha =$$

$$= \frac{113}{49}CP^2 - \frac{16}{7}CP^2\cdot\left(2\cdot\frac{25}{34} - 1\right) =$$

$$= CP^2\left(\frac{113}{49} - \frac{16}{7}\cdot\frac{50-34}{34}\right) =$$

$$= CP^2\left(\frac{113}{49} - \frac{16}{7}\cdot\frac{25-17}{17}\right) =$$

$$= CP^2\left(\frac{113}{49} - \frac{16}{7}\cdot\frac{8}{17}\right) =$$

$$= CP^2\cdot\frac{113\cdot 17 - 16\cdot 8\cdot 7}{49\cdot 17} = CP^2\cdot\frac{1025}{49\cdot 17}$$

$$\begin{array}{r} 113 \\ \times\ 17 \\ \hline +\ 791 \\ 113\ \ \\ \hline 1921 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 56 \\ \times\ 16 \\ \hline +\ 336 \\ 56\ \ \\ \hline 896 \end{array} \quad \Big| \Rightarrow \qquad \begin{array}{r} 1921 \\ -\ 896 \\ \hline 1025 \end{array}$$

~~AC~~ $\Downarrow$

$$AC = CP\cdot\sqrt{\frac{1025}{7\cdot\sqrt{17}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{14\cdot 34}}{7}\cdot\frac{\sqrt{1025}}{7\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{14}\cdot\sqrt{2}}{49}\cdot\sqrt{41}\cdot 5 =$$

$$= \frac{5}{49}\cdot\sqrt{28\cdot 41}$$

Ответ: $S_{ABC} = \frac{450}{7}$;

$AC = \frac{5}{49}\cdot\sqrt{28\cdot 41}$

Чистовик:

4 Задача 4:

$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c) = 33, \\ \text{НОК}(a,b,c) = 3^{13}\cdot 11^{15} \end{cases}$ | $N(a,b,c)$ − ?

(1) Из НОД $(a,b,c) = 33$ следует, что:
$a \vdots 33$, $b \vdots 33$, $c \vdots 33$

(2) Из НОК $(a,b,c) = 3^{13}\cdot 11^{15}$ следует, что одно из чисел имеет в разложении 3^{13}, 11^{15} или оба вместе.

(3) Пусть $a = 3^{13}$, тогда: одно из чисел равно 33 => $b = 33$ => $c = 3\cdot 11^{15}$ → 2 в-та (если с поменять (в местами).

* Одно из чисел точно равно 33 (может и сразу два), т.к. иначе, учитывая то, что в разложении наших чисел присутствуют только 3 и 11 (следует из НОК), => ~~числа~~, а если ~~наши~~ все числа > 33, то НОД у них иной, > 33.

(4) ~~получается, что a пробегает все возможные делители числа $3^{13}\cdot 11^{15}$, от 33 то есть a имеет вариантов:~~ ~~$\frac{33}{11}$, 3, 11, 27 – не подходят.~~

~~$(13+1)(15+1)$~~ ~~$= 20\cdot 16 - 6$~~

~~Не подходят в-ты $a \neq \{1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{13}, 11, 11^2, \ldots 11^{15}\}$ => всего $20 + 15 = 35$ чисел => $(19+1)(15+1) - 35 = 20\cdot 16 - 35 = 320 - 35 = 290 - 5 = 285$ уж, b числа b и c однозначно определены но могут меняться местами =>~~
~~=> $N(a,b,c) = 285$.~~

ЧСБР

(4) Получается, если множители поменять, то:

~~$a=$~~ a может равняться:

$a = \{3^{19} \cdot 11^{15};\ 3^{19} \cdot 11,\ \ldots\ldots,\ 11^{15} \cdot 3\};$

где ~~b~~ пробегает такие же зн-я (если $b = 33$ и отдельно) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (19 \cdot 15)^2 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \cdot (19^2 \cdot 15)^2$

Ответ: $6 \cdot 19^2 \cdot 15^2$

5 стр

черновик

⑤ $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$; $\log_{(x+1)^2}(29-x)$; $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$;

1) $\sqrt{29-x} > 0$ | $\Rightarrow$ x ~~[illegible]~~ $\boxed{x < 29}$

$\sqrt{29-x} \neq 1$ | $\boxed{x \neq 28}$

2) $x \neq -1$

~~$x \neq 2$~~ $x \neq 0$

3) $\sqrt{\frac{x}{7}+7} > 0$

$\sqrt{x+49} > 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{x > -49}$

$x \neq -42$?

