Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104542**

ID профиля: **800672**

Вариант 24

Чистовик

Вариант 24

Лист №1 из 4

Часть 1

№1

По условию:

$a_5 \cdot a_{18} > S - 4$

$a_{10} \cdot a_{13} < S + 60$

S – сумма первых 9 членов.

a_1 – ?

Пусть $d \in Z$ $d > 0$

тогда:

$a_5 = a_1 + 4d$

$a_{18} = a_1 + 17d$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$a_{13} = a_1 + 12d$ тогда

$S_9 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} = (a_1 + 4d) \cdot 9$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_1 + 4d)(a_1 + 17d) > (a_1 + 4d) \cdot 9 - 4 \\ (a_1 + 9d)(a_1 + 12d) < 9(a_1 + 4d) + 60 \end{cases} \Rightarrow$$

перепишем относительно a_1 и d.

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 108d^2 - 9a_1 - 36d - 60 < 0 \\ a_1^2 + 21a_1d + 68d^2 - 9a_1 - 36d + 4 > 0 \end{cases}$$

Пусть $t = a_1^2 + 21a_1d + 68d^2 - 9a_1 - 36d + 4$

тогда: $\begin{cases} t + 40d^2 - 64 < 0 \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow 40d^2 - 64 < 0$

$d^2 < \frac{64}{40} \Rightarrow d = 1$ подставим: т.к. $d \in Z$ $d > 0$ то

$$\begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \\ a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \end{cases}$$

Смотрите след. страницу (лист)

Чистовик
вариант 24
Лист №2 из 4
Часть 1

продолжение №1

$$\begin{cases} a_1^2+12a_1+12<0 \\ a_1^2+12a_1+36>0 \end{cases}$$

$D=144-48=96$

$a_{1,1}=-6+2\sqrt{6}$

$a_{1,2}=-2\sqrt{6}-6$

тогда: $a\neq 6$

$-6-2\sqrt{6}<a_1<-6+2\sqrt{6} \Rightarrow$

~~$a\in[-2;-10]$~~ $a_1\in\{-2;-3;-4;-5;-6;-7;-8;-9;-10\}$

Ответ: $a_1\in\{-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9,-10\}$

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2\le 10 \\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b,10) \end{cases}$$

Рассмотрим 2 случая
1) $-6a-2b\le 10$
2) $-6a-2b>10$

1) $-6a-2b\le 10$

$b\geq -3a-5$

$a^2+b^2\le -6a-2b$

$a^2+6a+9+b^2+2b+1\le 10$

$(a+3)^2+(b+1)^2\le 10\ (O_1)$

$\Rightarrow$ это окр. с центром $(-3;-1)$ $R=\sqrt{10}$

2) $-6a-2b>10 \Rightarrow b<-3a-5$

$\Rightarrow a^2+b^2\le 10 \Rightarrow$

Окр с центром $(0;0)$ и $R=\sqrt{10}$ (O_2)

Смотри след. лист.

21104542 (U800672 M1302638)

