Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104371**

ID профиля: **382383**

Вариант 24

Чистовик. Лист 1 Вариант 24.

Задача 1

$$\begin{cases} a_1, a_2, a_3 \dots \\ a_2 = a_1 + d \\ a_3 = a_1 + 2d \\ \vdots \\ a_n = a_1 + (n-1)d \end{cases}$$

$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 = 9a_1 + (1+2+3+\dots+8)d =$

$= 9a_1 + 36d$

$a_5 \cdot a_{18} = (a_1 + 4d)(a_1 + 17d) =$

$= a_1^2 + 21da_1 + 68d^2 > \underbrace{9a_1 + 36d}_{S} - 4$

$a_{10} \cdot a_{13} = (a_1 + 9d)(a_1 + 12d) = a_1^2 + 21da_1 + 108d^2 < 9a_1 + 36d + 60$

Домножим на -1 верхнее и сложим.

$a_1^2 + 21da_1 + 108d^2 - a_1^2 - 21da_1 - 68d^2 < 9a_1 + 36d + 60 - 9a_1 - 36d + 4$

$40d^2 < 64$

$10d^2 < 16$

$d^2 < 1,6$

$d = 1$ (т.к. $d > 0$ и $d \in \mathbb{Z}$)

$a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + 32 \Leftrightarrow a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \Leftrightarrow (a_1+6)^2 > 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{a_1 \neq -6}$

$a_1^2 + 21a_1 + 108 > 9a_1 + 36 + 60 \Leftrightarrow a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$

$D = 144 - 4 \cdot 12 = 4 \cdot 12(\cdot 2) = 84 = (4\sqrt{6})^2$

$a_1 = \frac{-12 \pm 4\sqrt{6}}{2} = -6 \pm 2\sqrt{6}$

$2\sqrt{6} > 4 \Leftrightarrow 4 \cdot 6 > 4 \cdot 4$

$2\sqrt{6} < 5 \Leftrightarrow \underset{24}{\underset{\parallel}{4 \cdot 6}} < 25$

$\Rightarrow a_1 \in (-6 - 2\sqrt{6}; -6 + 2\sqrt{6})$

$\Updownarrow$ $(a_1 \in \mathbb{Z})$

$a_1 = -10, -9, -8, \dots -2.$

Ответ: $a_1 \in [-10, -6) \cup (-6; -2]$, $a_1 \in \mathbb{Z}$.

Эти значение подходят, т.к. для них выполнены оба неравенства из условие.

21104371 (U382383 M1297493)

Лист 3 Вариант 24

Задача 3.

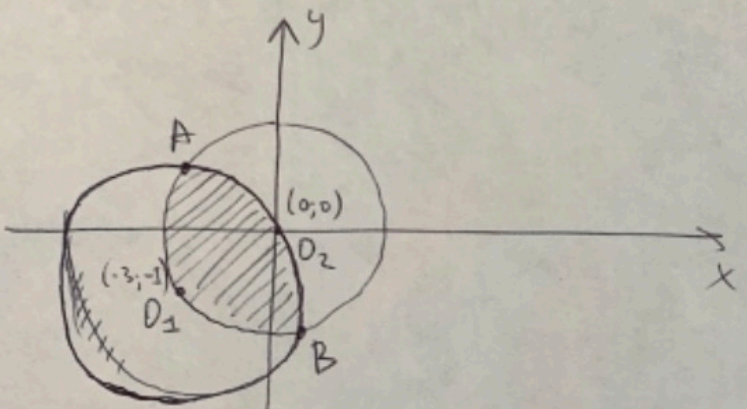
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 10\\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b,\ 10)\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 10\\ a^2+b^2+6a+2b \le 0 \Leftrightarrow (a+3)^2+(b+1)^2 \le 10\\ a^2+b^2 \le 10\end{cases}$$

центр $(-3;-1)$ (в координатах $(a;b)$)

центр $(0;0)$

окружности радиусом $\sqrt{10}$

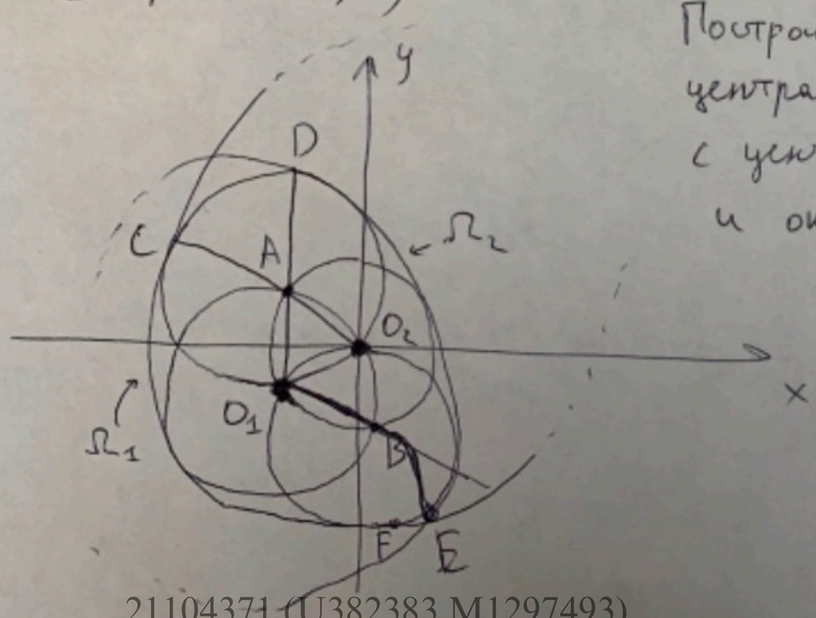


A и B – точки пересечения окружностей.