$\sqrt{\frac{x}{7}+7} \neq 1$

$\frac{x}{7}+7 \neq 1$

$x+49 \neq 7$

$x \neq -42$

4) $-x-1 > 0$

$\boxed{x < -1}$

[illegible]

$x \in (-49;-1) \cap (-42)$?;

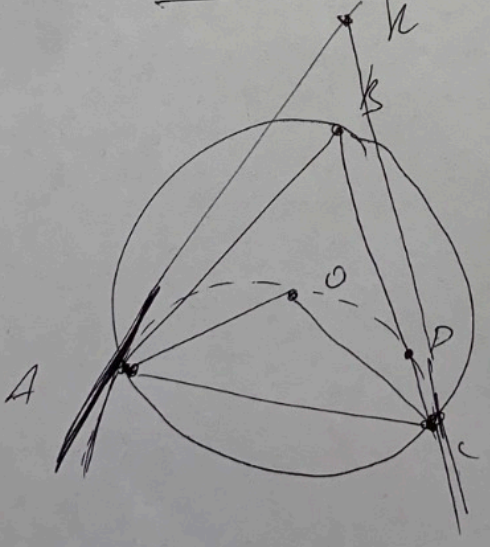
°(1) $\log_{(x+1)^2}(29-x) = \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$\frac{1}{2}\log_{(x+1)}(29-x) = 2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$\log_{(x+1)}(29-x) = 4\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)$;

---

⑥



черновик

① $\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c) = 33 \\ \text{НОК}(a,b,c) = 3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$,

$\text{НОД}(a,b,c) \cdot \text{НОК}(a,b,c) = abc \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\cdot 11\cdot 3^{19}\cdot 11^{15} = abc$

$\boxed{abc = 3^{20}\cdot 11^{16}}$

~~$a = 33\cdot x$~~,

$\boxed{\begin{matrix} a = 3\cdot 11\cdot x \\ b = 3\cdot 11\cdot y \\ c = 3\cdot 11\cdot z \end{matrix}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^3\cdot 11^3\cdot xyz = 3^{20}\cdot 11^{16}$

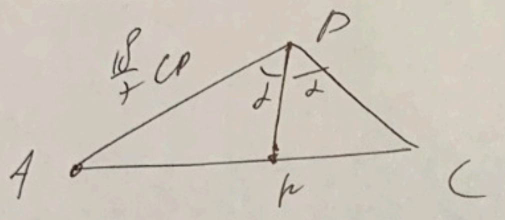
$\boxed{xyz = 3^{17}\cdot 11^{13}}$, где x, y, z - любые;

1 число: $18\ (17+1)(13+1) = 18\cdot 14$ - способов;

2 число:

$AB = 2BP\cos\alpha = 2\cdot\frac{15}{7}CP\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} = 2\cdot\frac{75}{7\sqrt{34}}\cdot CP;$

$\boxed{BC = \frac{15}{7}CP};$

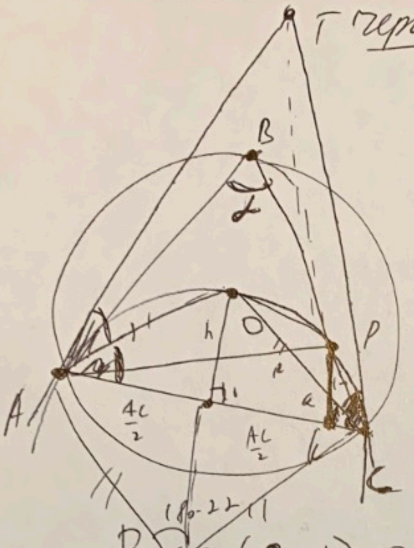


$\boxed{11^2;\ 3^2}$

3

$3^{13}\cdot 11^{15} \to$

Черновик



АТС – равнобедренный;