Чистовик

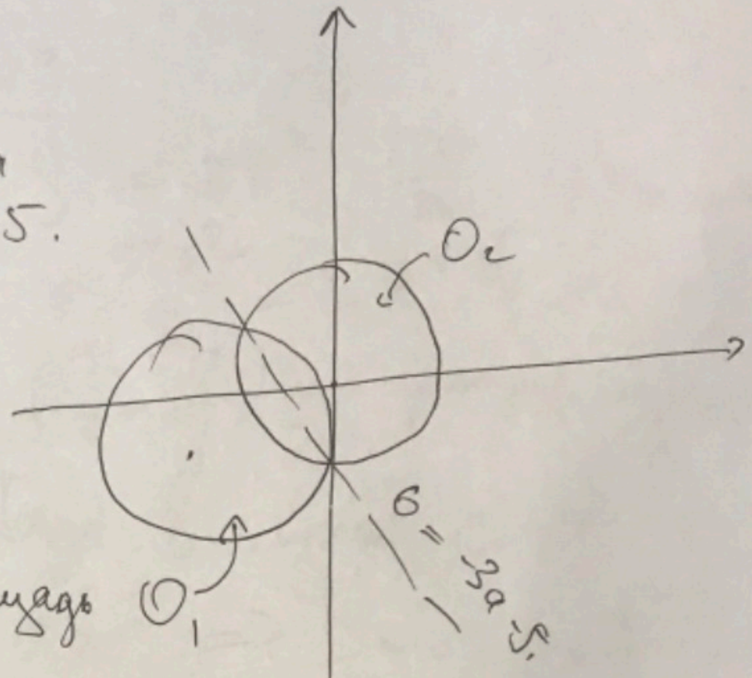
Вариант 24

Лист №3 из 4

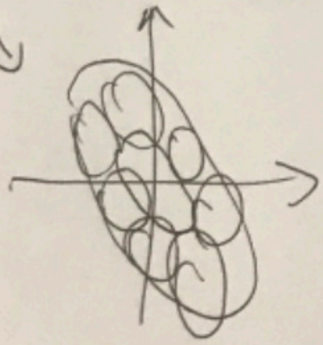
Часть 1

Продолжение №3

Окружности пересекаются по прямой $6 = -3a - 5$.



$(a; b)$ — центр окружности из неравенства из условия значит площадь M — это площадь фигуры которая получится движением окружности $(x-a)^2 + (y-6)^2 = 10$ по области допустимых значений a и b.



Искомая фигура M будет иметь увеличение на $\sqrt{10}$ размеры и состоит из двух одинаковых сегментов

Смотри далее след. лист.

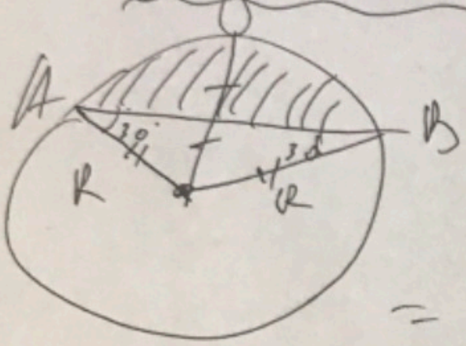
Чистовик

вариант №24

лист №4 из 4

Часть №1

продолжение №3



$$S = \pi R^2 \cdot \frac{120}{360} - S_{\triangle OAB}$$

$$= \frac{\pi R^2}{3} - \frac{1}{2} R^2 \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$= R^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \to$ площадь одного сегмента. Тогда в случае с M:

$R = \sqrt{10} + \sqrt{10} = 2\sqrt{10} \Rightarrow S_M = 2 \cdot (2\sqrt{10})^2 \left(\frac{\pi}{3} - \right.$

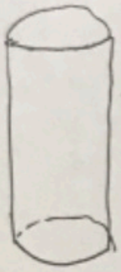
$$= 80\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

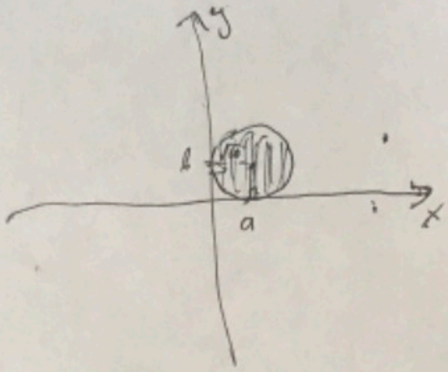
Ответ: $S_m = 80\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

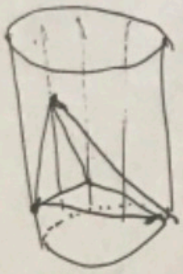
21104542 (U800672 M1302638)

