Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104527**

ID профиля: **376282**

Вариант 24

ЧИСТОВИК лист №1 / из 4

Задача №1

Пусть d – разность этой арифметической прогрессии. Т.к. она возрастающая, то $d>0$. $a_1 \in \mathbb{Z}$, $a_2 = a_1 + d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \mathbb{Z}$.

$$S = \frac{2a_1 + d(9-1)}{2} \cdot 9 = 9(a_1 + 4d) = 9a_1 + 36d$$

$$a_5 a_{18} = (a_1 + 4d)(a_1 + 17d) = a_1^2 + 21da_1 + 68d^2 > S - 4$$

$$a_{10} a_{13} = (a_1 + 9d)(a_1 + 12d) = a_1^2 + 21a_1d + 108d^2 < S + 60$$

$$a_1^2 + 21a_1d + 68d^2 < S + 60 - 40d^2$$

Т.е. $S - 4 < a_1^2 + 21a_1d + 68d^2 < S + 60 - 40d^2 \Rightarrow$

$S - 4 < 60 - 40d^2 + S$

$40d^2 < 64$

Т.к. $d>0$, $d \in \mathbb{Z}$, то $d = 1$

При $d=1$ получили систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + 36 - 4, \\ a_1^2 + 21a_1 + 108 < 9a_1 + 36 + 60 \end{cases} \sim \begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \end{cases} \sim \begin{cases} (a_1+6)^2 > 0 \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} a \neq -6, \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \end{cases}$$

$$a_1^2 + \overset{4\cdot 3}{12}a_1 + 12 = 0$$

$$D = 4\cdot 4\cdot 9 - 4\cdot 4\cdot 3 = 4\cdot 4\cdot 6$$

$$a_{11} = \frac{-12 + 4\sqrt{6}}{2} = -6 + 2\sqrt{6}$$

$$a_{12} = -6 - 2\sqrt{6}$$

$-2 < -6 + 2\sqrt{6} < -1$

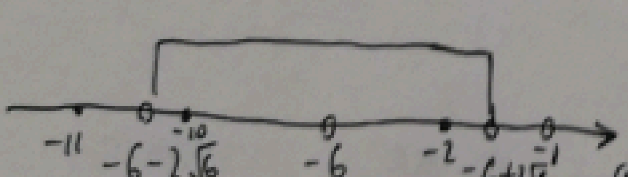
$4 < 2\sqrt{6} < 5$

$16 < 24 < 25$

$-11 < -6 - 2\sqrt{6} < -10$

$-5 < -2\sqrt{6} < -4$

$4 < 2\sqrt{6} < 5$



$$\begin{cases} a_1 \neq -6, \\ a_1 \in \mathbb{Z}, \\ a_1 \in (-6 - 2\sqrt{6}; -6 + 2\sqrt{6}) \end{cases} \sim a_1 \in \{-10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2\}$$

Т.е. мы переформулировали условие задачи через a_1 и d, получили единственное возможное значение $d=1$, решили при нём систему уравнений относительно a_1 с учётом всех ограничений. Значит, полученное множество значений a_1 и есть искомое.

Ответ: $a_1 \in \{-10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2\}$

ЧИСТОВИК лист №2/4

Задача №2

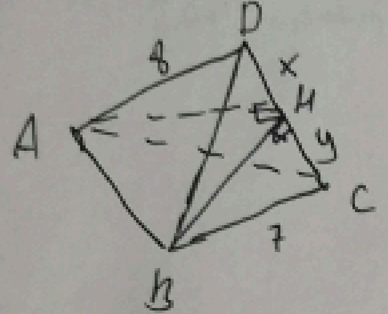
Пусть R - радиус цилиндра. Далее Т - тетраэдр, Ц - цилиндр

Все вершины Т. лежат на боковой поверхности Ц., CD параллельно оси Ц., значит, ребро CD полностью лежит на боковой поверхности.

Рассмотрим сечение цилиндра кругом, соответствующем $W(O)$, проходящем через A. Т.е. плоскость $\alpha \perp CD$, $W(O) \subset \alpha$,

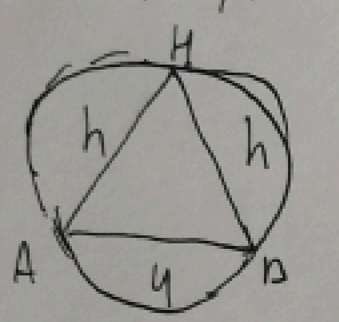
← прямая, а не отрезок

Пусть $\alpha \cap CD = H$, $A \in \alpha \Rightarrow AH \perp CD$. Пусть $DH = x$, $CH = y$.



$\triangle DAC = \triangle DBC$ по трём сторонам, поэтому BH - высота $\triangle BDC$ (делит DC в том же отношении, что и высота AH), $\Rightarrow AH = BH = h$, $B \in \alpha$

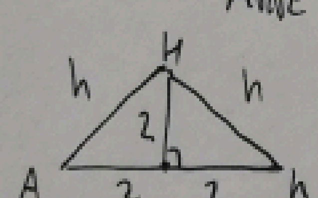
т $A, B, H \in W(O)$, R - радиус $W(O)$



, $h > 2$ из неравенства треугольника

AB - хорда $\Rightarrow AB \leq 2R \Rightarrow R \geq 2$, т.е. $R = 2$ - минимальный возможный радиус

Тогда

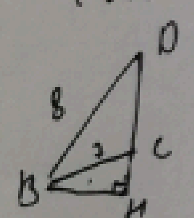


По т. Пифагора $h = 2\sqrt{2}$

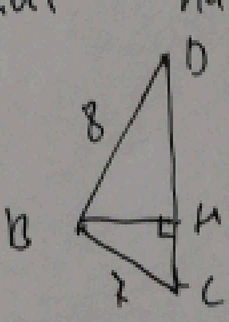
Из $\triangle BDH$ по Т Пифагора $x^2 + 8 = 64$ $x = \sqrt{56}$

Из $\triangle BHC$ по т Пифагора $y^2 + 8 = 49$ $y = \sqrt{41}$

Т.к. т H не обязательно лежит на ребре CD, то возможны 2 случая



$DC = x - y = \sqrt{56} - \sqrt{41}$



$DC = x + y = \sqrt{56} + \sqrt{41}$

В обоих случаях выполняется неравенство треугольника.

