Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104653**

ID профиля: **97066**

Вариант 24

№1 d-разность прогрессии, Чистовик. Стр. 1.
a-первый член.

$S = 9a + 36d$

$$\begin{cases}(a+4d)(a+17d) > S-4 = 9a+36d-4\\ (a+9d)(a+12)d < S+60 = 9a+36d+60\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+21ad+68d > 9a+36d-4\\ a^2+21ad+108d < 9a+36d+60\end{cases}$$

$\Rightarrow 40d < 64$ $\left(\begin{matrix}a+d\text{-целое}\\ a+2d\text{-целое}\end{matrix} \Rightarrow a+2d-a-d = d\text{-целое}\right)$

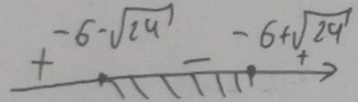
$d < \frac{8}{5} = 1,6$, т.к. d-целое, и прогрессия возрастающая $(d>0)$, то $d=1$

подставим:

$$\begin{cases}(a+4)(a+17) > 9a+32\\ (a+9)(a+12) < 9a+96\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+12a+36>0\\ a^2+12a+12<0\end{cases} \quad D = 144-48 = 96 \quad a = \frac{-12\pm\sqrt{96}}{2} = -6\pm\sqrt{24}$$

$$\begin{cases}(a+6)^2>0 \Rightarrow a \neq -6\\ (a+6+\sqrt{24})(a+6-\sqrt{24})<0\end{cases}$$



$-6-\sqrt{24} > -6-\sqrt{25} = -11$

$-6+\sqrt{24} < -6+5 = -1$

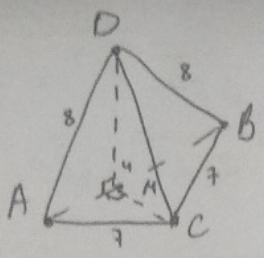
$\Rightarrow a \in \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$

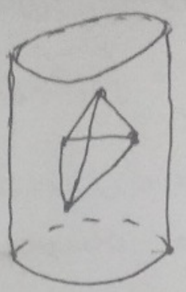
Т.к. представленная система уравнений полностью повторяет условие, то все полученные a, являющиеся решением системы, подойдут.

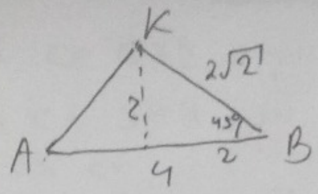
Ответ: $a \in \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$

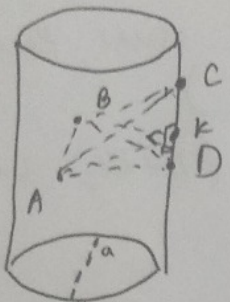
21104653 (U97066 M1298225)

№ 2.









очевидно, что диаметр окружности не меньше любой хорды.

т.к. $\triangle ADB$ и $\triangle ABC$ - равнобедр, то высоты к AB: DM, и CM. будут пересекаться в середине AB (точке M)

т.к. $AB \perp CM$ и $AB \perp DM \Rightarrow AB \perp (DMC) \Rightarrow AB \perp DC$

$\Rightarrow AB \parallel a$ - какому-то диаметру основания

$\Rightarrow AB \leq d$ - диаметра

$\Rightarrow$ радиус $r \geq \frac{AB}{2} = 2$.

Рассмотрим случай, когда $r = 2$. Тогда AB - диаметр в сечении цилиндра, параллельного основанию.

Из условие следует, что все высоты прямой CD попадают ровно в середину AB (очевидно, из свойств плоскости (CMD))

пусть плоскость ABK параллельна плоскости основания, и K - точка пересечения этой плоскости с CD. $\Rightarrow \angle BKC = \angle BKD = 90°$ (т.к. $CD \perp (ABK)$)

Тогда $\triangle ABK$ - равнобедр. и прямоуг. с основанием 4

$\Rightarrow BK = 2\sqrt{2}$

№2 продолж.

из $\triangle BKD \Rightarrow KD = \sqrt{BD^2 - BK^2} = \sqrt{64-8} = 2\sqrt{14}$

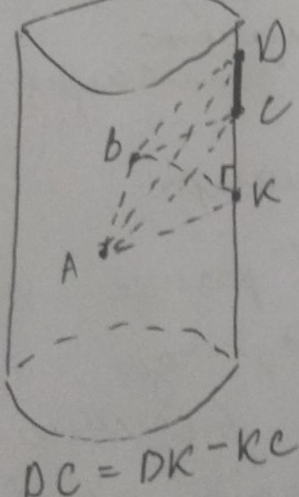
из $\triangle BKC \Rightarrow KC = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$

$\Rightarrow KD > KC$.