O_1, O_2 – центры окр-тей.

ГМТ (геометрическое место точек) a, b.

ГМТ $(x;y)$ – объединение окружностей радиуса $\sqrt{10}$ с центрами $(a;b)$



Построим окр-ти радиуса $\sqrt{10}$ с центрами в A и B и окружности с центрами в O_1, O_2 и окружности с центрами в O_1, O_2 радиуса $2\sqrt{10}$ (Ω_1 и Ω_2)

Такие фигуры — дуги CD, DE, EF и FC

Площадь:

$$S = (S_{\text{сектора } O_1DE} + S_{\text{сектора } O_2CF}) - S_{O_1AO_2B} + (S_{\text{сектора } ACD} + S_{\text{сектора } BFE}) = 2 \cdot \frac{\pi (2\sqrt{10})^2}{3} - \sqrt{10} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{10}\right) + \frac{2 \cdot \pi (\sqrt{10})^2}{6} =$$

треть окр. радиуса $2\sqrt{10}$

ромб с высотой $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{10}$

$\frac{1}{6}$ окр. радиуса $\sqrt{10}$

$= 30\pi - 5\sqrt{3}$

Ответ: $S = 30\pi - 5\sqrt{3}$

Лист 4

Задача 3 (продолжение)

Чистовик

21104371 (U382383 M1297493)

S – сумма первых 9 членов возрастающей арифм. прогрессии. $a_1, a_2, a_3 \ldots \in \mathbb{Z}$

$a_5 a_{16} > S-4$, $a_{10} \cdot a_{13} < S+60$

$a_1 - ?$

$S_9 = \frac{a_{10} \cdot a_9}{2} =$

$= \frac{(a_1+9d)(a_1+8d)}{2} = \frac{a_1^2+17a_1d+72d^2}{2}$

$(a_1+4d)(a_1+17d) = a_1^2+21a_1d+68d^2 > \frac{a_1^2+17a_1d+72d^2-8}{2}$

$2a_1^2+42a_1d+136d^2 > a_1^2+17a_1d+72d^2-8$

$a_1^2+25a_1d+64d^2 > -8$

$(a_1+9d)(a_1+12d) = a_1^2+21a_1d+108d^2 < \frac{a_1^2+17a_1d+72d^2}{2}+60$

$2a_1^2+42a_1d+216d^2 < a_1^2+17a_1d+72d^2+120$

$a_1^2+25a_1d+144d^2 < 120$

$S_9 = 9a_1 + (1+2+3+4+5+6+7+8)d = 9a_1 + \underset{9\cdot 4}{36d}$

$a_5 \cdot a_{14} = a_1^2+21a_1d+68d^2 > 9a_1+36d-4$ (1)

$a_{10} \cdot a_{13} = a_1^2+21a_1d+108d^2 < 9a_1+36d+60$ (2)