Ответ: $\sqrt{56} - \sqrt{41}$ или $\sqrt{56} + \sqrt{41}$

ЧИСТОВИК лист №3/4

Задача №3

Найдём все возможные значения ~~а~~ пар (a, b).

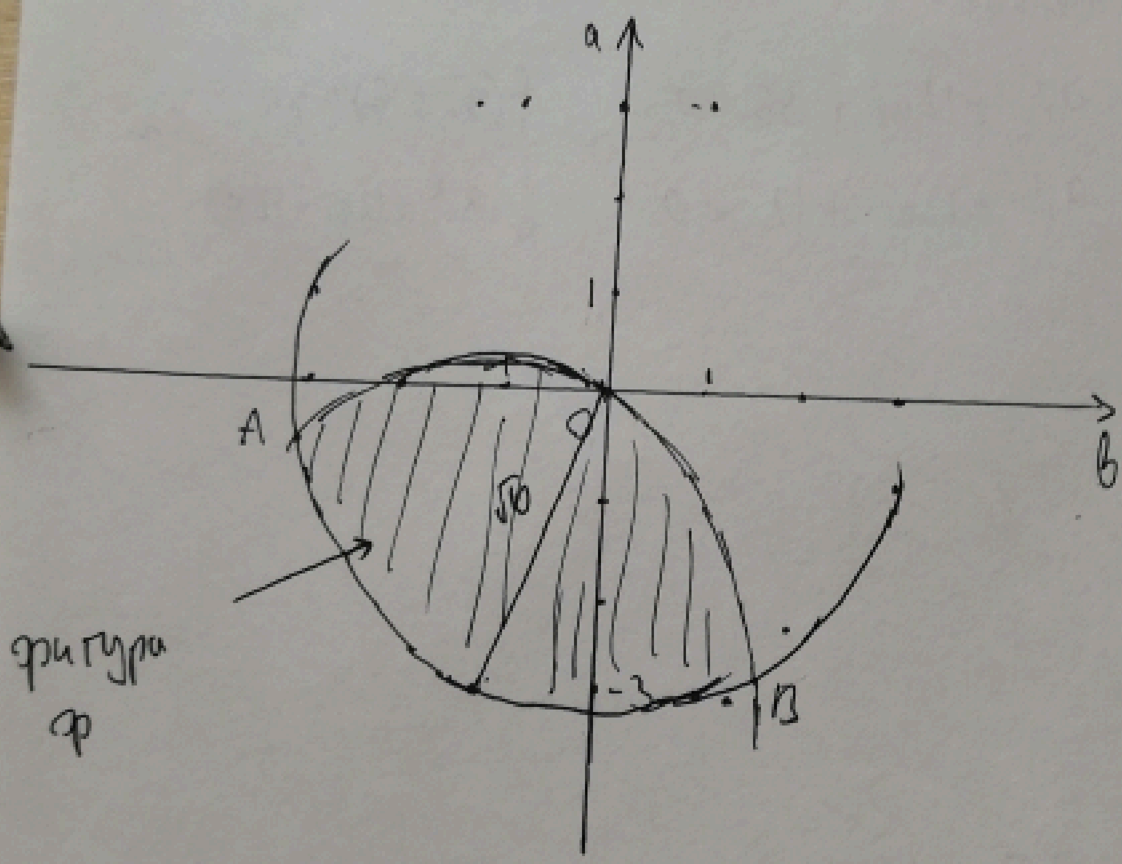
$a^2+b^2 \leq \min(-6a-2b, 10) \sim \begin{cases} a^2+b^2 \leq 10, \\ a^2+b^2 \leq -6a-2b \end{cases}$ (*) т.к. одно из неравенств выполняется автоматически

$a^2+b^2+6a+2b+9+1 \leq 10$

$(a+3)^2+(b+1)^2 \leq 10$ Данное неравенство задаёт круг радиуса $\sqrt{10}$ с центром в т $(-3;-1)$ в координатах aOb.

$a^2+b^2 \leq 10$ задаёт круг радиуса $\sqrt{10}$ с центром в т$(0;0)$ в тех же координатах

Найдём решения системы (*) графическим способом:



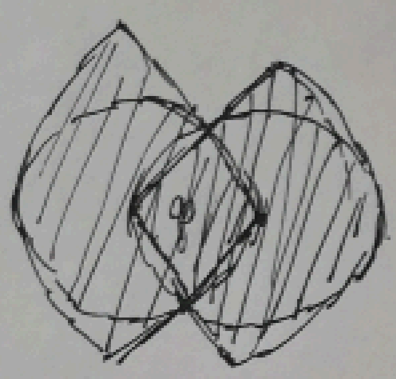
Назовём пары (a, b) удовл. 2 ур. в исходной системе в условии фигурой Ф.

Неравенство $(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 10$ задаёт круг с центром (a, b), принадлежащим Ф и радиусом $\sqrt{10}$

В связи с выбором осей для графика выше, поменяем оси Ox и Oy в декартовой системе координат

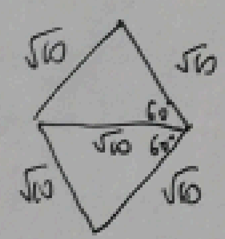
Т.е. фигура М - есть множество точек, на расстоянии не более $\sqrt{10}$ от всех точек фигуры Ф. Это будет объединение двух секторов круга радиуса $2\sqrt{10}$, потому что фигура Ф есть объединение двух окр, радиусов $\sqrt{10}$, таких, что центр каждой лежит на другой окружности, поэтому мы можем взять окружности, образующие Ф и рассмотреть окр. с радиусами в 2 раза больше, но с прежними центрами.