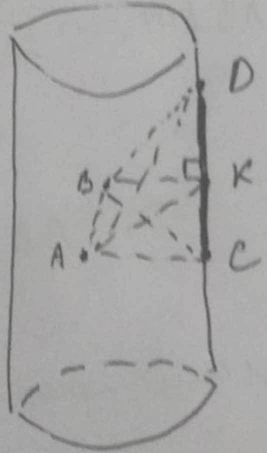
Тогда, в зависимости от расположение точки K (на отрезке CD или вне его, на прямой CD) длина отрезка CD $(KD+KC)$ или $(KD-KC)$

т.е. $\left[\begin{array}{l} DC = 2\sqrt{14}+\sqrt{41} \\ DC = 2\sqrt{14}-\sqrt{41} \end{array}\right.$

Ответ: $DC = 2\sqrt{14} \pm \sqrt{41}$.



$DC = DK - KC$



$DC = DK + KC$

№3.

Чистовик. стр4

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le -6a-2b \quad (1) \end{cases}$$

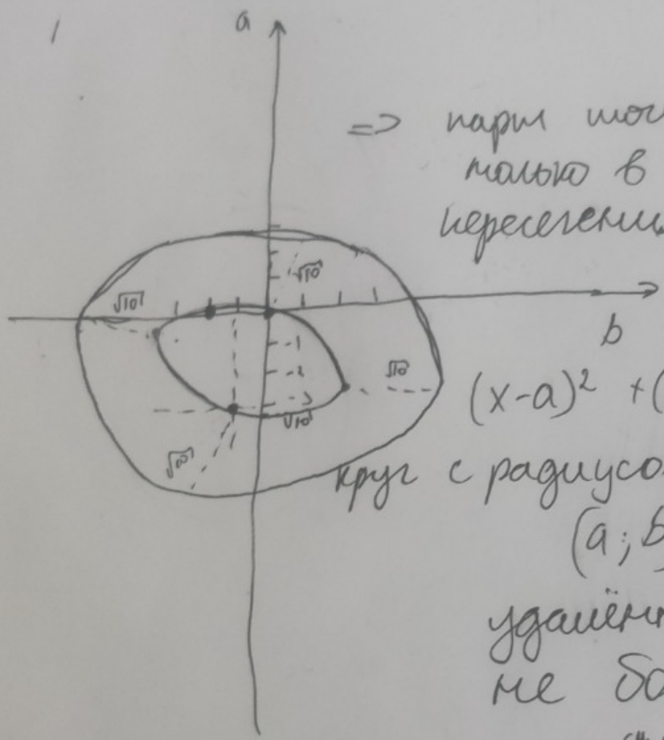
(1) $a^2+b^2 \le -6a-2b$

$(a^2+6a+9)+(b^2+2b+1) \le 10$

$\begin{cases} (a+3)^2+(b+1)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le 10 \end{cases}$

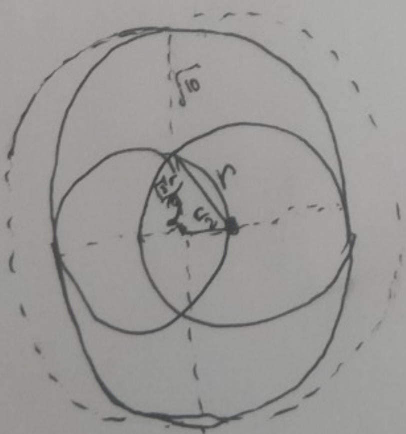
$(a+3)^2+(b+1)^2 \le 10$ · круг с радиусом $\sqrt{10}$ и центром $(-3;-1)$

$a^2+b^2 \le 10$ · круг с радиусом $\sqrt{10}$ и центром $(0;0)$



=> пары точек $(a;b)$ могут лежать только в отмеченной области: пересечение двух кругов описанных в системе выше.

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 10$ – круг с радиусом $\sqrt{10}$ и центром $(a;b)$. => Все точки, удалённые от отмеченой фигуры не более чем на $\sqrt{10}$ и будут фигурой M.



Это круг с радиусом $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ растянутый вдоль одной из осей до $\frac{\sqrt{3}\sqrt{10}}{2}+\sqrt{10}$

$$\Rightarrow S = \pi \cdot \sqrt{10}^2 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10}}{2}+\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \pi \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}+2}{2} = 5\pi(\sqrt{3}+2)$$

Ответ: $5\pi(\sqrt{3}+2)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104653**

ID профиля: **97066**

Вариант 24

№4

Чистовик. Gp 1

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=33=3^1\cdot 11^1 \\ НОК(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$$ => a, b, c являются произведением степеней 3 и 5.

