Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104718**

ID профиля: **203016**

Вариант 24

Чистовик

Вариант 24

Часть I

Страница №1

№1

Пусть первый член прогрессии равен a (по усл. $a \in \mathbb{Z}$);

пусть разность прогрессии равна d (по усл. $d \in \mathbb{Z}$, т.к. $a_1 = a \in \mathbb{Z}$ и $a_2 = a+d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \mathbb{Z}$, также $d>0$ т.к. прогрессия возрастает)

$$S = a + (a+d) + \ldots + (a+8d) = 9a + 36d$$

по усл.:

$$\begin{cases} (a+4d)(a+17d) > 9a+36d-4 \\ (a+9d)(a+12d) < 9a+36d+60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+21ad+68d^2 > 9a+36d-4 \\ a^2+21ad+108d^2 < 9a+36d+60 \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{cases} a^2+21ad+68d^2-9a-36d+4>0 \\ -a^2-21ad-108d^2+9a+36d+60>0 \end{cases}$$ — сложим неравенства

$$\Rightarrow -40d^2+64>0$$

$$\Rightarrow 40d^2<64 \Rightarrow d^2 < \frac{64}{40} \xrightarrow{d>0} d < \sqrt{\frac{64}{40}}$$

Заметим, что $\sqrt{\frac{64}{40}} < 2$ $\left(\text{т.к. } \frac{64}{40} < 4\right) \Rightarrow d<2 \Rightarrow d=1$ (т.к. $d \in \mathbb{Z}$ и $d>0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+21a+68>9a+36-4 \\ a^2+21a+108<9a+36+60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+12a+36>0 \\ a^2+12a+12<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+6)^2>0 \\ (a+6)^2-24<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \neq -6 \\ (a+6)^2 < 24 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ Возможные значения a: $-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2$

$\Rightarrow$ Ответ: Возможные значения a: $-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2$

Чистовик

Вариант 24

Часть I

№2

Дано:

ABCD-тетраэдр

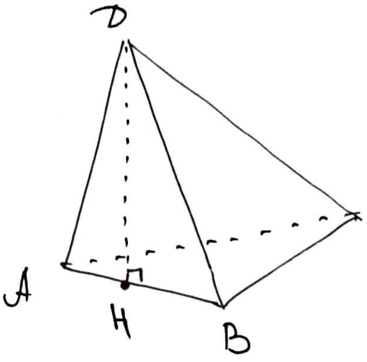
$AB=4$

$AC=CB=7$

$AD=DB=8$

CD - ?

Решение:



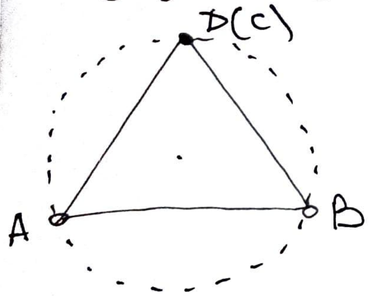
1) Рассмотрим проекцию D на прямую AB: (точка H): т.к. $\triangle ADB$ р/б (по усл.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow AH=HB$

C 2) Рассмотрим проекцию C на прямую AB: заметим, что т.к. $\triangle ACB$ р/б $\Rightarrow$ проекция C совпадает с H

$\Rightarrow$ т.к. проекция двух различных точек C, D прямой CD на прямую AB совпадают $\Rightarrow CD \perp AB$

3) Теперь впишем $ABCD$ в цилиндр и рассмотрим сечения цилиндра плоскостью, содержащей точки A и B и $\parallel$ плоскости основания цилиндра (такая плоскость существует, т.к. $AB \perp CD$; $CD \parallel$ оси цилиндра $\Rightarrow CD \perp$ основанию цилиндра $\Rightarrow AB \parallel$ основанию цилиндра)

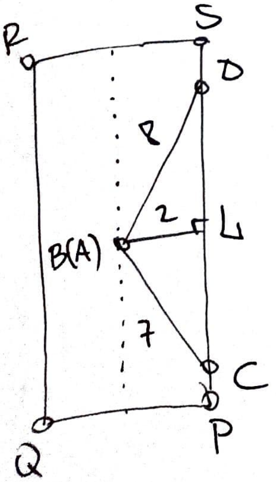
Сечение — окружность, радиус которой совпадает с радиусом цилиндра