(2)–(1) $d=1$

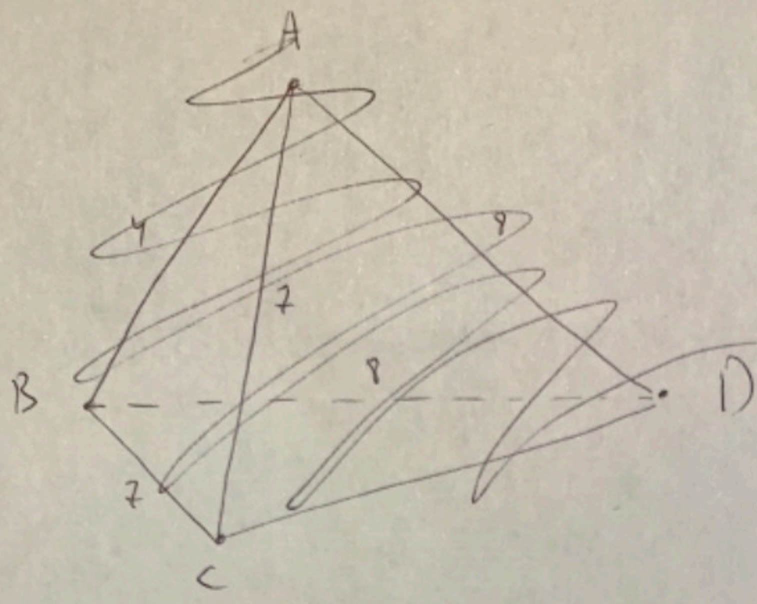
$\therefore \ldots$

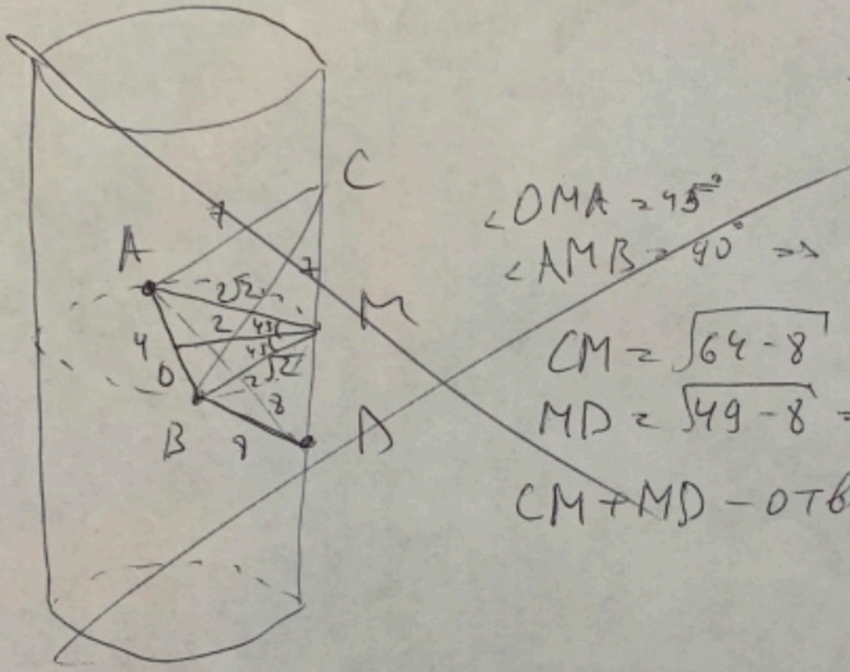
Ответ

Черновик

21104371 (U382383 M1297493)

№2.





$\angle OMA = 45°$

$\angle AMB = 90°$ => AB - диаметр.

$CM = \sqrt{64-8} = \sqrt{56}$

$MD = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$

CM+MD - ответ.

Черновик

№3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b;\ 10) \end{cases}$$

"$\min(-6a-2b;\ 10)$ — минимальное из двух"

a, b — вещественные

S_M — ?

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b;\ 10) \end{cases}$$

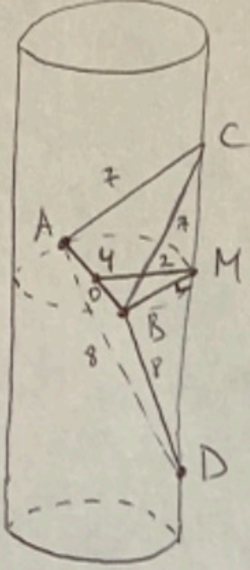
$$\begin{cases} x^2-2xa+a^2+y^2-2yb+b^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b;\ 10) \end{cases}$$

Черновик

21104371 (U382383 M1297493)

Чистовик　　　　Лист 2　　　　Вариант 24

Задача 2



Докажем, что $AB \perp CD$, откуда будет следовать, что AB лежит в перпендикулярном сечении (в окружности).

C и D равноудалены от A и B $\Rightarrow$ отрезок CD лежит в "серединной перпендикулярной плоскости" к AB. Отсюда $AB \perp CD$ и, т.к. AB – хорда окружности сечения, $r \geq \frac{AB}{2} = 2$.

Рассмотрим, когда $r = 2$.

Рассмотрим $\triangle CAM$:

$AC = 8$, $MA = 2\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $MC = \sqrt{64-8} = 2\sqrt{14}$

По тем же соображениям из $\triangle ADM$:

$DM = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$

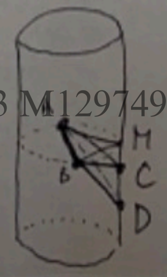
Ответ: $2\sqrt{14} \pm \sqrt{41}$

M – точка пересечения плоскости, содержащей точки A и B, и прямой CD.

$MA = 2\sqrt{2}$, т.к. D и C равноудалены от A и B $\Rightarrow$ вся прямая DC равноудалена от A и B $\Rightarrow$ треугольник AMB равнобедренный. AB – диаметр $\Rightarrow \angle AMB = 90^\circ \rightarrow$ $\angle OMA = 45^\circ$. $OM = OA \rightarrow \angle OAM = 45^\circ \Rightarrow \angle AOM = 90^\circ \rightarrow$ по Th. Пифагора $AM^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow AM = 2\sqrt{2}$

$2\sqrt{14} > \sqrt{41} \Leftrightarrow \underset{\substack{\parallel \\ 56}}{4 \cdot 14} > 41$

В ответе знак "минус" заменяет "плюс", когда точки C и D лежат по одну сторону от плоскости, содержащей точки A и B:



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104371**

ID профиля: **382383**

Вариант 24

Чистовик. Лист 1 Вариант 24.