Тогда фигура M выглядит следующим образом:



Её площадь равна удвоенной площади сектора с углом 120° круга радиуса $2\sqrt{10}$ минус площадь ромба со стороной $\sqrt{10}$

$$S = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 40\pi - \frac{1}{2}\sqrt{10}\cdot\sqrt{30} = \frac{80}{3}\pi - 5\sqrt{3}$$



Ответ: $\frac{80\pi}{3} - 5\sqrt{3}$

ЧЕРНОВИК

№1

24

$S = \frac{2a_1 + d(8-1)}{2} \cdot 9 = 9a_1 + 36d$

$a_i \in \mathbb{Z}$

$a_1, d,$ $\quad a_1, d \in \mathbb{Z} \quad d \in \mathbb{N}$

$a_5 \cdot a_{18} = (a_1 + 4d)(a_1 + 17d) = a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 > 9a_1 + 36d - 4$

$a_{10} \cdot a_{13} = (a_1 + 9d)(a_1 + 12d) = a_1^2 + 21a_1 d + 108d^2 < 9a_1 + 36d + 60$

$a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 < 9a_1 + 36d + 60 - 40d^2$

$-4 < 60 - 40d^2$

$40d^2 < 64$

$10d^2 <$

$\boxed{d = 1}$

$a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + 32$

$a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0$

$(a_1 + 6)^2 > 0 \qquad a_1 \neq -6$

$a_1^2 + 21a_1 + 108 < 9a_1 + \overbrace{36 + 60}^{96}$

$a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$

$D = 4 \cdot 4 \cdot 9 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 4 \cdot 4 \cdot 6$

$a_1 = \frac{-12 \pm 4\sqrt{6}}{2} = -6 \pm 2\sqrt{6}$

$-6-2\sqrt{6} \quad 6 \quad -6+2\sqrt{6}$

$\boxed{-2, -3, -4, -5, -7, -8, -9, -10}$

$\sqrt{6} \approx 2{,}5$

$2\sqrt{6} < 5$

$24 < 5$

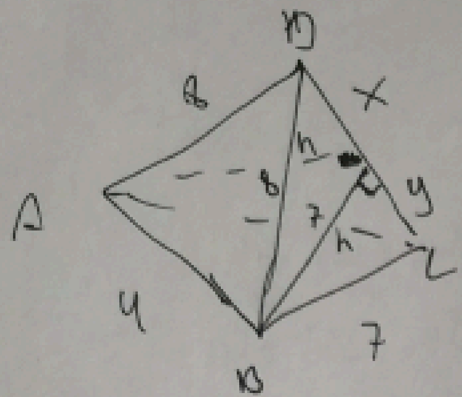
$6 - 2\sqrt{6} < 1$

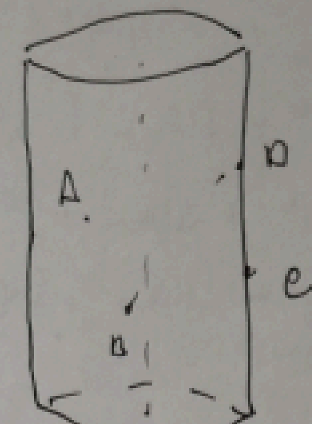
$-2\sqrt{6} < -5$

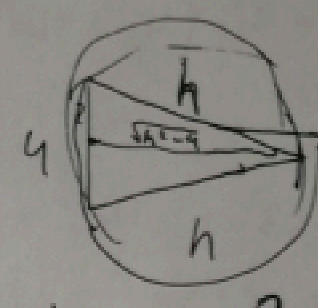
$2\sqrt{6} > 5$

Черновик

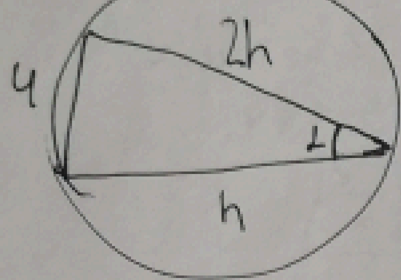
№2







min r ?



$(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$h = 4$?

$h > 2$

$\frac{4}{\sin\alpha} = R$

2

$r \to 0$

$(2+h)r = 2\sqrt{h^2-4}$

$(h+2)^2 r^2 = 4(h-2)(h+2)$

$(h+2) r^2 = 4(h-2)$

$16 = 2h^2 - 2h^2\cos\alpha$

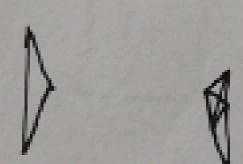
$8 = h^2 - h^2\cos\alpha$

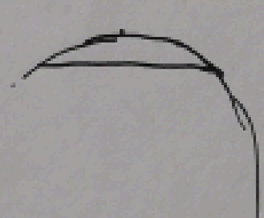
$h^2\cos\alpha = h^2 - 8$

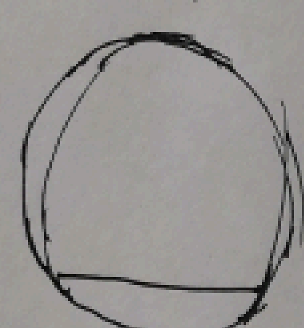
$r^2 = \frac{4(h+2)-16}{h+2} = 4 - \frac{16}{h+2}$

$r = 2\sqrt{\frac{h-2}{h+2}}$

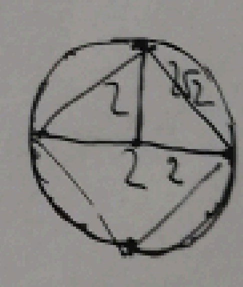
$r' = 2\sqrt{\frac{h+2}{h-2}} \cdot \frac{h+2-h+2}{(h+2)^2}$