Заметим, что AB — хорда этой окружности, а значит $\forall$ тетр. $ABCD$ D опис. цилиндра $\geq AB$

Теперь будем рассматривать только такие тетраэдры $ABCD$, что AB совпадает с диаметром опис. цилиндра (по данные) (у всех остальных диаметр (а следовательно и радиус) опис. цилиндра больше)

Рассмотрим теперь сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось и содержащей точки C и D (такая плоскость $\exists$ т.к. $CD \parallel$ оси по усл.)



Рассмотрим проекцию точки B на CD (точка L)

Заметим, что $BL = \frac{AB}{2}$ т.к. AB — диаметр, а точка $B \in$ сер. пер. QP ($QPSR$ — сечение цилиндра) ($\Rightarrow RS = QP = AB$) (точка B совпадает с A т.к. плоскость, содержащая CD и ось $\perp AB$ т.к. $CD \perp AB$ по доказанному и ось $\perp AB$ т.к. AB — диаметр)

$\Rightarrow$ по т. Пифагора: $LD = \sqrt{64-4}$; $LC = \sqrt{49-4}$

$\Rightarrow CD = \sqrt{60} + \sqrt{45} = 2\sqrt{15} + 3\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ Ответ: $CD = 2\sqrt{15} + 3\sqrt{5}$

№3

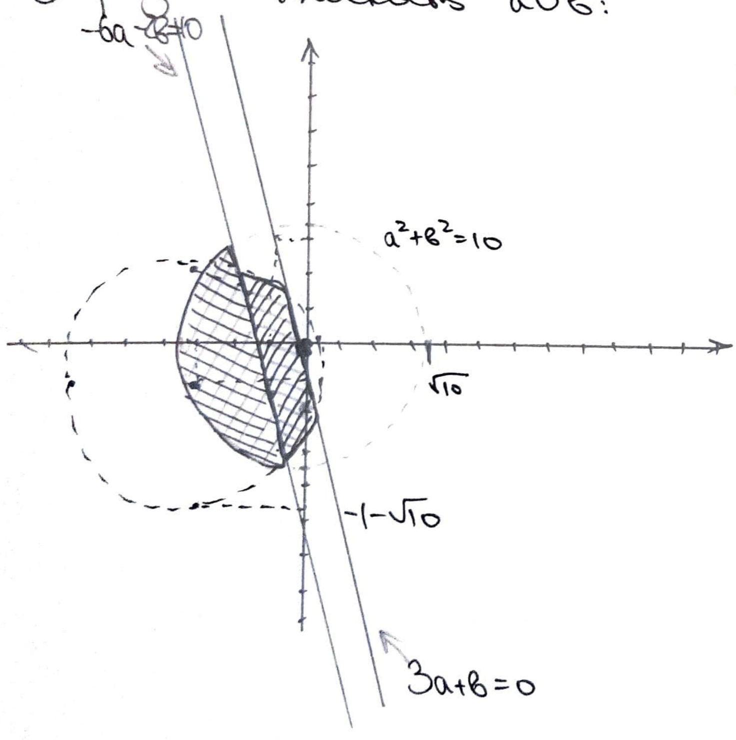
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2\le 10 \\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b,\ 10) \end{cases}$$

Рассмотрим: $a^2+b^2\le \min(-6a-2b,10)$
Заметим, что такие a,b $\exists$, если $-6a-2b\ge 0 \Rightarrow 3a+b\le 0$
Неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} a^2+b^2\le 10,\ \text{если } -6a-2b>10 \\ a^2+b^2\le -6a-2b,\ \text{если } -6a-2b\le 10 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2+b^2\le 10,\ \text{если } -6a-2b>10 \\ (a+3)^2+(b+1)^2\le 10,\ \text{если } -6a-2b\le 10 \end{array}\right.$$

Изобразим плоскость aOb:

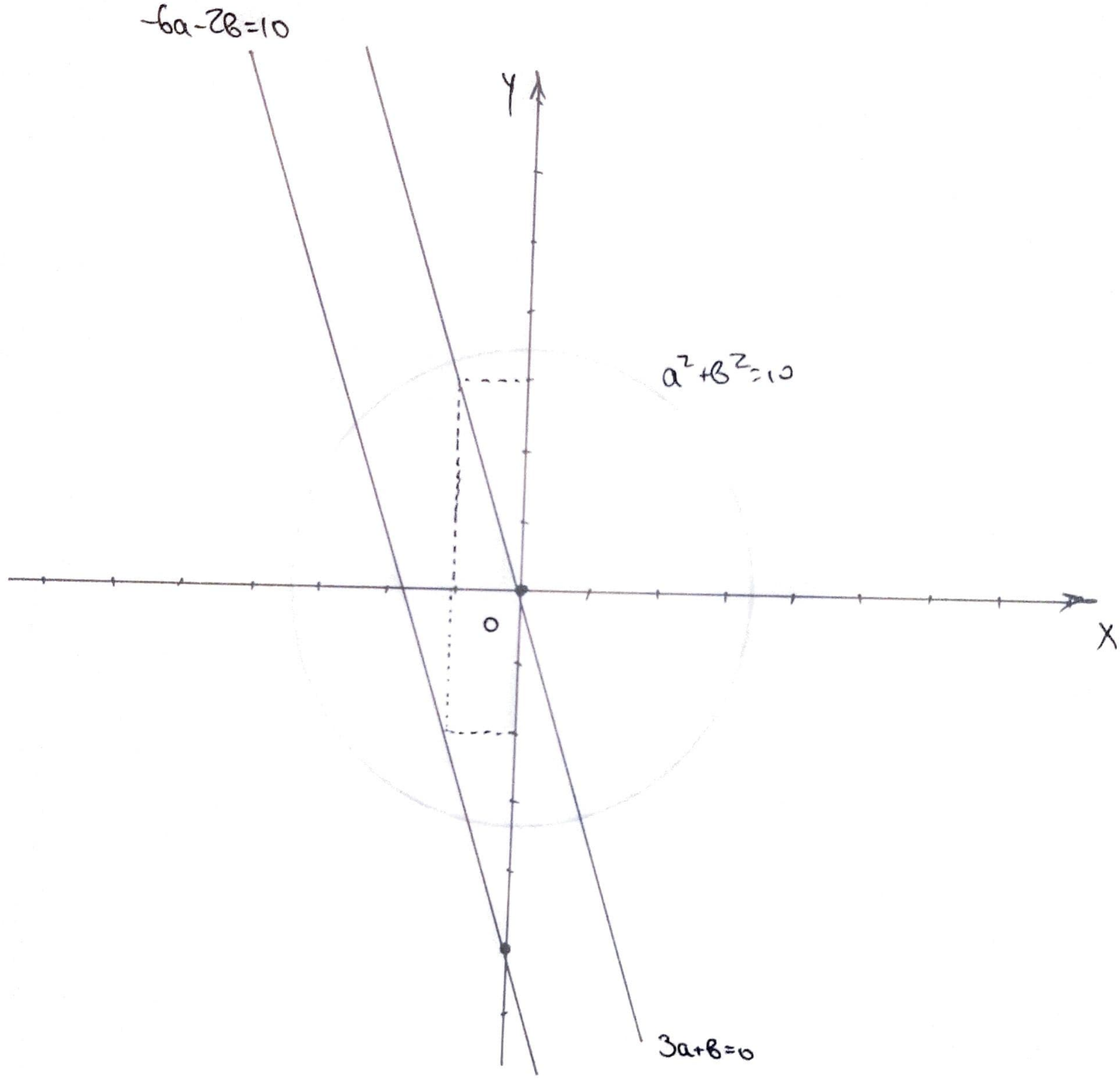


Закрашенная область — искомое множество значений a,b таких, что:
$$a^2+b^2\le \min(-6a-2b,10)$$

Чистовик

Теперь найдем множество (x,y):   Страница №4

Заметим, что $(x-a)^2+(y-b)^2\le 10$ — окружность с центром в a,b (это множество мы уже нашли) и радиусом 10