Задача 4.

$$\begin{cases} (a;b;c) = 33 \\ [a;b;c] = 3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3^{a_1}\cdot 11^{a_2} \\ b = 3^{b_1}\cdot 11^{b_2} \\ c = 3^{c_1}\cdot 11^{c_2} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \min(a_1, b_1, c_1) = 1 \quad \text{и} \quad \min(a_2, b_2, c_2) = 1 \\ \max(a_1, b_1, c_1) = 19 \quad \text{и} \quad \max(a_2, b_2, c_2) = 15 \end{cases}$$

Лемма: Кол-во троек чисел, у которых $\min = 1$, $\max = N$, равно $\underbrace{3\cdot 2\cdot (N-2)}_{} + \underbrace{3}_{} + \underbrace{3}_{} = 6N - 12 + 6 = 6N - 6$

кол-во троек, где все числа различны (выбрать какое число $= 1$, какое N и значение от 2 до $N-1$ для оставшихся)

кол-во троек, где две 1

кол-во троек, где два N.

Ответ: $(6\cdot 19 - 6)(6\cdot 15 - 6) = 6(18+4) = 6\cdot 32 = \underline{192}$

21104371 (U382383 M1297494)

Чистовик Лист 2 Вариант 24

Задача 5

$a = \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$b = \log_{(x+1)^2}(29-x) = \frac{1}{2}\log_{(-1-x)}(29-x)$

$c = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = 2\log_{(\frac{x}{7}+7)}(-x-1)$

$abc = 2\frac{\ln(\frac{x}{7}+7)}{\ln(29-x)} \cdot \frac{\ln(29-x)}{2\ln(-x-1)} \cdot 2\frac{\ln(-x-1)}{\ln(\frac{x}{7}+7)} = 2$

Пусть два из них $= y$, а третий равен $y+1$ =>

$y^2(y+1) = 2$

$y^3 + y^2 - 2 = 0$

$(y-1)(\underbrace{y^2+2y+2}_{\neq 0}) = 0 \Rightarrow y = 1$

1) Если $a = y = 1$: $\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow 29 - x = \left(\frac{x}{7}+7\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 29 - x = \frac{x^2}{49} + 49 + 2x \Rightarrow \frac{x^2}{49} + 3x + 20 = 0 \Rightarrow$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - \frac{80}{49}}}{2/49} = \frac{-3\cdot 49 \pm 7\sqrt{9\cdot 49 - 80}}{2} = \frac{-147 \pm 7\sqrt{441-80}}{2} =$

$= \frac{-147 \pm 7\sqrt{361}}{2} = \frac{-147 \pm 7\cdot 19}{2} = \frac{-147 \pm 133}{2} = \left[\begin{array}{l} -7 \\ -140 \end{array}\right.$

2) Если $b = y = 1$: $\log_{(-1-x)}(29-x) = 2 \Rightarrow (x+1)^2 = 29 - x \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 29 - x \Rightarrow x^2 + 3x - 28 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4\cdot 28}}{2} = \frac{-3 \pm 11}{2} =$

$= \left[\begin{array}{l} -7 \\ 4 \end{array}\right.$

Продолжение на след. листе.

21104371 (U382383 M1297494)

Чистовик Лист 3 Вариант: 24

Задача 5 (продолжение)

3) Если $c = y = 1$: $\log_{(\frac{x}{7}+7)}(-x-1) = \frac{1}{2} \Rightarrow (x+1)^2 = \frac{x}{7} + 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = \frac{x}{7} + 7 \Rightarrow x^2 + \frac{13}{7}x - 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-\frac{13}{7} \pm \sqrt{\frac{169}{49} + 24}}{2} = \dfrac{-13 \pm \sqrt{169 + 1176}}{14} = \dfrac{-13 \pm \sqrt{1345}}{14} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = b$, $c = y + 1 = 2$

$\uparrow$

при $x = -7$

Проверим, что $c = 2$ в $x = -7$

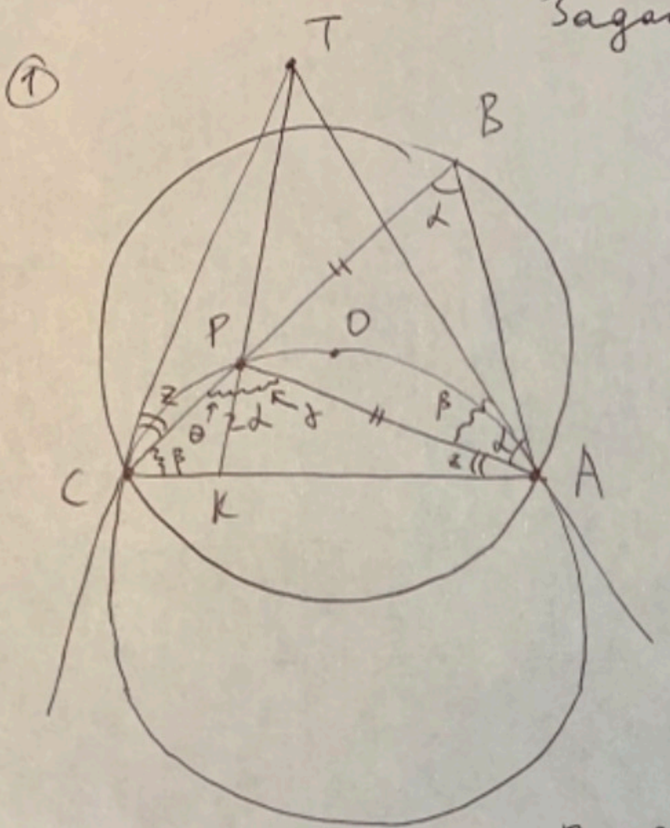
$c = 2\log_{(\frac{x}{7}+7)}(-x-1) = 2\log_6 6 = 2 \Rightarrow$

Ответ: $x = -7$.