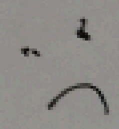
$\sqrt{h^2-4} = 2$



$R = 2$

$h^2 = 8$

$h = 2\sqrt{2}$



$\frac{abc}{4R} = \frac{h^2 \cdot 4}{R} =$

$h+2 = h-2$

$2 \cdot 2 =$

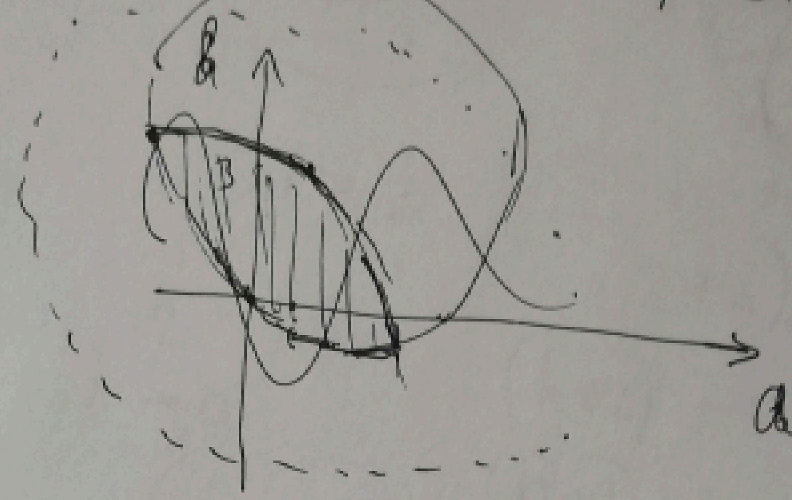
$56 = 7 \cdot 8$

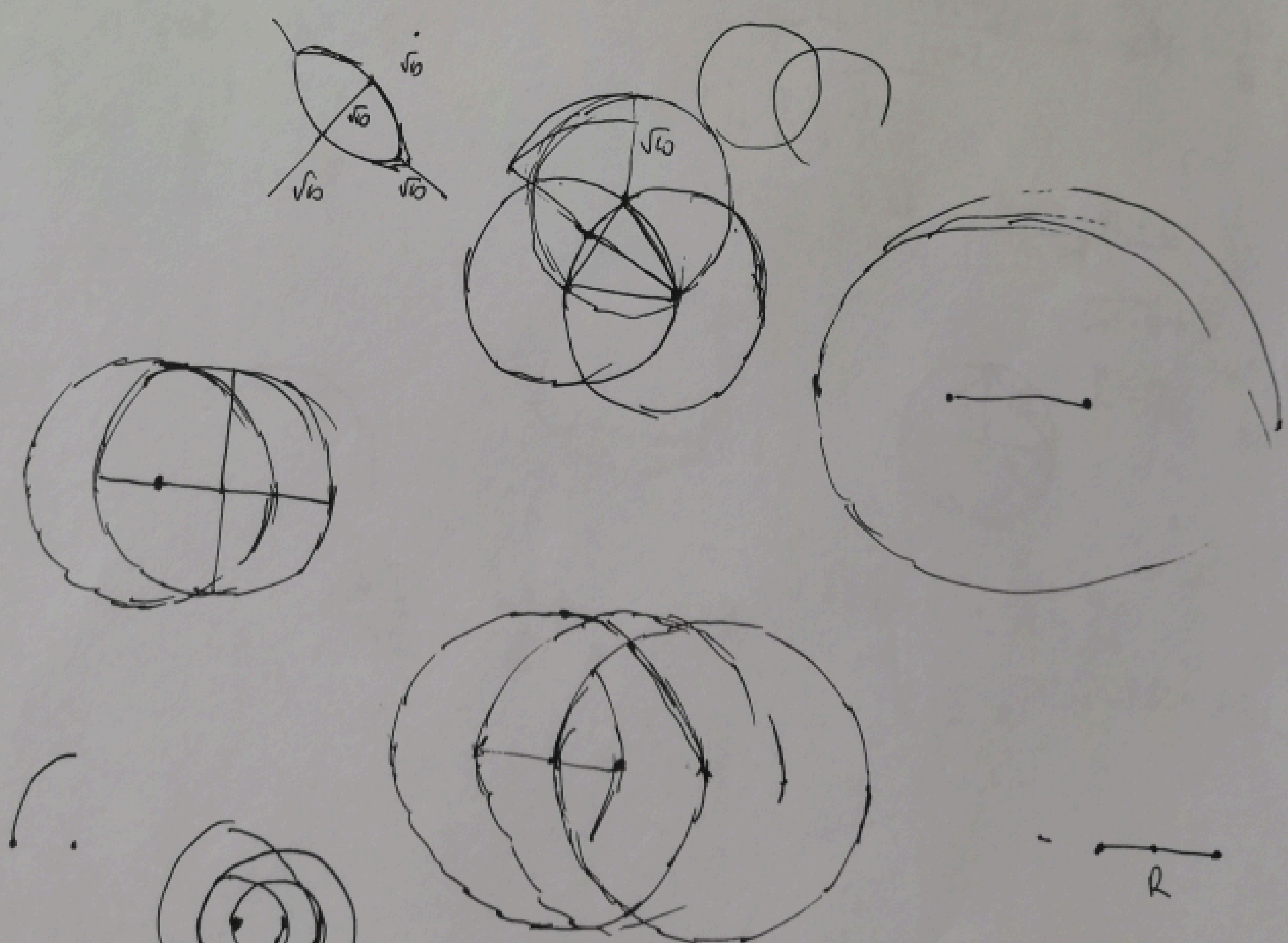
Черновик

№ 3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10, \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b,\ 10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le -6a-2b, \\ a^2+b^2 \le 10 \end{cases} \sim \quad \begin{aligned} &a^2+6a+b^2+2b+9+1 \le 10 \\ &(a+3)^2+(b+1)^2 \le 10 \end{aligned}$$