$a+2d \;\ldots\; a+8d \quad a\in\mathbb{Z},\ d\in\mathbb{Z}>0$

$\Rightarrow S = 9a + 36d = 9(a+4d)$

$(a+4d)(a+17d) > 9a+36d-4$

$\boxed{a^2+21ad+68d^2 > 9a+36d-4}$

$a^2+a(21d-9)+68d^2-36d+4>0$

$-a^2-a(21d-9)-108d^2+36d+60>0$

$-40d^2+64>0$

$-10d^2+16>0$

$-5d^2+8>0$

$5d^2>8$

$d \geq 2$

$a^2+21a+68 > 9a+36d-4$

$(a+9d)(a+12d) < 9a+36d+60$

$a^2+21ad+108d^2 < 9a+36d+60$

$a^2+a(21d-9)+108d^2-36d-60<0$

$a^2+21ad+68d^2 > 9a+36d-4$

$a^2+21ad+108d^2 < 9a+36d+60$

$\Downarrow$

$a^2+21ad+68d^2 > 9a+36d-4$

$-a^2-21ad-108d^2 > -9a-36d-60$

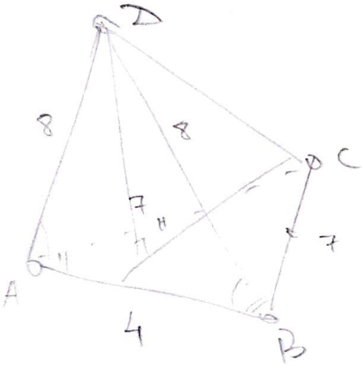
$-40d^2 > -64$

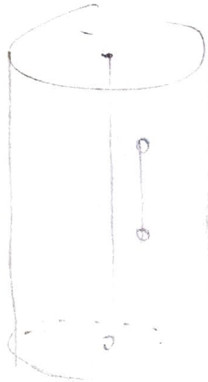
$40d^2<64$

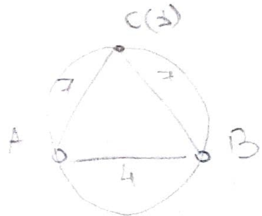
$5d^2<8$

$d^2<\frac{8}{5}$

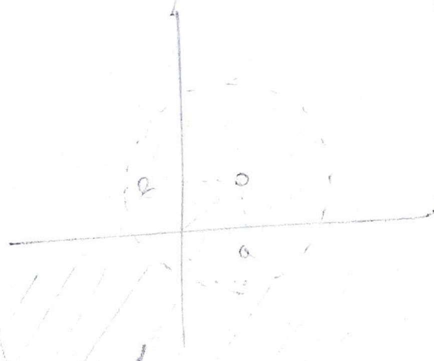
$d<\sqrt{\frac{8}{5}} \Rightarrow d=1$

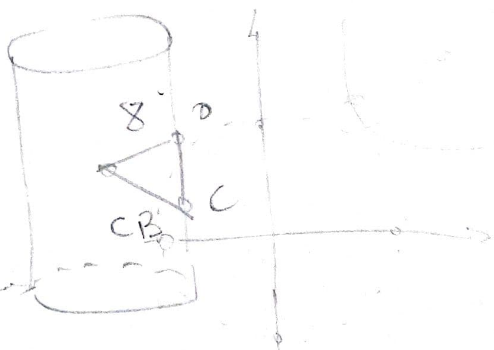


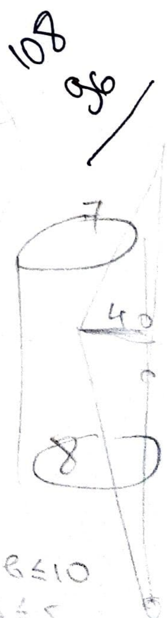


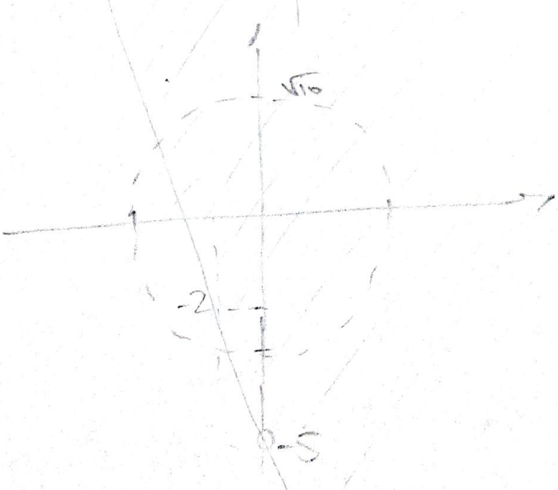


$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 10$









$-6a-2b \leq 10$

$6a+2b \geq -5\cdot 2$

$3a+b \geq -5$

$-6a-2b \leq 10$

$-3a-b \leq 5$

$b \geq -3a-5$

64
16

68
-32
36

Черновик

$a^2+b^2 \le \min(-6a-2b, 10)$

$-6a-2b \geq 0$ $3a \leq -b$ $3a+b \geq 0$

$3a+b=0$

$a^2+b^2 \leq -6a-2b$

$a^2+6a+b^2+2b \leq 0$

$(a+3)^2+(b+1)^2 \leq 10$

$-6a-2b \leq 10$

$6a+2b \geq -10$

$3a+b \geq -5$

$3a+b=-5$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104718**

ID профиля: **203016**

Вариант 24

Чистовик

Вариант 24
часть №2
№4

Страница 1

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=33 \\ НОК(a,b,c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$$

Пусть $a=33p$; $b=33q$; $c=33r$, где $НОД(p,q,r)=1$