=> $a \vdots 33$, $b \vdots 33$, $c \vdots 33$,

при этом либо a, либо b, либо c содержат 3^1 и 3^{19}

и аналогично 11^1 и 11^{15}

$a=3^{x_1}\cdot 11^{y_1}$ $b=3^{x_2}\cdot 11^{y_2}$ $c=3^{x_3}\cdot 11^{y_3}$

один из x_1, x_2, x_3 равен 1, другой 19 и третий любое число от 2 до 18. (случай когда два числа 1 или 19 рассмотрю отдельно)

=> всего случаев $3!\cdot 1\cdot 1\cdot 17=6\cdot 17$

и еще варианты когда две „1": 3 шт.

и когда две „19" 3 шт

=> всего $6\cdot 18=108$ вар-тов.

для y аналогичным образом получаем:

$6\cdot 13+3+3=6\cdot 14=84$ вар-тов.

=> всего вариантов троек:

$108\cdot 84=9072$

Ответ: 9072.

$$\begin{array}{r} \times\ 108 \\ 84 \\ \hline +\ 432 \\ 864\ \ \\ \hline 9072 \end{array}$$

№5

Для существования всех трёх чисел необходимо:

$$\begin{cases} 29-x>0 \\ 29-x\neq 1 \\ \frac{x}{7}+7>0 \\ (x+1)^2>0 \\ (x+1)^2\neq 1 \\ \frac{x}{7}+7\neq 1 \\ \frac{x}{7}+7>0 \\ -x-1>0 \end{cases}$$ т.е. $x\in(-49;-42)\cup(-42;-2)\cup(-2;-1)$

на ОДЗ $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)^2$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=\log_{\frac{x}{7}+7}(x+1)^2$

тогда, произведение этих трёх чисел:

$$\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)^2\cdot\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(x+1)^2\cdot\log_{(x+1)^2}(29-x)=$$

$$=\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}\left(\frac{x}{7}+7\right)^2=2$$

пусть два из трёх чисел равны a, а третье тогда $(a+1)$

$$\Rightarrow a^2(a+1)=2$$
$$a^3+a^2-2=0$$
$$(a-1)(\underbrace{a^2+2a+2}_{D<0})=0$$
$$\Rightarrow a=1.$$

I сл: $\log_{(x+1)^2}(29-x)=1$

На ОДЗ $\Leftrightarrow (x+1)^2=29-x$

$$x^2+3x-28=0$$

$D=9+4\cdot 48=121$ $\quad x=\frac{-3\pm 11}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=4 \text{ - не уд ОДЗ} \end{array}\right.$

21104653 (U97066 M1298226)

нерв. №5 продолжение | Чистовик. Стр 3.

при $x=-7$:

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_6 6=1$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=\log_{\sqrt{6}} 6=2$ - уд.

II сл: $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1$

на ОДЗ $\Leftrightarrow$ $29-x=\left(\frac{x}{7}+7\right)^2$

$49\cdot 29-49x=x^2+49\cdot 2x+49^2$

$x^2-49\cdot 3x+49\cdot 20=0$

$D=49^2\cdot 3^2-4\cdot 49\cdot 20=$

$=49\,(49\cdot 9-80)=$

$=(7\cdot 19)^2$

$x=\frac{49\cdot 3\pm 7\cdot 19}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x=-7 \text{ - уже проверен - уд.} \\ x=-90 \text{ - не уд ОДЗ.} \end{array}\right.$

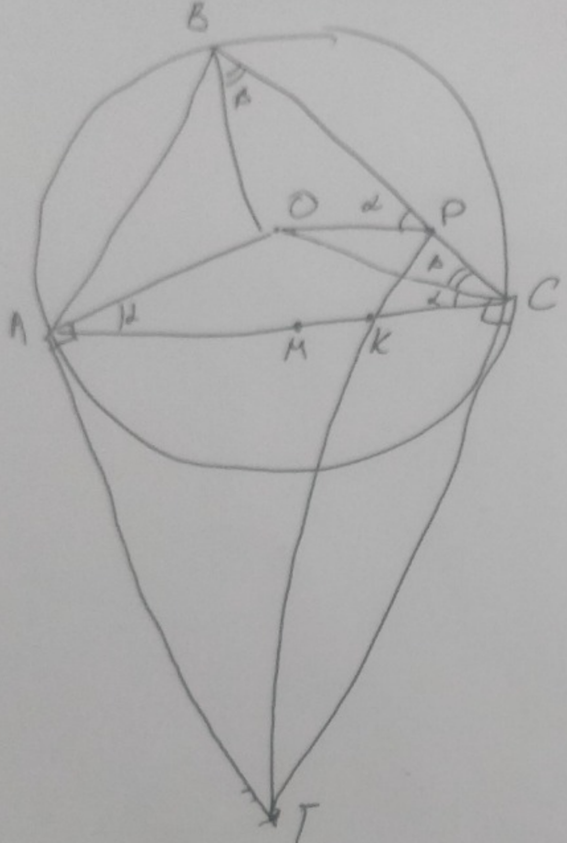
III сл: $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=1.$