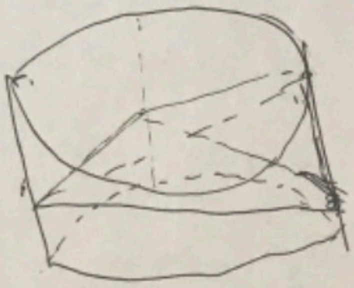
Черновик лист №1 из 4

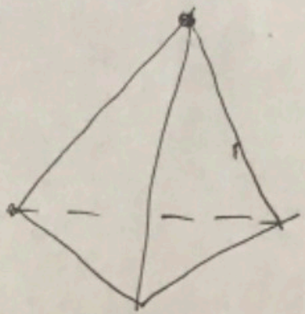
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10\\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b,10)\end{cases}$$







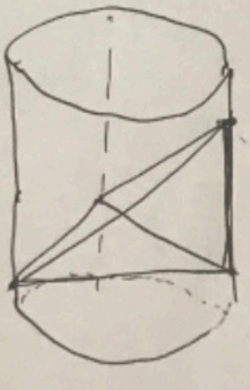




$$(x-a)^2+(y-b)^2\le 10$$

$$a^2+b^2\le \min(-6a-2b),10)$$

$$x-2xa+a^2+y^2+b^2-2by\le$$



Черновик. лист №2 из 4

пусть d

$a_5 \cdot a_{18} > S - 4$

$a_{10} \cdot a_{13} < S + 60$

$a_5 = a_1 + 4d$

$a_{18} = a_1 + 17d$

$\vdots$

$$S_9 = \left(\frac{2a_1 + d(9-1)}{2}\right) = a_1 + 4d) \cdot 9$$

$$\begin{cases} (a_1+4d)(a_1+17d > (a_1+4d) \cdot 9 - 4 \\ (a_1+9d)(a_1+12d < 9 \cdot (a_1+4d) + 60 \end{cases}$$

$$a^2 + 21a_1 \cdot d + 108d^2 - 9a_1 - 36d - 60 < 0$$

$$t = a_1^2 + 21a_1d + 68d^2 - 9a_1 - 36d + 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t + 40d^2 - 64 < 0 \\ t > 0 \end{cases}$$

$$d^2 < \frac{64}{10} \Rightarrow d = 1 \quad d \in \mathbb{N}$$

$a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$

$d_1^2 + 12d_1 + 36 > 0$

$\sqrt{D} = 96$

$a_1 = -6 + 2\sqrt{6}$

$a_2 = -6 - 2\sqrt{6}$

21104542 (U800672 M1302638)

Черновик
лист 3
из 4

тогда $a \neq -6$ и $a > -6-2\sqrt{6}$

$a < -6+2\sqrt{6} \Rightarrow a \in \{-2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10\}$

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 10 \\ a^2+b^2 \leq \min\{-6a-2b, 10\} \end{cases}$$