$\Rightarrow НОК(a,b,c)=33\,НОК(p,q,r)=3^{19}\cdot 11^{15} \Rightarrow НОК(p,q,r)=3^{18}\cdot 11^{14}$

1) Рассмотрим степень вхождения 3 в p,q,r: т.к. $НОД(p,q,r)=1 \Rightarrow$ все три числа не могут одновременно $\vdots 3$; т.к. $НОК(p,q,r)=3^{18}\cdot 11^{14} \Rightarrow$ наибольшая степень вхождения в $p,q,r=18$
$\Rightarrow$ всего вариантов вхождения 3: $3\cdot 2\cdot 19$ (т.к. можно тремя способами выбрать число со степенью вхождения 0, двумя способами число со степенью вхождения 18, а оставшееся число может иметь любую степень вхождения от 0 до 18)

2) Аналогично рассмотрим степень вхождения 5:
всего способов $3\cdot 2\cdot 15$

3) Теперь посчитаем кол-во вариантов, посчитанных два раза:
3.1.) через $(a,b,c)_3$ будем обозначать степень вхождения 3 в p,q,r соответственно: варианты $(18,0,0)_3$, $(18,18,0)_3$, $(0,18,0)_3$, $(18,0,18)_3$, $(0,0,18)_3$ и $(0,18,18)_3$ мы посчитали по два раза $\Rightarrow$ всего вариантов $3\cdot 2\cdot 19-6=$
$=3\cdot 2\cdot 18=6\cdot 18$

3.2) аналогично для пятерки вариантов $3\cdot 2\cdot 14=6\cdot 14$

Заметим, что $\forall$ варианта вхождения 3 в p,q,r мы можем выбрать $\forall$ вариант вхождения 5 в p,q,r, домножить числа p,q,r на 33 и получить тройку a,b,c

$\Rightarrow$ Ответ: <u>всего существует $6^2\cdot 18\cdot 14$ троек a,b,c</u>

Ограничения:

$$\begin{cases} x<29 \\ x\neq 28 \\ x>-49 \\ x\neq -2 \\ x\neq -1 \\ x\neq 0 \\ x<29 \\ x\neq -42 \\ x<-1 \end{cases} \Rightarrow x\in(-49;-42)\cup(-42;-2)\cup(-2;-1)$$

$$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x+49}{7}\right) = 2\,\frac{\ln\left(\frac{x+49}{7}\right)}{\ln 29-x}$$

$$\log_{(x+1)^2}(29-x) = \frac{1}{2}\,\frac{\ln(29-x)}{\ln -x-1}$$ (т.к. $x<-1 \Rightarrow |x+1|=-x-1$)