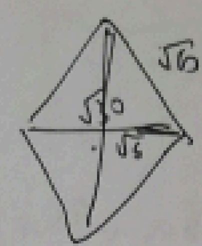


Черновик

$S = F(a) - F(b)$

$10 - \frac{10}{4} = \frac{30}{4}$

$f(x) = \sqrt{10 - x^2}$

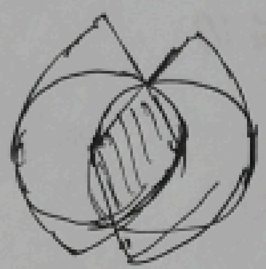


$\frac{1}{2}\sqrt{10}$

$\frac{\sqrt{30}}{2}$

$\frac{3}{4}$

$\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$

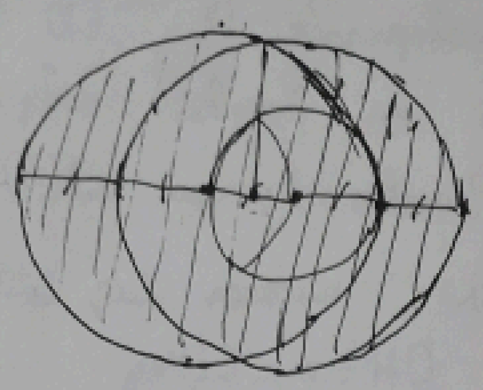


$\sqrt{10}$

~~ЧИСТОВИК лист 4~~

ЧЕРНОВИК

Тогда требуется найти площадь следующей фигуры М:



2 круга радиусов $2\sqrt{10}$, частично перекрывающие друг друга

Площадь одного круга равна 40π

Площадь двух целых кругов равна 80π

Площадь их общей части равна $\frac{3}{4} \cdot 40\pi = 30\pi$

Тогда площадь фигуры М равна 50π

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104527**

ID профиля: **376282**

Вариант 24

ЧИСТОВИК лист №1 из 3

Задача №4

$a = 3^{\alpha_1} \cdot 11^{\alpha_2}$

$b = 3^{\beta_1} \cdot 11^{\beta_2}$ $\qquad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2; \beta_2; \gamma_2 \in N$

$c = 3^{\gamma_1} \cdot 11^{\gamma_2}$

НОД $(a; b; c) = 33 = 3^1 \cdot 11^1$, значит, какое-то из чисел в группах $\alpha_1; \beta_1; \gamma_1$ и $\alpha_2; \beta_2; \gamma_2$ равно 1 и все они хотя бы 1

НОК $(a; b; c) = 3^{19} \cdot 11^{15}$, значит, какое-то из чисел в группах $\alpha_1; \beta_1; \gamma_1$ и $\alpha_2; \beta_2; \gamma_2$ равно 19 и 15 соответсвенно и все они не более 19 и 15 соотв.

Сразу отмечу, что вхождение 3 и 11 в каких-то степенях в числах a, b, c независимы, поэтому будет использоваться правило умножения. (кроме случая равенства чисел)

~~Рассмотрим вхождения степени 3 в числа a, b, c:~~

~~• Все степени $\alpha_1; \beta_1; \gamma_1$ разные, тогда~~

У каждого числа из a, b, c есть 2 соответсвующих значения: степень вхождения 3 и степень вхождения 11. Степени вхождения 3 это $1; n \in [1; 19]; 19$, 11 это $1, k \in [1; 15]; 15$. $n, k \in N$

Все три числа не могут быть равны. 2 числа равны, когда им соответсвуют одинаковые степени 3 и 11

Рассмотрим случаи:

• $n \in [2; 18]$ $(3 \cdot 2 \cdot 17$ способов$)$ - выбор места числа из a, b, c для n (3 способа), для 19 (2 способа) и значения n (17 способов)

- $k \in [2; 14]$ $3 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 13$ - аналогично

- $k = 1$, $k = 15$ $3 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 2$ - выбор места для отличающегося числа и его значения

• $n = 1$, $n = 19$

- $k \in [2; 14]$ $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 13$ - аналогично

- $k = 1$, $k = 15$ $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ - выбор мест для отличающихся чисел (по 3 способа) и их значений (по 2 способа)

Сложим полученные значения $3K$ $6^2 \cdot 17 \cdot 13 + 6^2 \cdot 17 + 6^2 \cdot 13 + 6^2 = 6^2(221 + 30 + 1) =$
$= 36 \cdot 252 = 9072$

Ответ: 9072

ЧИСТОВИК лист №2/3

Задача №5

Пусть $a = \sqrt{\frac{x}{7}+7}$, $b = \sqrt{29-x}$, $c = (-x-1)$

$x_1 = 2\log_c a$, $y = \log_{c^2} b^2 = \log_c b$, $z = \log_a c$ (здесь x другой)

Заметим, что $yz = \frac{2}{x_1}$

Имеем 3 случая:

1) $y = z = x_1 - 1$

$z^2 = \frac{2}{z+1}$

$y = z = 1$ - единств. корень (т.к. ~~гипербола~~ ~~и парабола~~)

$z^3 + z^2 - 2 = 0$

$(z-1)(z^2+2z+2) = 0$

$z = 1$ или $z^2 + 2z + 2 = 0$

$D = 4 - 8 = -4 < 0$

$\log_a c = 1$

2) $x_1 = y = z - 1$ $z = x + 1$

$x_1^2 z = 2$

$x_1^2 (x+1) = 2$

Аналогично, $y = x = 1$ единств. корень

3) $x_1 = z = y - 1$

$x_1^2 (x_1+1) = 2$

Аналогично, $x_1 = z = 1$ - единств. корень

Если $z = 1$, то $a = c$ $x_1 = 1$ или $y = 1$. Эти случаи рассмотрены ниже.