Очевидно, что такой вариант не уд, т.к. оба других числа не будут равны единице, ведь в этом случае $x\neq -7$, а как видно ранее, первые два числа равны 1 только при $x=-7$.

Ответ: $x=-7$.

21104653 (U97066 M1298226)

№6. Чистовик. Стр 4.



а) $AT = TC$ M-середина AC.

По т. Чевы для ABC и для ATC

$$\Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{\cancel{AK}-KC}{CM-KC} = \frac{16-14}{15-14} = 2$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{BH \cdot AC}{2}$$

$$S_{APC} = \frac{PH_1 \cdot AC}{2}$$

причем $\frac{BH}{PH_1} = \frac{BC}{PC} = \frac{BP+PC}{PC} = \frac{3}{1}$

$$\Rightarrow S_{ABC} = 3 S_{APC} =$$

$$= (S_{APK} + S_{CPK}) \cdot 3 = 90.$$

б) $tg\, ABC = \frac{3}{5}$ $\Rightarrow \sin\angle ABC = \frac{3}{\sqrt{34}}$

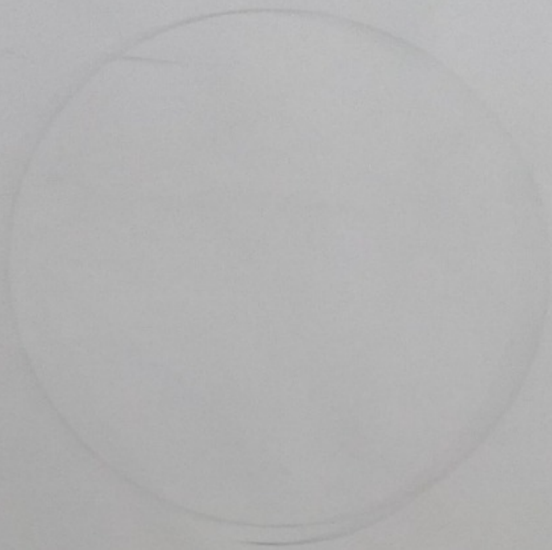
$S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC \Rightarrow AB \cdot BC = \frac{\sqrt{34} \cdot 90}{3} =$

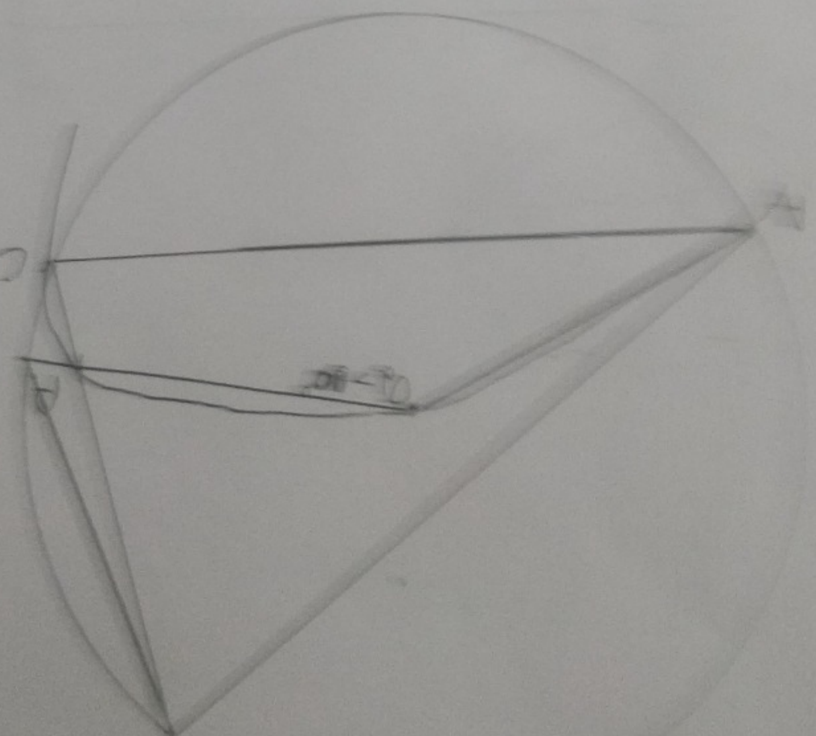
$= 30\sqrt{34}$

21104653 (U97066 M1298226)