$$\log_{\sqrt{\frac{x+49}{7}}}(-x-1) = 2\,\frac{\ln(-x-1)}{\ln\frac{x+49}{7}}$$

пусть $\ln\left(\frac{x+49}{7}\right)=a$; $\ln(29-x)=b$; $\ln(-x-1)=c$

$\Rightarrow$ исходное ур. экв.:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{2a}{b}+\frac{b}{2c}+\frac{2c}{a} = 3\cdot\frac{2a}{b}+1 = \frac{6a}{b}+1 \\ \frac{2a}{b}+\frac{b}{2c}+\frac{2c}{a} = 3\cdot\frac{b}{2c}+1 = \frac{3b}{2c}+1 \\ \frac{2a}{b}+\frac{b}{2c}+\frac{2c}{a} = 3\cdot\frac{2c}{a}+1 = \frac{6c}{a}+1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{b}{2c}+\frac{2c}{a} = \frac{4a}{b}+1 \\ \frac{b}{2c}+\frac{2a}{b} = \frac{4c}{a}+1 \\ \frac{2a}{b}+\frac{2c}{a} = \frac{2b}{2c}+1 \end{array}\right.$$

Чистовик

Вариант 24
часть №2

Страница 3

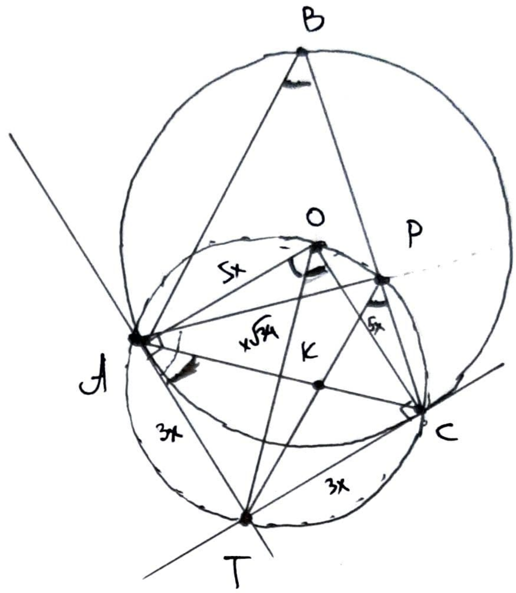
№6

Дано:

ABC – остр. $\triangle$
ω – опис. ABC
O – центр ω
ω' проходит через A, O, C
$\omega' \cap BC$ в P
AC, CT – кас. к ω
$TP \cap AC$ в K
$S_{\triangle APK} = 16$
$S_{\triangle CPK} = 14$

а) $S_{\triangle ABC}$ – ?
б) AC – ?
если $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$

Решение:



а) 1) Заметим, что т.к. AT, CT – кас. $\Rightarrow \angle OAT = \angle OCT = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow AOCT$ – впис. (т.к. $\angle OAT + \angle OCT = 180°$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ т.к. $A, O, C \in \omega' \Rightarrow T \in \omega'$

2) Заметим, что $\angle CPT = \angle CAT$ (т.к. $APCT$ – впис.);
по т. о угле между кас. и хордой
$\angle CAT = \angle ABC \Rightarrow \angle CPT = \angle ABC \Rightarrow AB \parallel PT$
$\Rightarrow \triangle CPK \sim \triangle CBA$ по двум углам
$\Rightarrow \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CPK}} = \left(\dfrac{AC}{CK}\right)^2$

3) Заметим, что $\dfrac{S_{\triangle CPK}}{S_{\triangle APK}} = \dfrac{CK}{AK}$ (т.к. высота на AC общая) $\Rightarrow \dfrac{CK}{AK} = \dfrac{7}{8}$
$\Rightarrow \dfrac{AC}{CK} = \dfrac{CK + KA}{CK} = 1 + \dfrac{8}{7} = \dfrac{15}{7}$
$\Rightarrow \left(\dfrac{AC}{CK}\right)^2 = \dfrac{15^2}{7^2} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 14 \cdot \dfrac{15^2}{7^2} = \dfrac{15^2 \cdot 2}{7}$

$\Rightarrow$ Ответ: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{15^2 \cdot 2}{7}$