$\cancel{\frac{x}{7} + 7 = x^2 + 2x + 1}$

$\cancel{7x^2 + 13x - 42 = 0}$

$\cancel{D = 169 + 1176 = 1345}$

Если $y = 1$, то $b = c$

$29 - x = x^2 + 2x + 1$

$x^2 + 3x - 28 = 0$

$(x+7)(x-4) = 0$

$x = 4$ не уд $-x-1 > 0$

$x = -7$

ЧИСТОВИК лист 3/3

Если $x=1$, то $a=b$

$$\frac{x}{7}+7=29-x$$

$$x+49=203-7x$$

$$8x=154$$

$$4x=77$$

$x=\frac{77}{4}$ не уд. $-x-1>0$

Проверим подходящий корень $x=-7$

$a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{36}=6$ $c=6$

Тогда данные числа есть $\log_6 6 = 1$, $\log_{6^2} 6^2 = 1$, $\log_{\sqrt{6}} 6 = 2$

Условие выполняется, значит, $x=-7$ – единственный ответ.

Ответ: $x=-7$

черновик

$\sqrt{\frac{x}{7}+7}=a$

$\sqrt{29-x}=b$

$(-x+1)=c$

$a,b,c>0$

$29-x>0 \quad x<29$

$x+1<0 \quad -49<x<-1$

$x\in$ ...

$a_{max}=\sqrt{7-\frac{1}{2}}=$

$b_{max}=\sqrt{28}$

$b_{min}=\sqrt{30}$

$b>a$

$\log_b a^2, \quad \log_{c^4} b^2, \quad \log_a c$

$\log_b a^2 \quad \log_c^4 b, \quad \log_a c$

$\log_b a^2=\log_c b=\log\frac{1}{\log_b c}$

$\log_b a^4 \quad \frac{1}{\log_b c} \quad \frac{\log_b c}{\log_b a}$

$c_{max}=+48$

$\sqrt{30}$

$\frac{48}{7}$

$0<a<\sqrt{\frac{48}{7}} \quad \approx 7$

$\frac{+29}{49}$ 78

30

$\frac{48^2}{49}$

$1<\sqrt{30}<b<\sqrt{78} \approx 8,5$

$5,5\approx$

$0<c<48$

$a=1$ при $x=-42$

~~$b=1$ при $x=28$~~

$c=1$ при $x=-2$

$\log_a c$

$b>1$

$\log_a c\cdot\log_c b=$

$=\log_a b$

при $x\in(-1;-2)$

$a>1$

$c<1$

$\log_a c<0$

$\log_c b<0$

$\log_b a^2>0$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$b>c$

$b>1>c$

$\log_a c=\log_c b$

$\frac{1}{\log_c a}=\log_c b$

$x\cdot y=\frac{z}{}$

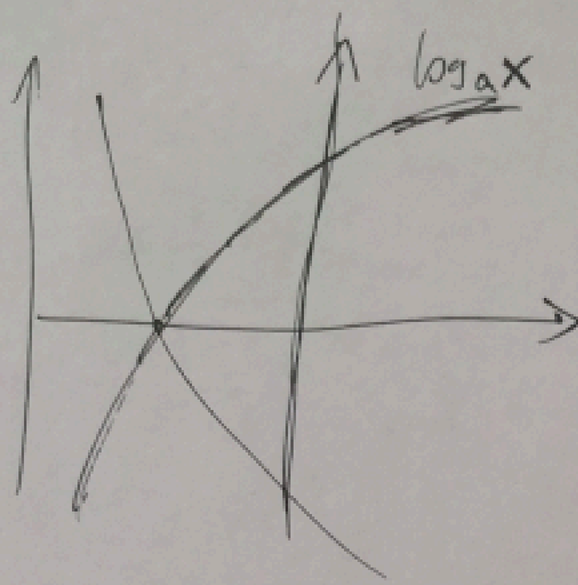
$x=y=z-1$

при $x\in(-2;-42)$

$\log$

Черновик

1.



$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)-1=$

$=\log_{\sqrt{29-x}}\left(\left(\frac{x}{7}+7\right):\sqrt{29-x}\right)$

$\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$-2<x<-1$

$>>$

$29-x$ $\qquad$ $\frac{x}{7}+7$ $\qquad$ x^2+2x+1

$x<29$ $\qquad$ $x>-49$ $\qquad$ $x<-1$

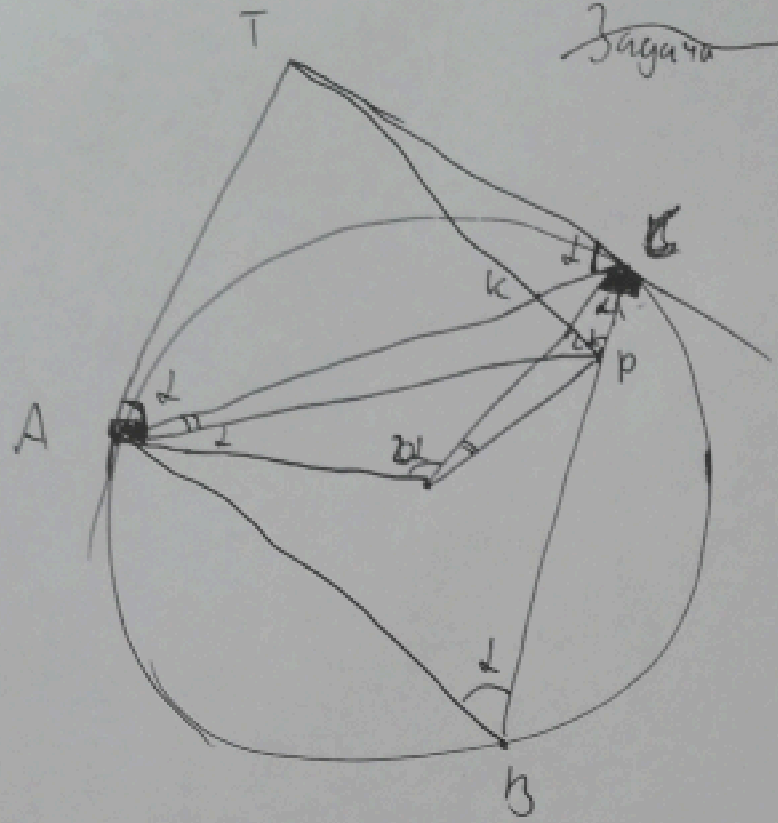
$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{(x+1)^2}(29-x)=$ $\qquad$ $-49<x<-1$