Черновик

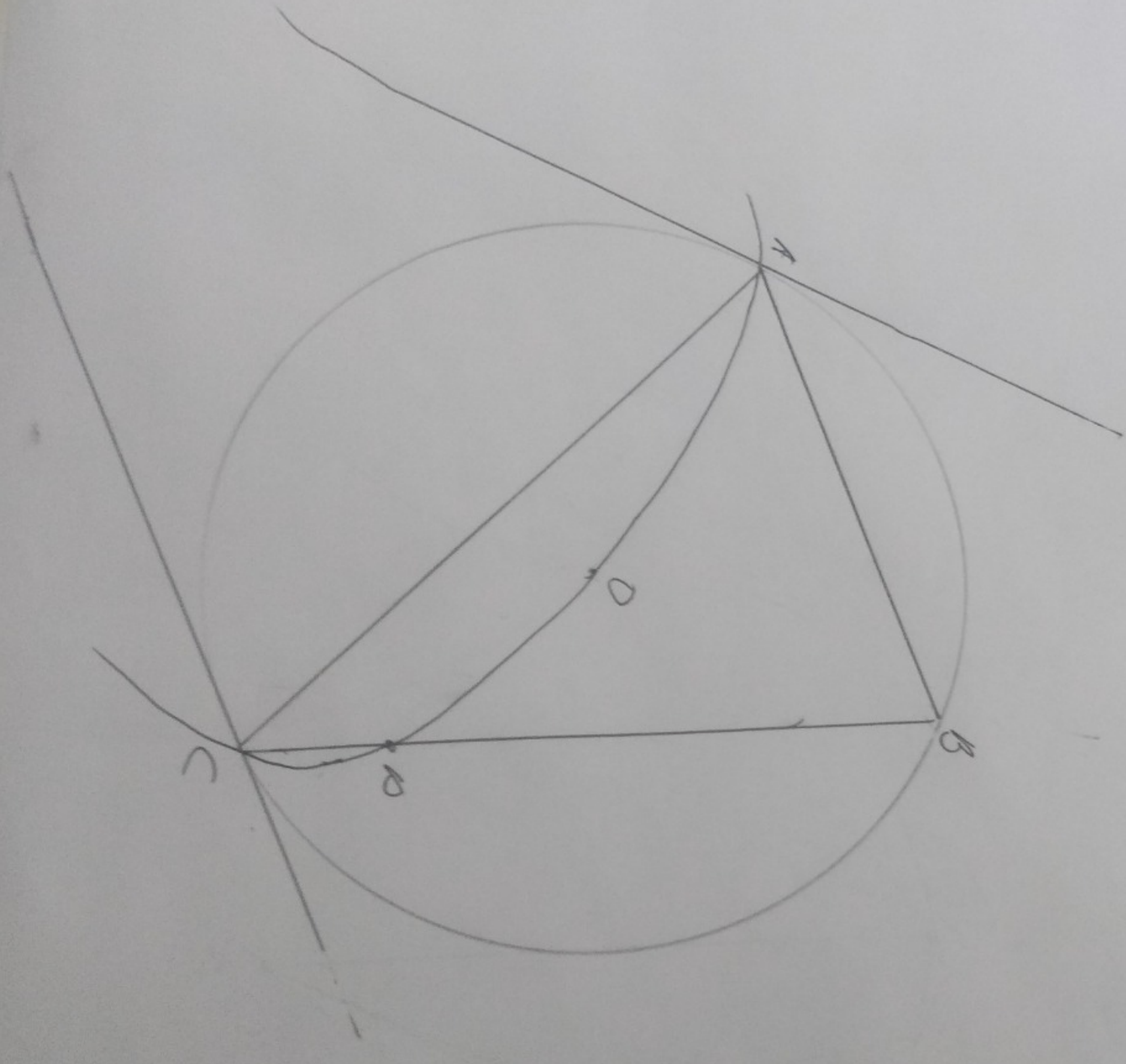
Черновик





21104653 (U97066 M1298226)