$S_{APC} = 30$

$AC = AK + KC =$

$= AK + \frac{7}{8}KC =$

$= \frac{15}{8}AK$;

$\frac{AK}{PC} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$;

$R\cos(90-\alpha) = \frac{AC}{2}$;

$R\sin\alpha = \frac{AC}{2} = \frac{15}{16}AK$;

$2R\sin\alpha = AC$

~~8~~ $R^2\, 2\sin\alpha\cos\alpha = S_{AOC}$

$\alpha\, R\cos\alpha\cdot\frac{15}{16}AK = S_{AOC}$;

$tg\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1+tg^2\alpha} =$

$= \sqrt{1+\frac{8}{25}} =$

$= \frac{\sqrt{34}}{5}$;

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$;

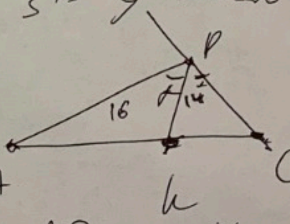
$\sin\alpha = \frac{\sqrt{34-25}}{\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$;

④ ~~(a,b,c)~~ ~~a8~~ $\boxed{xyz = 3^{17}\cdot 11^{13}}$

одно из чисел → 11^{13};

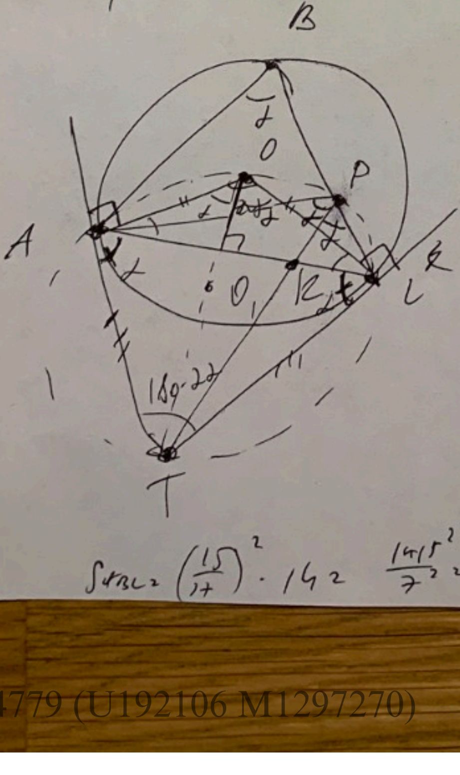
Одно из чисел → 3^{17}

кол-во (a,b,c) → 5^{19} ⇒ 5^{19} у [illegible] -го числа
есть;



$\frac{AK}{KC} = \frac{8}{7}$

$\frac{AP}{AC} = \frac{AK}{KC} = \frac{8}{7}$;



AB ∥ AP ⇒

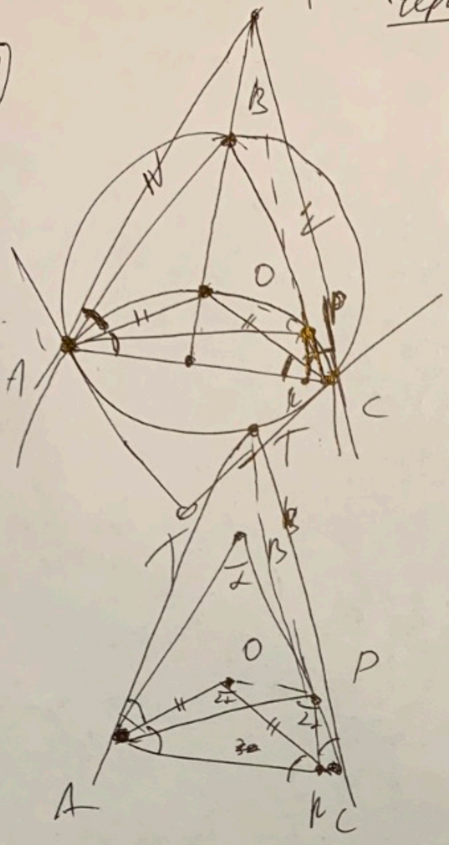
⇒ Δ KPC ∼ Δ ABC;