$=$ $\qquad$ $=\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}\left(\frac{-x-1}{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}\right)$

~~чистовик лист №~~ 4

~~Задача №6~~

черновик

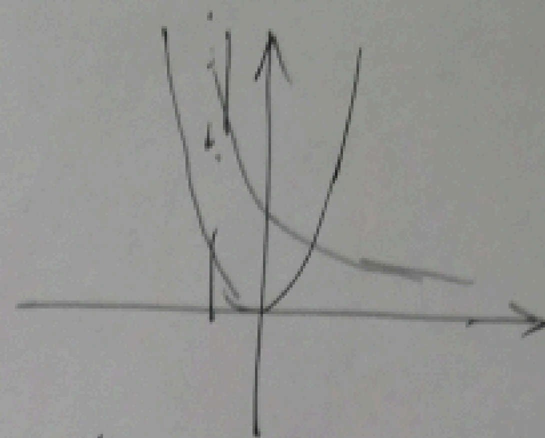


$$\begin{array}{r} {}^{3\,1} \\ 252 \\ \times\ 36 \\ \hline 1512 \\ 756 \\ \hline 9072 \end{array}$$

черновик

$2\log_b a \quad \log_c b \quad \log_a c$

$\quad\ x \qquad\quad y \qquad\quad z$



$yz = \frac{2}{x}$

$y = z = x+1$

$z^2 = \frac{2}{x}$

$x + 49 = 7x^2 + 14x + 7$

$7x^2 + 13x - 42 = 0$

$D = 169 + 4 \cdot 42 \cdot 7$

$28 \cdot 42 = 56 \quad 112 \quad 1176$

$1176 + 169 = 1345$

$7 \cdot 49 - 7(7+6)$

$42 \cdot 28 = 336 \quad 84$

$1176 + 169 = 1345$

$29 \cdot 7 = 203$

$352 - 56$

2

30

$z^3 + z^2 - 2 \,|\, z - 1$

$z^3 - z^2 \qquad z^2 + 2z - 2$

$2z^2$

$2z^2 - 2z$

$13 \cdot 17 = 91 \quad 13 \quad 221$

$x\,yz = 2$

$t^2(t+1) = 2$

$t^3 + t^2 = 2$

$t = 1$

ЧЕРНОВИК

№4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c) = 33 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$$

a, b, c - разл.

$1, n, 19 \quad n \in [1;19]$

$1, k, 15 \quad k \in [1;15]$

2 совпадают

$a = b = 3\cdot 11 = 3\cdot 11$

$3^{19}\cdot 11^{15}$

$a = 3^{\alpha_1}\cdot 11^{\alpha_2}$ $\quad b = 3^{\beta_1}\cdot 11^{\beta_2}$ $\quad c = 3^{\gamma_1}\cdot 11^{\gamma_2}$

$\alpha_1 / \beta_1 / \gamma_1 = 1 \qquad \alpha_1 / \beta_1 / \gamma_1 = 19$

$\alpha_2 / \beta_2 / \gamma_2 = 1 \qquad \alpha_2 / \beta_2 / \gamma_2 = 15$

$1;\ \underbrace{1 \ldots 19}_{19} \cdot 19$ $\quad$ 19 вар.

15 вар.

$19\cdot 15$

$3 \quad 3 \quad 3^{19}$

План:

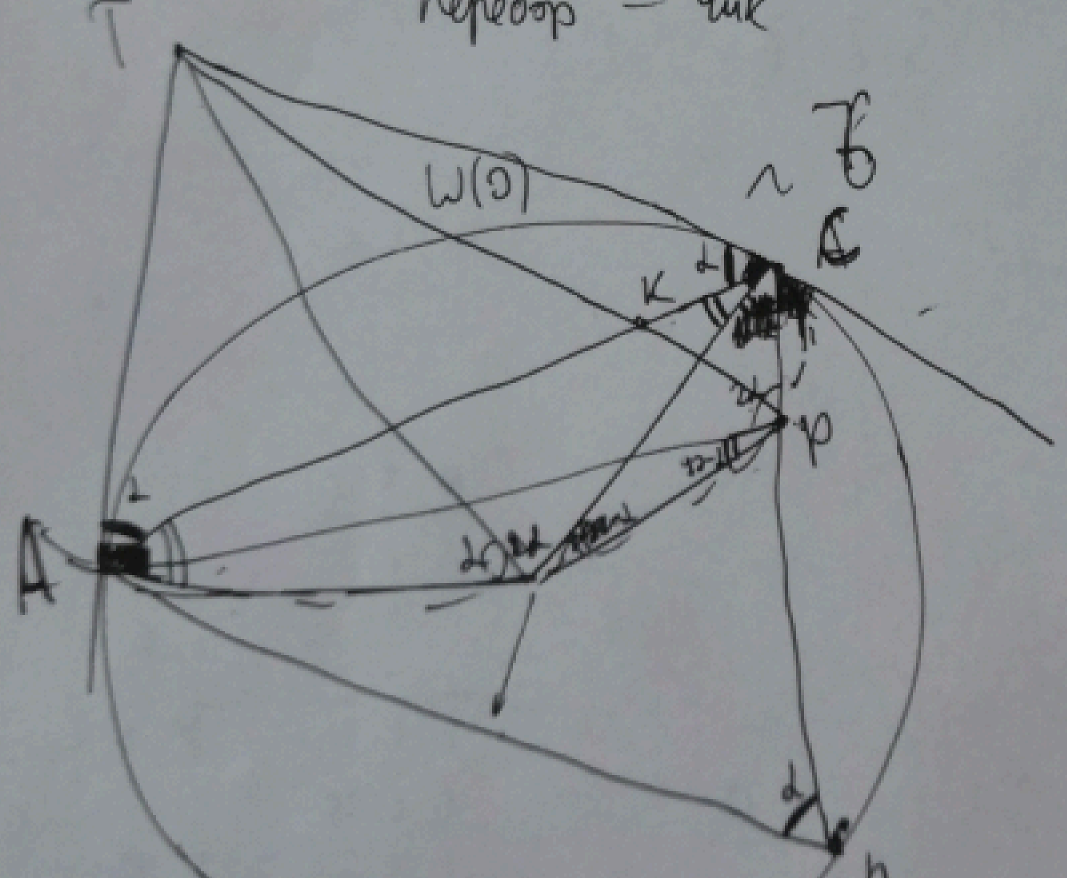
- $\approx 19\cdot 15$
- учесть повторы
- упорядоченность? ✓