Черновик

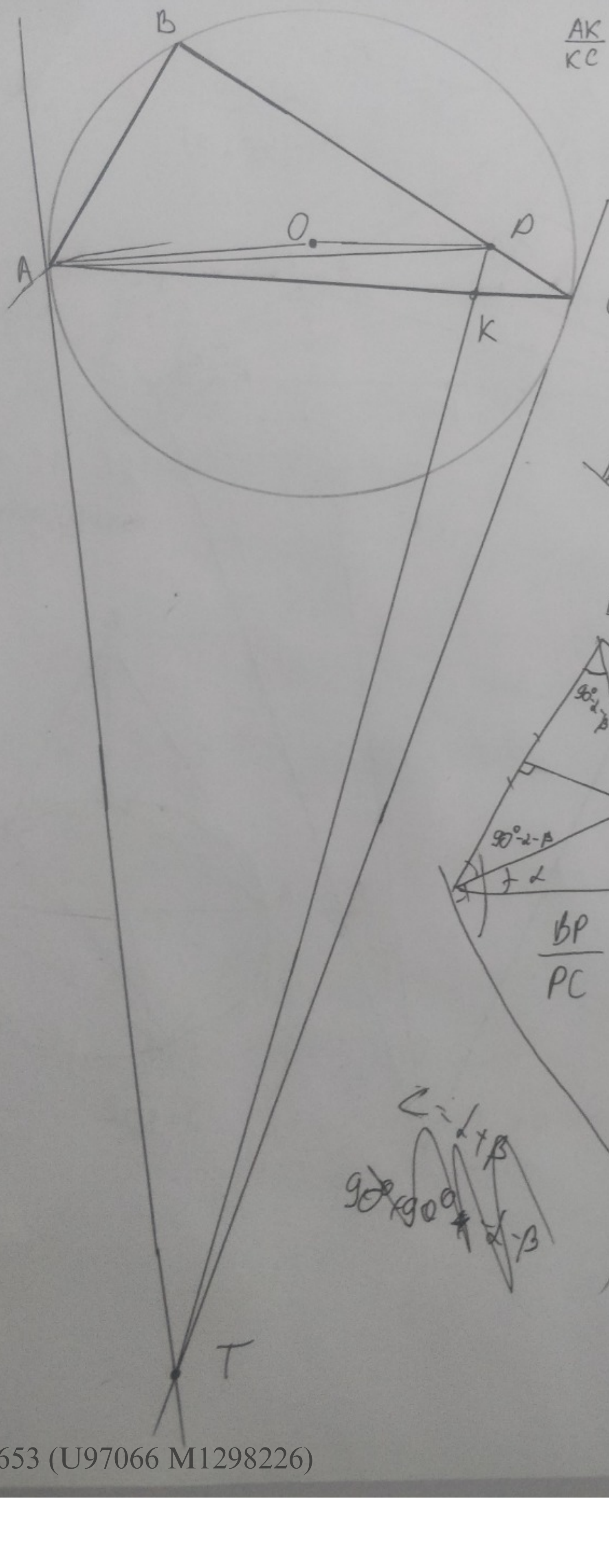


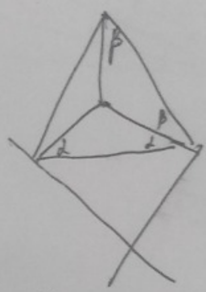
№5.

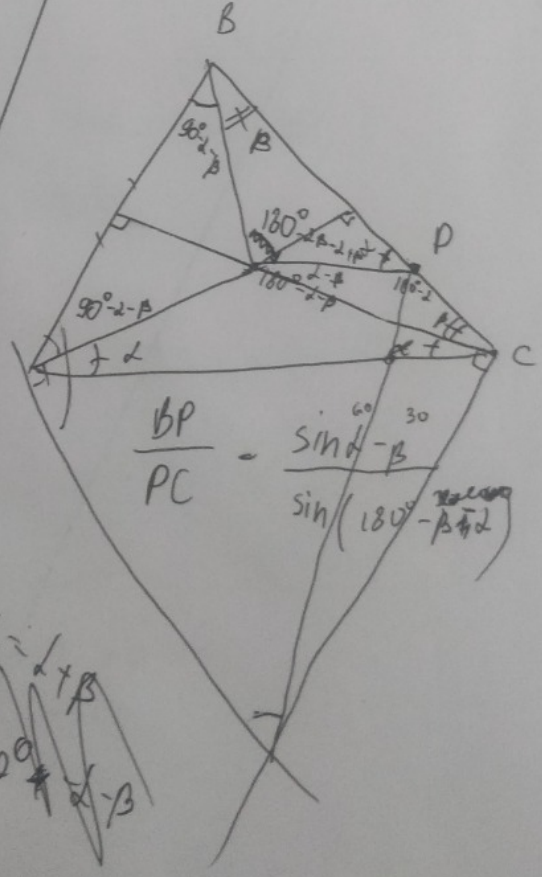
Черновик

Черновик.

$$\frac{AK}{KC} = \frac{8}{7}$$







$$\frac{BP}{PC} = \frac{\sin \alpha - \beta}{\sin(180° - \beta - \alpha)}$$

$\angle = \alpha + \beta$

$90° + 90° - \alpha - \beta$

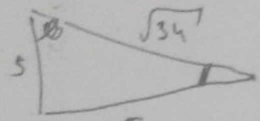
№5.