$\frac{S_{KPC}}{S_{ABP}} = k^2 = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = \left(\frac{\frac{8}{7}KC + KC}{KC}\right)^2 = \left(\frac{15}{7}\right)^2$;

$S_{ABC} = \left(\frac{15}{7}\right)^2\cdot 14 = \frac{14\cdot 15^2}{7^2} =$ ~~7~~ $2\cdot\frac{15^2}{7}$;

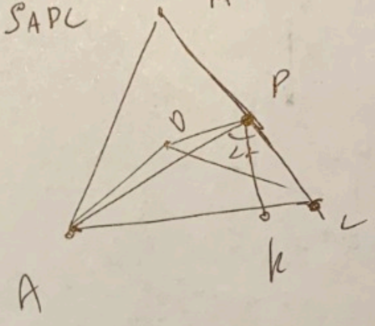
Черновик

⑥



$S_{ABC} = 30$

$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{BC}{PC};$



~~⑧~~ ④ НОД$(a, b, c) = 33 \Rightarrow a \vdots 33,\ b \vdots 33,\ c \vdots 33$

НОК$(a, b, c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \Rightarrow$ какое-то число имеет в своем р-ии 3^{19}; кто-то ~~так~~ другое имеет 11^{15}

Если $a = 3^{19} \cdot 11^{k}$, то:

$3^{19} \cdot 11^{k}\, abc = 3^{20} \cdot 11^{16}$

$11^{k} \cdot abc = 3 \cdot 11^{16}$

$\boxed{bc = 3 \cdot 11^{16-k}.}$

$\boxed{3^{19}, \quad 11^{15},}$

$\boxed{3, \; 11}$

$\boxed{33, \quad 33, \quad 3^{19} \cdot 11^{15}}$

$33,$

$R \sin\alpha = CT \cos\alpha$

$CT = R \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5} R$

$\boxed{AP = BP}$

~~$\frac{BP}{PC}$~~ A $\boxed{BC = \frac{15}{7};}\ CP;$

$\frac{BC}{AC} =$ ⊕ $\frac{BC}{CP} = \frac{AC}{CK};$

Черновик

$$\log_{\sqrt{2y-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \frac{1}{\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}\left(\sqrt{y-x}\right)}$$

$$\log_{(2y-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 4\log_{(x+1)} 2y-x;$$

$$\log_{(2y-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 4\,\frac{1}{\log_{(2y-x)}(x+1)};$$

$$\boxed{\log_{(2y-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\log_{(2y-x)}\cdot(x+1) = 4}$$

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}\cdot(-x-1) = \cancel{8}\log_{(x+1)}(2y-x) - \underline{1}$$

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}\cdot(-x-1) = \log_{(x+1)^2}\left(\frac{2y-x}{(x+1)^2}\right);$$

$$\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}\cdot(-x-1) = 4\log_{(x+1)}\left(\frac{2y-x}{(x+1)^2}\right);$$

$$\log_5(-x) = -\log_5 x$$

$$\cancel{5^k = -x} \qquad \cancel{5^{k=z}} = 5^k + 5^{-z} = 0$$

$$\cancel{5^{-z} = x} \qquad \cancel{5^k = 5^{-z}};$$

⑤ $2\log_{(2y-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right);$ $\log \ln(-x);$

$$\frac{1}{2}\log_{(x+1)}(2y-x);$$

$$\frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)$$

$$\ln(-x) = \ln((-1)\cdot x) = \boxed{\ln(-1)+\ln x}$$

$$\boxed{\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)} = \boxed{\log_{(x+1)}(2y-x)}$$