21104371 (U382383 M1297494)

Черновик   Лист 4   Вариант 24

Задача 6.



Заметим, что если найдем $\frac{CP}{PA}$, то все получим. Действительно: $\angle PAB = \alpha$ (т.к. $\angle CPA = 2\alpha$)

Тогда $S_{ABC} = \frac{CP+PA}{CP}\cdot \underbrace{30}_{=14+16}$

Найдем $\frac{PC}{PA}$:

$$\frac{PC}{PA} = \frac{\overbrace{\sin\angle PAK}^{=z}}{\underbrace{\sin\angle PCK}_{=\beta}}$$

В $\triangle CPT$ и $\triangle APT$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{SP}{\sin z} = \frac{SC}{\sin\theta} \\ \frac{SP}{\sin\beta} = \frac{SA}{\sin\gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sin z}{\sin\beta} = \frac{\sin\theta}{\sin\gamma}$$

Отсюда $\frac{CP}{PA} = \frac{\sin\theta}{\sin\gamma}$

$$\frac{CP}{PA} = \frac{14}{16}\,\frac{PA}{CP}$$

но $\frac{\overbrace{\frac{1}{2}CP\cdot\sin\theta\cdot PK}^{=S_1}}{\underbrace{\frac{1}{2}PA\cdot\sin\gamma\cdot PK}_{=S_2}} = \frac{14}{16}$

$$\left(\frac{CP}{PA}\right)^2 = \frac{14}{16} \Rightarrow \frac{CP}{PA} = \sqrt{\frac{7}{8}}$$

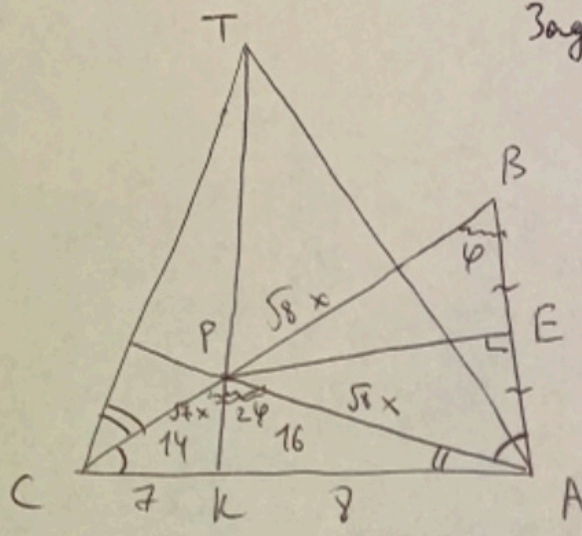
$$\frac{\sin\theta}{\sin\gamma} = \frac{PA}{CP}\cdot\frac{14}{16}$$

Ответ: $S_{ABC} = 30 + \frac{PA}{CP}\cdot 30 = 30 + \sqrt{\frac{8}{7}}\cdot 30$

21104371 (U382383 M1297494)

Задача 6 (продолжение)

②



$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{5}$

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

$\operatorname{tg}^2\varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2\varphi}$

$\frac{9}{25} + 1 = \frac{1}{\cos^2\varphi}$

$\cos^2\varphi = \frac{25}{34}$

$\sin^2\varphi = \frac{9}{34}$

$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 =$

$= \frac{25}{17} - 1 = \frac{8}{17}$

$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$

обозначим $PC = \sqrt{7}x$, $PA = \sqrt{8}x$

$PE = \sqrt{8}x \cdot \sin\varphi$

$BE = \sqrt{8}x \cdot \cos\varphi$

$S_{PBA} = 8x^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}} \cdot 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = \frac{\sqrt{8}}{8\sqrt{7}} \cdot \frac{30}{\sqrt{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{15}{\sqrt{7}} \cdot \frac{34}{15} = \frac{34}{\sqrt{14}}$

$CA^2 = 7x^2 + 8x^2 - 2\sqrt{7}\sqrt{8}x^2 \cdot \cos 2\varphi =$

$= x^2\left(15 - 2\sqrt{56} \cdot \frac{8}{17}\right) =$

Th. cos для $\triangle CPA$

$= \frac{1}{\sqrt{14}}\left(34 \cdot 15 - 2\sqrt{56} \cdot 16\right) =$

$= \frac{510}{\sqrt{14}} - 64$

Ответ: $\sqrt{\frac{510}{\sqrt{14}} - 64}$

№4.