№5

$a = \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $b = \log_{(x+1)^2}(29-x)$, $c = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

перебор - чик

№6



$S_{\triangle APK} = 16$

$S_{\triangle CPK} = 14$

$S_{\triangle ABC}$ - ?

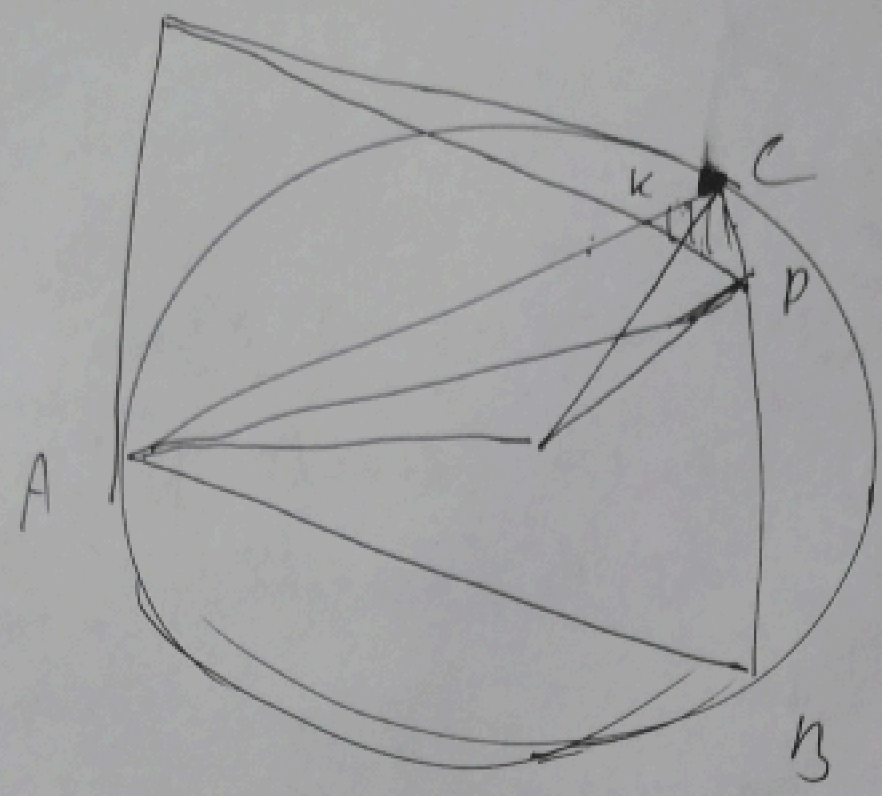
$\angle ACP = \alpha$

т.д. $\angle ACP = \alpha$

$\angle AOP = 90° + \alpha$

$\angle ACP = 90 - \alpha$

Черновик



$\frac{AK}{KC}$ ✓

$\underline{19}\ \underline{1}\ \underline{1}$

$\underline{19}\ \underline{1}\ \underline{1}$
1 1 15
1 15 1
15 1 1

$1,\ n,\ 19 \qquad n \in [1;19]$

$1,\ k,\ 15 \qquad k \in [1;15]$

Пусть $n \in [2;18]$ это $3 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 15$

Пусть $n = 1$ 3

$k \neq 1, 15 \qquad 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 15$

$k = 1 \qquad 3 \cdot 3$

$k = 15 \qquad 3 \cdot 3$

— — —

$9 \cdot 4$

Пусть $n = 19$

1 19 1   1 1 19   19 1 1
15   15 15   15   15   15

$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 15 + 18$

$3 \cdot 3 \cdot 2$

$\underline{1\ 1\ 19}$
1 15 1
15 1 1
1 1 15

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$

$\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}$
1 1 .

72

$3 \cdot \overset{6}{2 \cdot 2} \cdot \overset{6}{3 \cdot 2}$

— — —
1 1 19 .
1 1 15 .
1 15 1 .
15 ... .
15 15 1 .
15 1 1 .

$2 \cdot 4 \cdot 3$

4

$\times \begin{array}{r} 252 \\ 36 \\ \hline 1512 \\ 756 \\ \hline 8072 \end{array}$

$\times \begin{array}{r} 17 \\ 13 \\ \hline 51 \\ 17 \\ \hline 221 \end{array}$