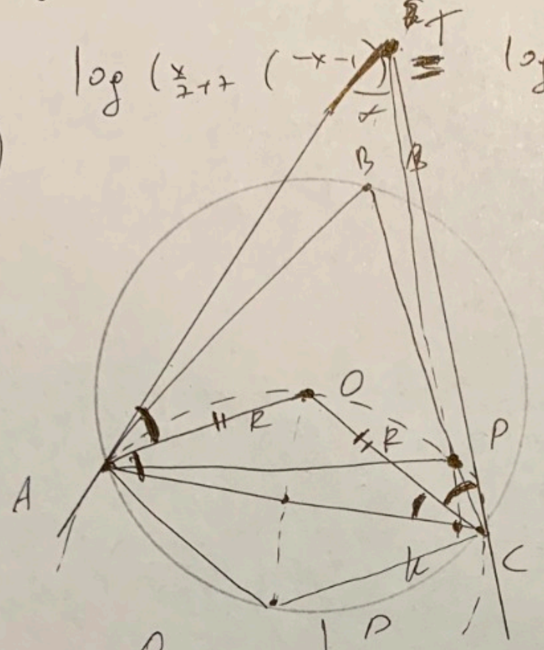
Черновик

$\log_{(29-x)}(\frac{x}{7}+7) \cdot$ ~~log~~ $\log_{(29-x)} \cdot (x+1) = 4$;

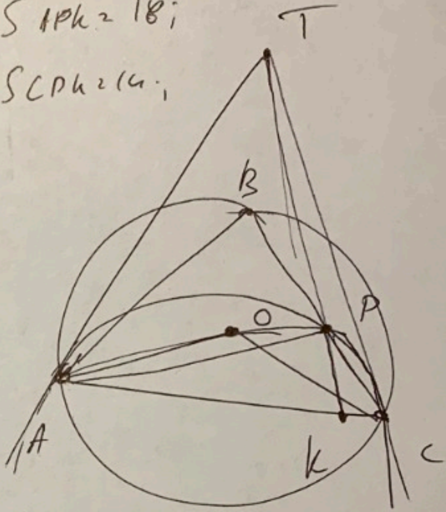
$\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{7}+7)}(-x-1) = \log_{\sqrt{29-x}}$ $\frac{1}{2}\log_{29-x}(\frac{x}{7}+7)+1$;

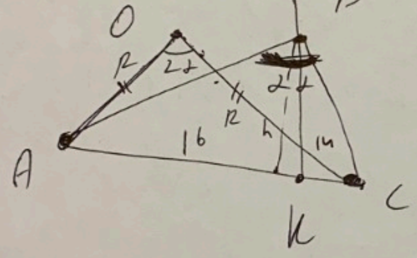
$\log_{(\frac{x}{7}+7}(-x-1) = \log_{(29-x)}\left((\frac{x}{7}+7)(29-x)^2\right)$

⑥



$S_{APK} = 18$;
$S_{CPK} = 14$;





$\frac{1}{2}h \cdot AK = \frac{1}{2}$ ~~$h \cdot KC$~~ 16

$\frac{1}{2}h \cdot KC = 14$?

2) $\boxed{\frac{AK}{KC} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}}$

~~2R cos α =~~ AC

$S_{APC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (AK + \frac{7}{8}AK) =$

$= \frac{1}{2}h \cdot AK \cdot \frac{8+7}{8} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AK \cdot \frac{15}{8} = 16 \cdot \frac{15}{8} =$

$= 2 \cdot 15 = 30$

$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = 2R$;

$\frac{AC}{\sin 2\alpha} =$

$S_{AOC} = \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin 2\alpha$ ~~2R AC~~;