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 33 \\ \cancel{\text{НОК}(a;b;c) = 3^{19} \cdot 11^{15}} \end{cases}$$

~~решения $(1;1;2)$ и $(2;1;1)$ различны~~

Черновик

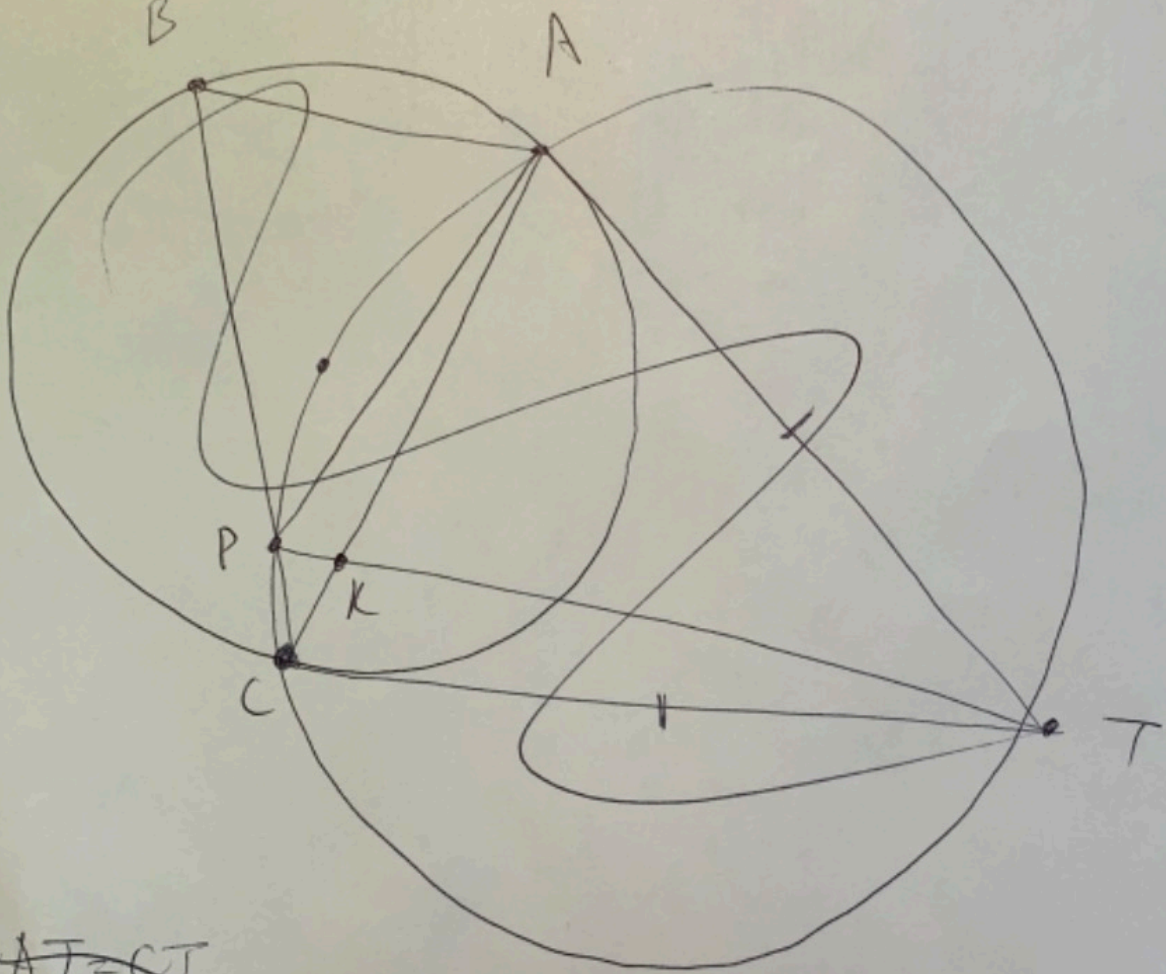
№5.

~~$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$~~

~~$\log_{(x+1)^2}(29-x)$~~

~~$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$~~

~~$S_{APK}=16,\ S_{CPK}=14$~~



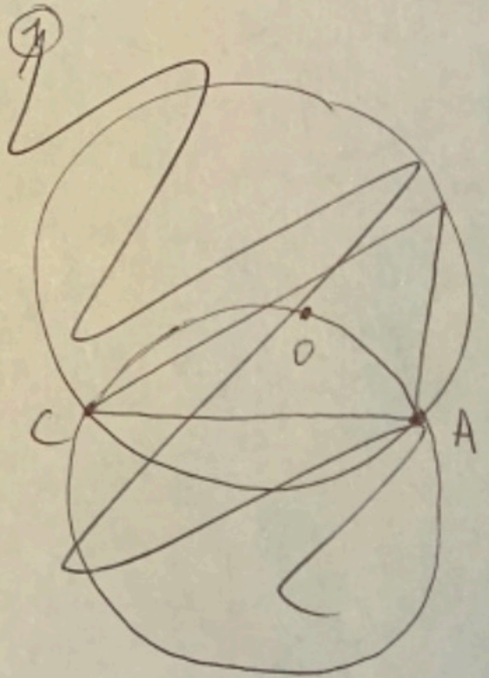
~~$AT=CT$~~

Черновик

21104371 (U382383 M1297494)