1) $-6a-2b \leq 10$

$b > -3a-5$

$a^2+b^2 \leq -6a-2b$

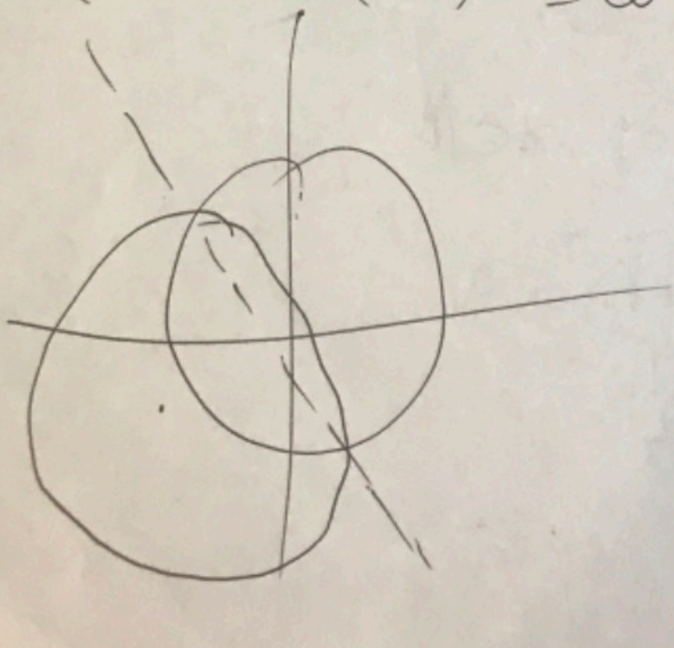
$a^2+6a+9+b^2+2b+1 \leq 10$

$(a+3)^2+(b+1)^2 \leq 10 \Rightarrow$ 1 окр. $(-3,-1)$ $R=\sqrt{10}$

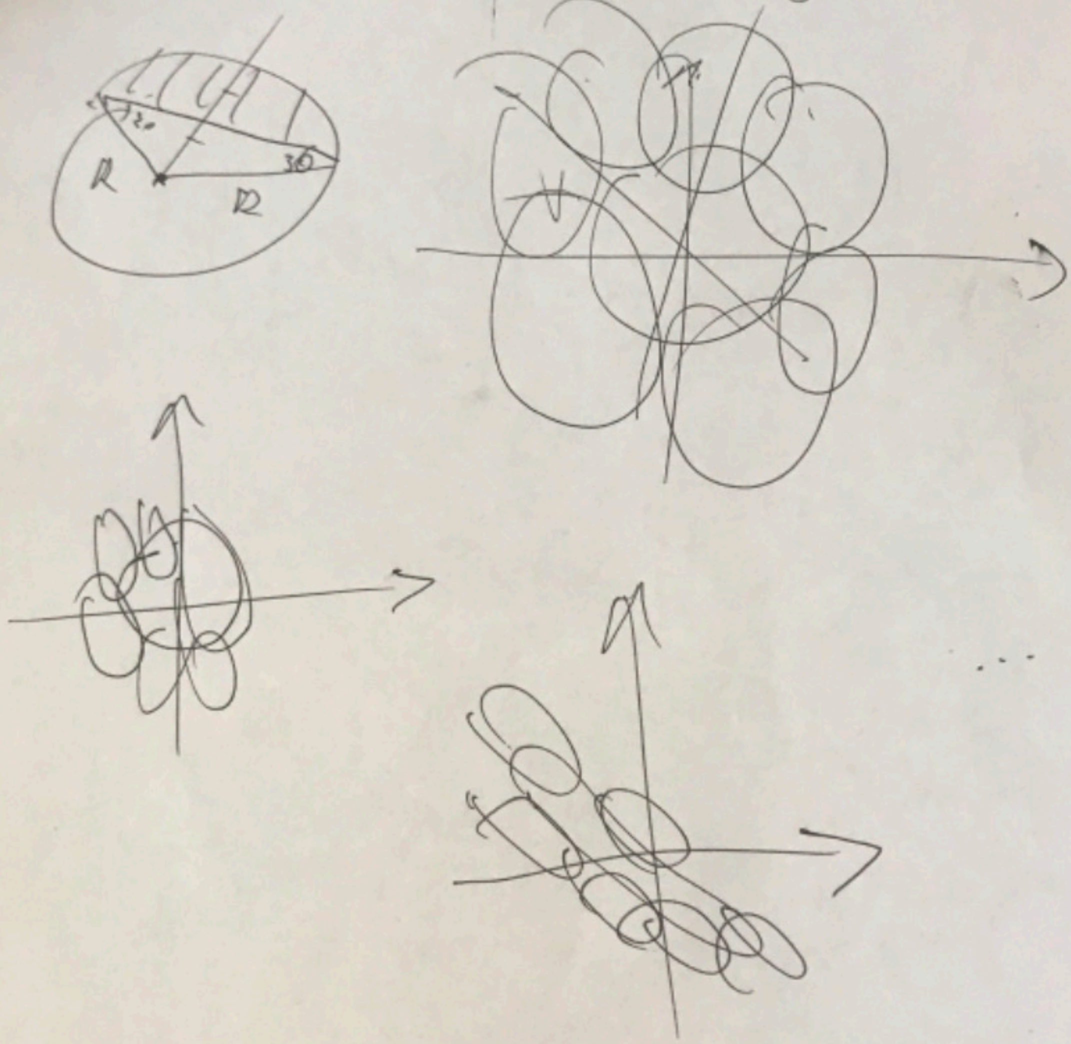
2) $-6a-2b > 0$

$a^2+b^2 \leq 10$

$(0,0)$ $R=\sqrt{10}$ 2 окр.