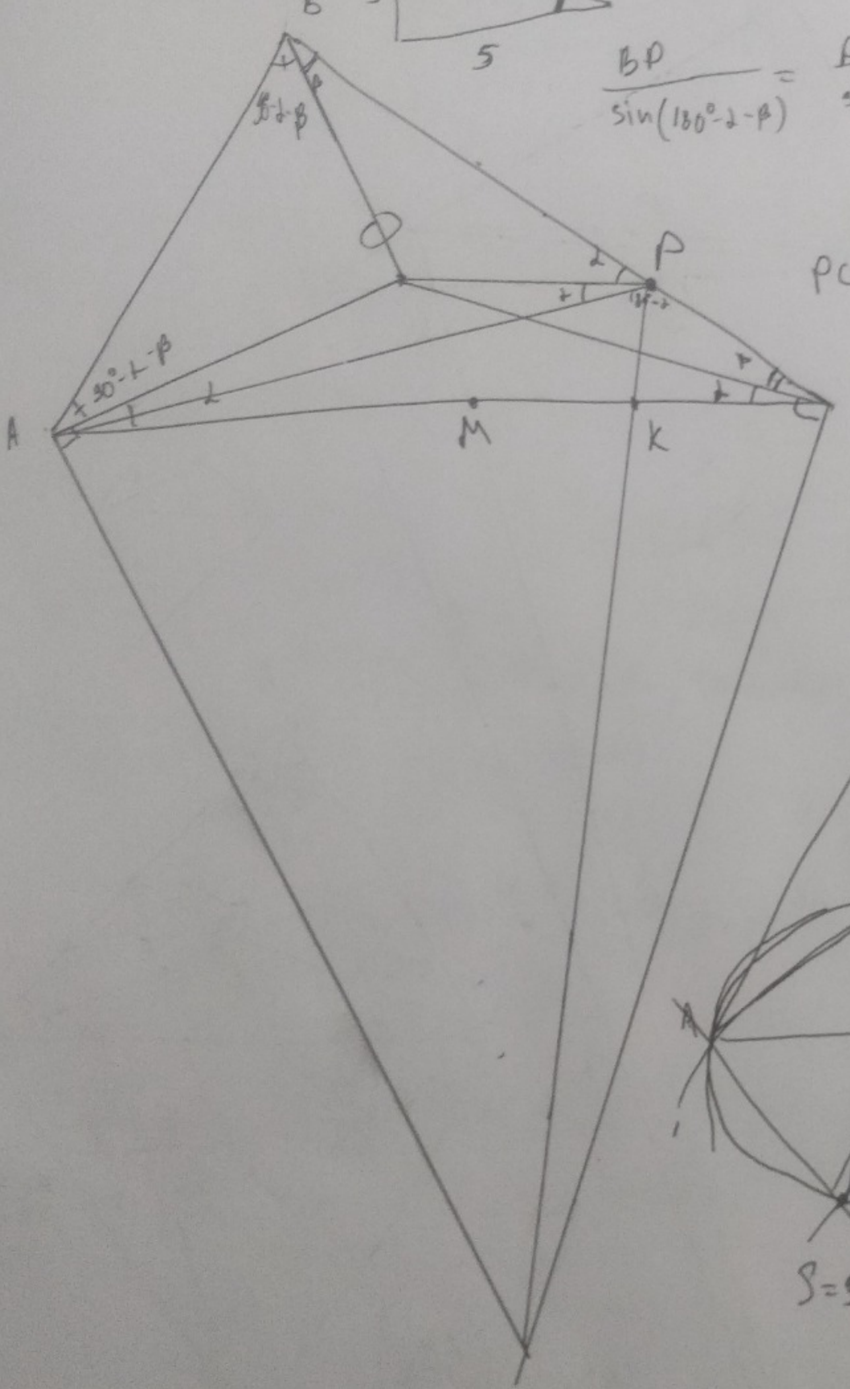
Черновик.

Для существования этих трёх шем...