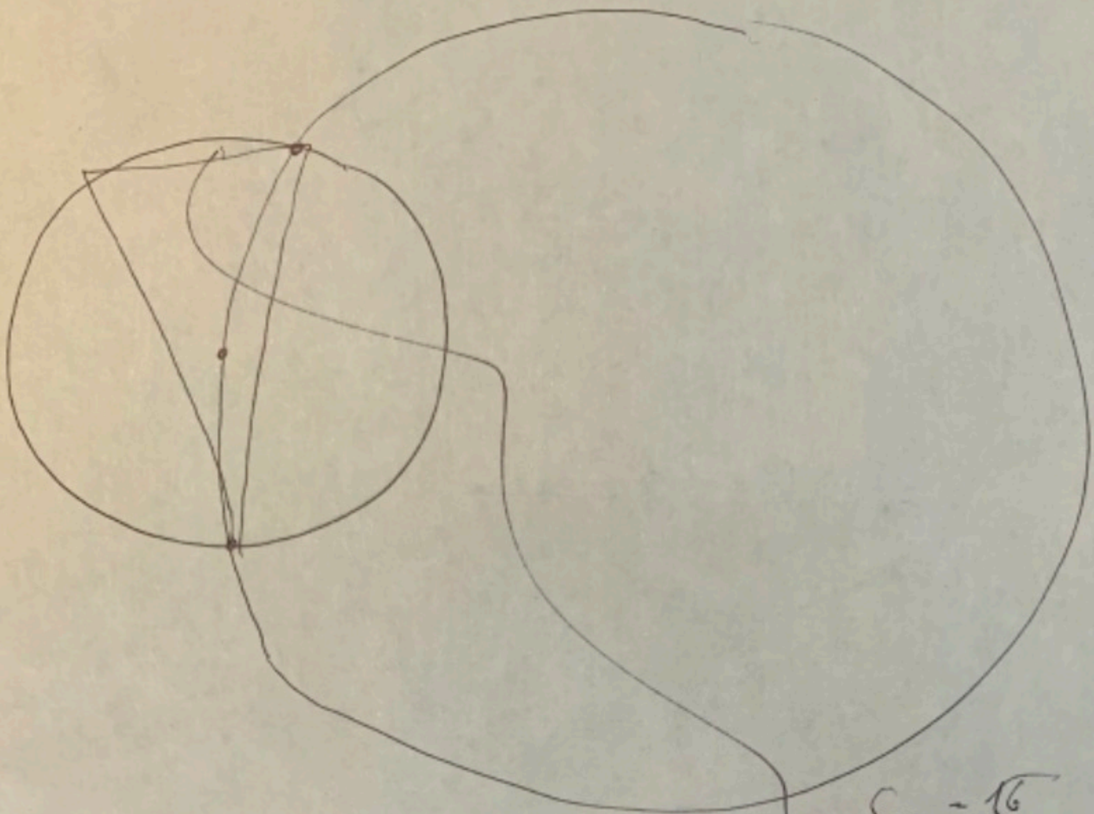
~~Участник~~ ~~Лист~~ ~~Вариант~~ 24

~~Задача~~ 6



Черновик

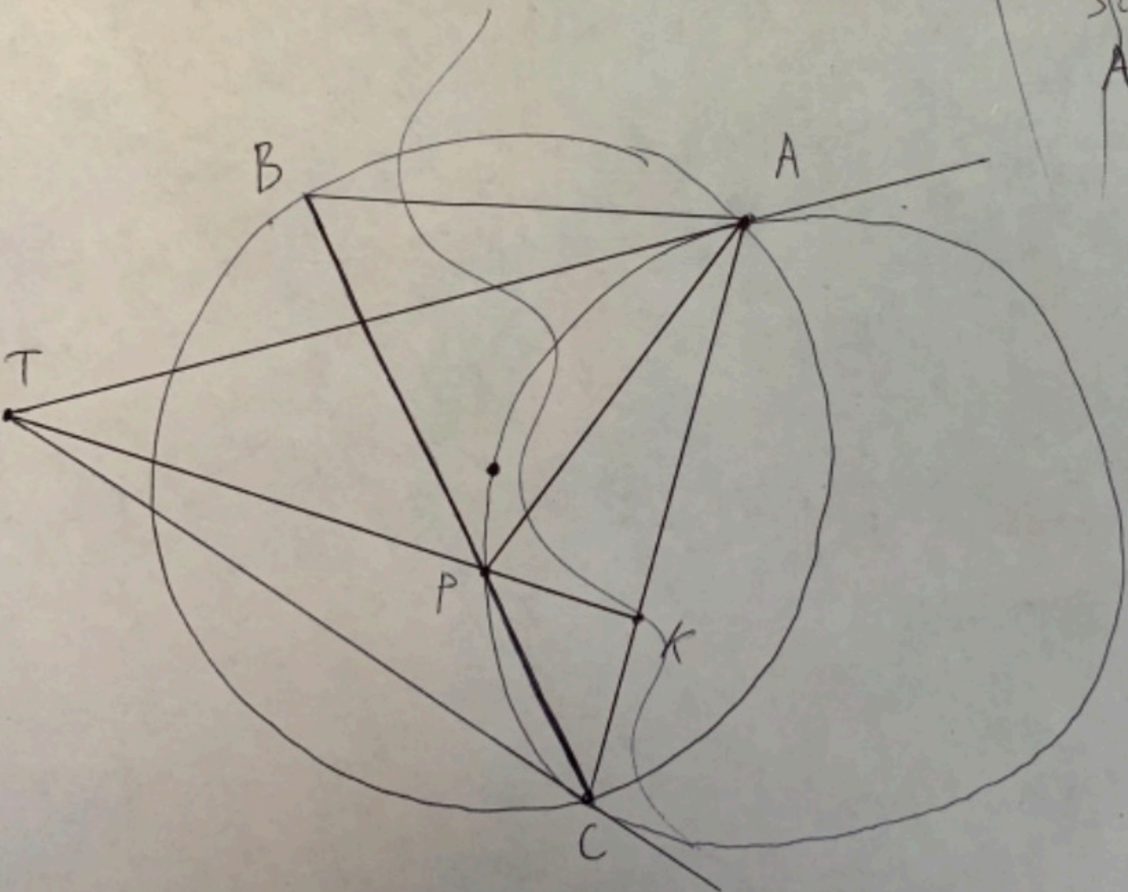