Черновик 1 ч из 4



...

21104542 (U800672 M1302638)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104542**

ID профиля: **800672**

Вариант 24

Чистовик

Вариант №24

Часть 2

Лист №1 из 4

№4

$$\begin{cases} НОД(abc) = 33 \quad (1) \\ НОК(abc) = 3^{19} \cdot 11^{15} \quad (2) \end{cases}$$

Из (1) следует что:
$a = 33p$ где $pqr \in N$
$b = 33q$
$c = 33r$ ~~иначе НОД(abc) ≠ 33~~
иначе $НОД_1(abc) \neq 33$

$НОК(abc) = 33 \cdot НОК(pqr) \Rightarrow$

$\Rightarrow НОК(pqr) = 3^{18} \cdot 11^{14}$. В разложении могут участвовать только p, q, r равные "3" или "11" иначе ~~НОД~~ $НОК \neq 3^{19} \cdot 11^{15}$ при этом p, q, r не имеют общих делителей больших 1, Без потери общности скажем.

$p = 11^x$

$q = \cancel{} \cdot 11^v \cdot 3^u$ где x, u, v, z – целые неотриц. числа

$r = 3^z$

$\Rightarrow НОК(p,q,r) = 3^{18} \cdot 11^{14} = 3^{\max(u,x)} \cdot 11^{\max(x, v)}$ тогда:

$$\begin{cases} \max(u, z) = 18 \\ \max(x, v) = 14 \end{cases}$$

Смотри след. лист.

Чистовик

Вариант №24

Часть 2

Лист №2 из 4

№4 продолжение

Возможные варианты

y	z
18	0
⋮	⋮
18	17
18	18
17	18
⋮	⋮
0	18

37 вариантов

x	y
14	0
⋮	⋮
14	13
14	14
13	14
⋮	⋮
0	14

29 вар.

Тогда общее кол-во троек: $= 29 \cdot 37 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Мы умножаем на 3 т.к. $abc \neq bac$

(система симметрична относительно перестановок)

Ответ: $29 \cdot 37 \cdot 2 \cdot 3 = 6438$.

Ответ: 6438

Чистовик

Вариант №24

Часть 2

лист №3 из 4

№5 $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2} 29-x$, $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

ОДЗ

$29-x>0$

$29-x\neq 1$

$\frac{x}{7}+7>0$

$\frac{x}{7}+7\neq 1$

$-x-1>0$

$-x-1\neq 1$

Перемножим исходные числа

$\log_{(29-x)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\log_{(x+1)^2}(29-x)\cdot\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)^{\frac{1}{2}}}(-x-1)$

$=2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\frac{1}{2}\log_{x+1}(29-x)\cdot$

$\cdot\ 2\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)=2$

Пусть A = равным числам тогда:

$A\cdot A\cdot(A+1)=2$

$A^3+A^2-2=0$

$A=1$ решение

$(A-1)(A^2+2A+2)=0$

$A=1$ – ед. решение

$$\begin{array}{r|l} A^3+A^2-2 & A-1 \\ \hline -(A^3-A^2) & A^2+2A+2 \\ 2A^2-2 & \\ -(2A^2-2A) & \\ 2A-2 & \\ -(2a-2) & \\ 0 & \end{array}$$

Смотри след. лист.