б) проведем OT: $\angle TOC = \angle TPC = \frac{1}{2}\overset{\smile}{TC}$; $\angle TPC = \angle ABC$ (доказано выше)
$\Rightarrow TOC = \operatorname{arctg}\frac{3}{5} \Rightarrow$ пусть $TC = 3x \Rightarrow OC = 5x \Rightarrow OT = \sqrt{34x^2} = x\sqrt{34}$
$\Rightarrow$ т.к. OCT – $D(\omega') \Rightarrow R_{\omega'} = x\dfrac{\sqrt{34}}{2}$
по т. синусов для $\triangle AOC$ и ω': $\dfrac{AC}{\sin(\angle AOC)} = 2R_{\omega'} = D_{\omega'} \Rightarrow AC = \sin(\angle AOC) \cdot x\sqrt{34} =$
$= \sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{5}\right) x\sqrt{34}$ (т.к. $\angle AOC = \angle ABC \cdot 2$)
Заметим также: по т. синусов для $\triangle ABC$ и ω: $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R_{\omega} = 2OC = 10x \Rightarrow$
$\Rightarrow AC = \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{5}\right) \cdot 10x$

Чистовик
Страница 4

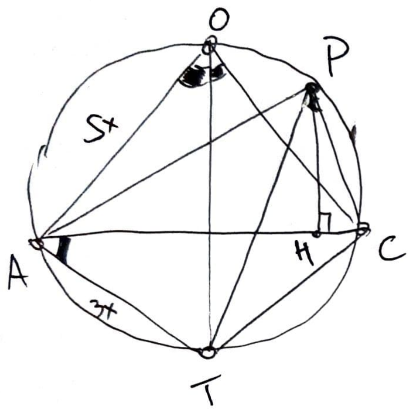
$$\Rightarrow \begin{cases} AC = \sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{5}\right)\times\sqrt{34} \\ AC = \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{5}\right)\cdot 10x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{5}\right)\sqrt{34}} = \frac{AC}{10\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{5}\right)}$$

Заметим, что $\angle AOC = 2\angle ABC$ и $\angle TOC = \angle ABC$ (по доказанному)

$\Rightarrow \angle AOT = \angle TOC = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$

$\Rightarrow \Delta AOT = \Delta COT$ по стороне и двум углам



Пусть $PH \perp AC \Rightarrow S_{\Delta APC} = \frac{PH\cdot AC}{2} = 30$

$\Rightarrow AC = \frac{60}{PH}$

$НОД(a,b,c)=33$
$НОК(a,b,c)=3^{19}\cdot 11^{15}$

Черновик

$33p$
$33q$
$33r$

$НОД(p,q,r)=1$

$НОК(a,b,c)=33НОК(p,q,r)=3^{19}\cdot 11^{15}$

$НОК(p,q,r)=3^{18}\cdot 11^{14}$

$(3\cdot 18)\cdot(3\cdot 14)$

$-x-1>0$
$x<-1$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x+49}{7}\right)$ $\quad \log_{(x+1)^2}(29-x)$ $\quad \log_{\sqrt{\frac{x+49}{7}}}(-x-1)$

~~$x \ne 28$~~
$x>-49$
$x\ne -2$
$x<29$
$x\ne -42$
$x<-1$

$x\in(-49;-42)\cup(-42;-2)\cup(-2;-1)$

$2\log_{29-x}\left(\frac{x+49}{7}\right)$ $\quad \frac{1}{2}\log_{-1-x}(29-x)$ $\quad 2\log_{\frac{x+49}{7}}(-x-1)$

$2\log_{29-x}\left(\frac{x+49}{7}\right)+\frac{1}{2}\log_{-1-x}(29-x)+2\log_{\frac{x+49}{7}}(-x-1)$

$\frac{2\ln\left(\frac{x+49}{7}\right)}{\ln(29-x)}+\frac{\ln(29-x)}{2\ln -1-x}+\frac{2\ln(-x-1)}{\ln\frac{x+49}{7}}$

$\frac{2a}{b}+\frac{b}{2c}+\frac{2c}{a}=\frac{4a^2c+b^2a+4c^2b}{2abc}$

$b>0$
$c>0$