Черновик

б) $\sin ABC = \frac{3}{\sqrt{34}}$





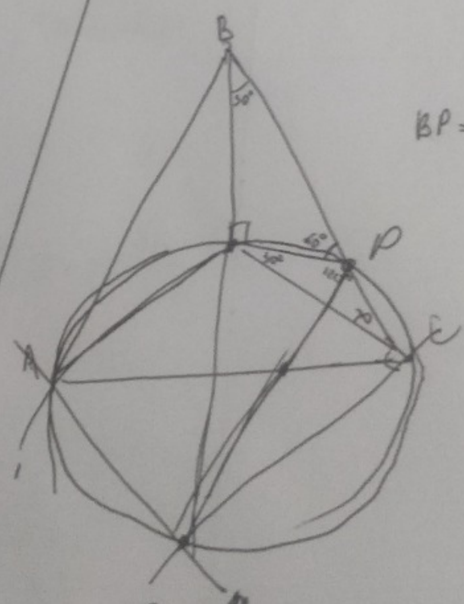
$$\frac{BP}{\sin(180°-\alpha-\beta)} = \frac{PC}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{AC}{\sin(180°-2\alpha)} =$$

$$= \frac{R}{\sin\alpha}$$

$PC \cdot AC \sin(\alpha+\beta) =$

$= 30$

$$\frac{PC \cdot AC \cdot \sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)(\sin(180°-2\alpha)} = \frac{R^2}{\sin\alpha^2}$$



$BP = 2\ OP =$

$S = 30$

№5. Черновик.

Для существования этих трех чисел необходимыми условиями будет:

$$\begin{cases} 29-x>0 \\ 29-x\neq 1 \\ \frac{x}{7}+7>0 \\ (x+1)^2>0 \\ (x+1)^2\neq 1 \\ \frac{x}{7}+7>0 \\ \frac{x}{7}+7\neq 1 \\ -x-1>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x<29 \\ x\neq 28 \\ x>-49 \\ x\neq -1 \\ x\neq 0 \\ x\neq -2 \\ x>-49 \\ x\neq -42 \\ x<-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x\in(-49;-42)\cup(-42;-2)\cup(-2;-1)$

~~1ая: на ОДЗ~~ $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{(x+1)^2}(29-x)$ ~~на ОДЗ~~ $\Leftrightarrow$

$\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)^2=\frac{1}{\log_{29-x}(x+1)^2}$

$\cancel{\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)^2}$

на ОДЗ: $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)^2$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(x+1)^2$

~~I-ая: $\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)^2=\log_{(x+1)^2}(29-x)$~~

$$\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)^2\cdot\log_{(x+1)^2}(29-x)\cdot\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(x+1)^2=$$

$$=\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}\left(\frac{x}{7}+7\right)^2=2=a^2(a+1)=a^3+a^2$$

~~I-ая: $\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)^2=\log_{(x+1)^2}(29-x)=a$~~

$a^3+a^2-2=0 \Rightarrow a=1$

$(a-1)(a^2+2a+2)=0$

$D=4-8<0$

21104653 (U97066 M1298226)

Iсл: $\log_{(x+1)^2}(29-x)=1$

Черновик.

на ОДЗ $\Leftrightarrow (x+1)^2=(29-x)$

$x^2+2x+1=29-x$

$x^2+3x-28=0$

$D=9+80+32=121$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{121}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=4 \text{ - не уд ОДЗ.}\end{array}\right.$

$\Rightarrow \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_6 6=1$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=\log_{\sqrt{6}}6=2$ - уд.

IIсл: $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1$

на ОДЗ $\Leftrightarrow 29-x=\left(\frac{x}{7}+7\right)^2$

$(29-x)\cdot 49=(x+49)^2$

$29\cdot 49-49x=x^2+49\cdot 2\cdot x+49^2$

$x^2+49\cdot 3x+49\cdot 20=0$

$D=49^2\cdot 3^2-4\cdot 49\cdot 20=$

$=49(49\cdot 9-4\cdot 20)=$

$=\cancel{33\ldots}\ (7\cdot 19)^2$

$x=\frac{-147\pm\cancel{35\ldots}\,133}{2}$

$\left[\begin{array}{l} \cancel{-147}\ x=\frac{-147-133}{2} \text{ - не уд ОДЗ} \\ x=-7 \text{ - уже проверено}\end{array}\right.$

$19 \times 7 = 133$

$49 \times 9 = 441$

$441 - 80 = 361$

$361 : 19 = 19$

IIIсл: $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=1.$

Очевидно, что корней в ОДЗ не будет, либо тогда...