Чистовик

Вариант 24

Часть 2

Лист №4 из 4

№5 продолжение

Это ~~о~~ значит, что из исходных 2 должны быть равны 1 а третий = 2

$\log_a 6 = 1$ если $a = 6$ + ОДЗ

Рассмотрим случаи

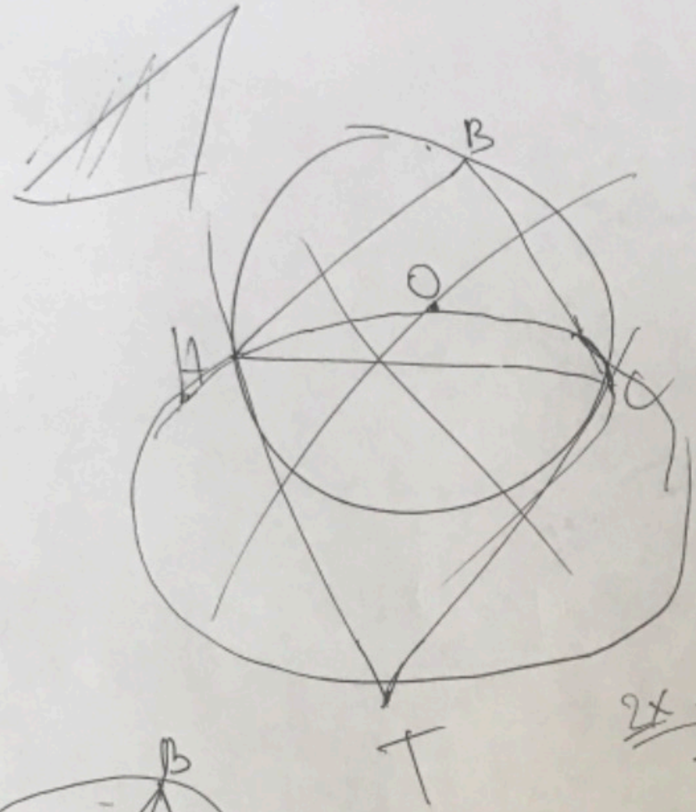
$\sqrt{29-x} = \frac{x}{7} + 7$ $x^2 + 147x + 980$ $x_1 = -140$ → не подход. по ОДЗ. $x_2 = -7$	$x^2 + 3x - 28 = 0$ $x_1 = -7$ $x_2 = 4$ – не подходит по ОДЗ	$\sqrt{\frac{x}{7} + 7} = -x - 1$ $\frac{x}{7} + 7 = x^2 + 2x + 1$ $x^2 + \frac{13}{14}x - 6 = 0$ $x_1 = \frac{-13 + \sqrt{1345}}{14}$ – не подход $x_2 = \frac{-13 - \sqrt{1345}}{14}$ → этот случай не подойдет т.к. бы обратился только последний и этот нам не подходит.

Подставим $x = -7$

$\log_6 6$, $\log_{36} 36$, $\log_{\sqrt{6}} 6$ → Подходит!

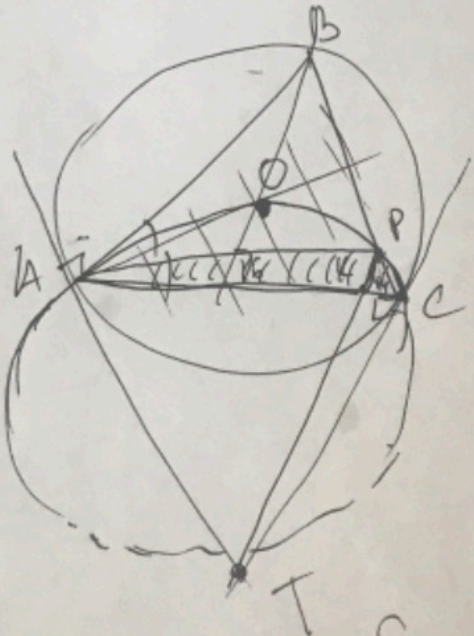
Ответ: -7

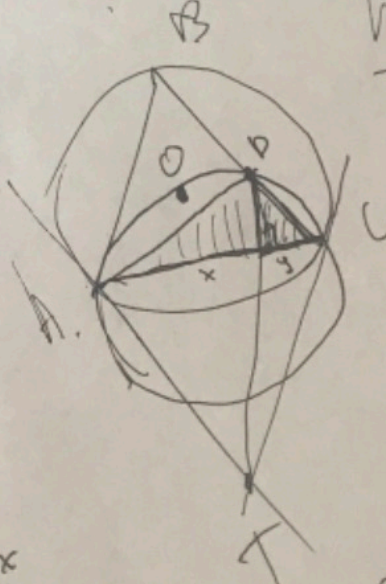
Черновик 1 из 4



$AC = 2x + 4h.$

$\frac{2x - AC}{\cancel{A}} = 4h.$





$\frac{hx}{2} - \frac{h(AC-x)}{2} = 2$

$\frac{x}{2} - \frac{AC-x}{2}$

$S_1 = \frac{hx}{2}$

$S_1 - S_2 = 2.$

$S_2 = \frac{h(AC-x)}{2}$

Черновик № 2 из 4

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$ $\log_{(x+1)^2}(29-x)$ $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

$A \cdot A \cdot (A+1) = 2.$

$A^3+A^2-2=0.$

$(A-1)(A^2+2A+2)=0.$

$A^3+A^2-2 \,|\, A-1$

$A^3-A^2 \quad | \; A^2+2A+2$

$2A^2$

$-2A^2-2A$

$2A-2$

0

ОДЗ.

$x<29.$ $\cancel{x} \neq 1$

$a=6.$

$\sqrt{29-x}=7+\frac{x}{7}$

$x^2+147x+980.$

$\cancel{x_1=-140}$

$x_2=-7$

$x^2+13x-28=0$

$x_1=-7$

$\cancel{x_2=4}$ — не подх

Ответ..

$\sqrt{\left(\frac{x}{7}+7\right)}=-x-1$

$\frac{x}{7}+7=x^2+2x+1$

$x^2+\frac{13}{7}x-6=0$

$\cancel{x_1=\frac{-13+\sqrt{1345}}{14}}$ $\cancel{x_2=\frac{-13-\sqrt{1345}}{14}}$

21104542 (U800672 M1302639)

Черновик № 3 з. 4

НОК(abc) = 33

НОД = $3^{19} \cdot 11^{15}$

НОК = 33 НОД(pqr)

$p = 11^x$

$q = 11^v \cdot 3^u$

$r = 3^z$

$\begin{cases} \max(u\ z) \\ \max(x\ v) \end{cases}$

u	z
18	0
17	1
16	2
⋮	⋮
18	18
17	18
16	18
⋮	⋮
0	18.

37. вар.

x	v
14	0
14	14
0	14.

→ 29.

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times\ 37 \\ \hline 203 \\ 87 \\ \hline 1073 \\ \times\ 6 \\ \hline 6438 \end{array}$$

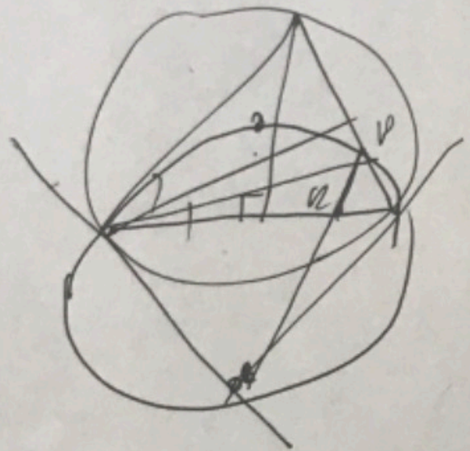
Черновик №4 из 4

№5

$\log_{\sqrt{29-x}} \frac{x}{7}+7$ $\log_{(x+1)^2}(29-x)$ $\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)$

$\log_a b$ $\log_c a$

$\frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\ln a}{\ln c}$ $\log_a b = \log_c a$



$$\begin{cases} НОД(abc) = 3^2 \\ НОК(abc) = 3^{19} \cdot 11^{15} \end{cases}$$

21104542 (U800672 M1302639)