Черновик



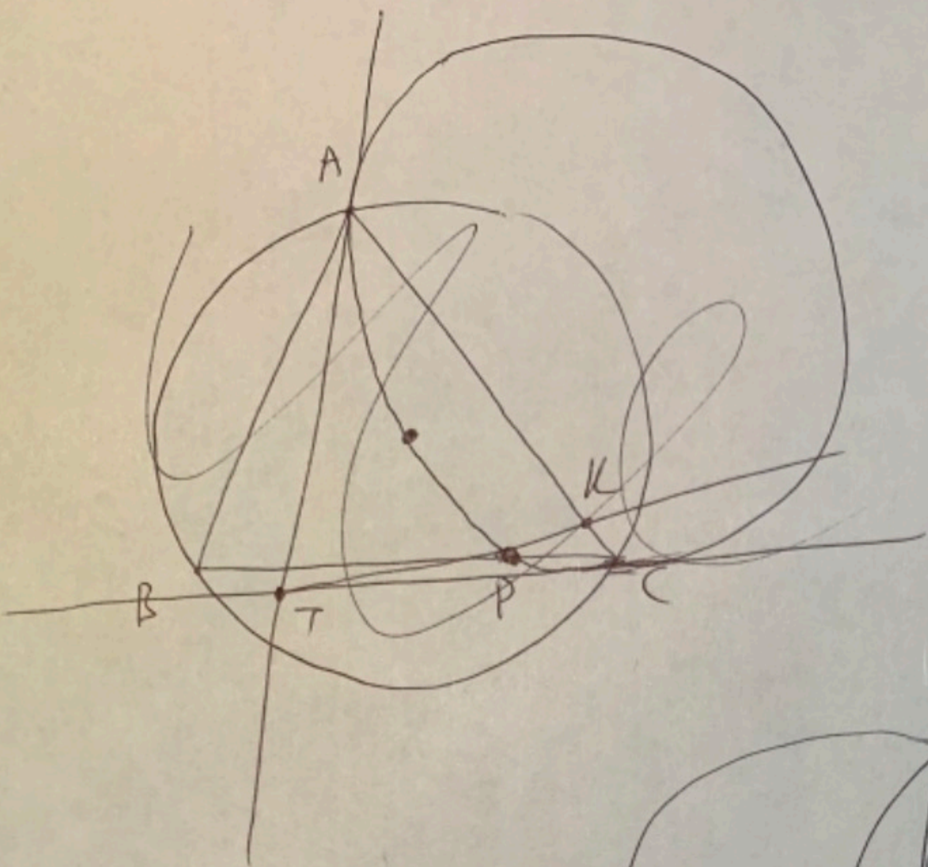
$S_{APK} = 16$

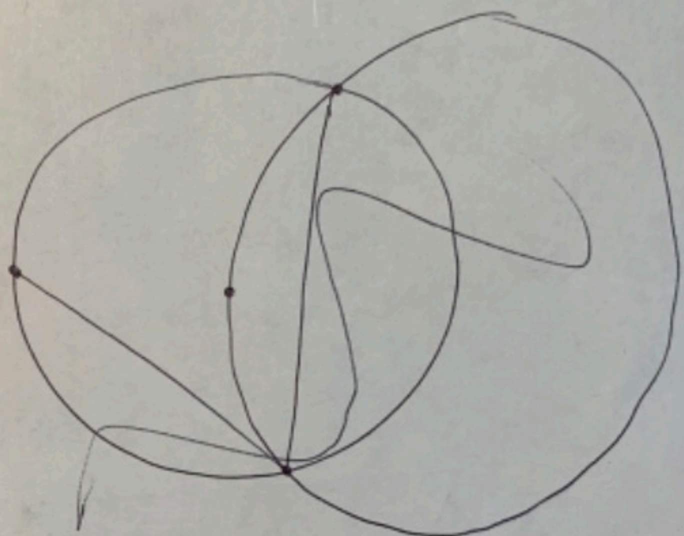
$S_{CPK} = 14$

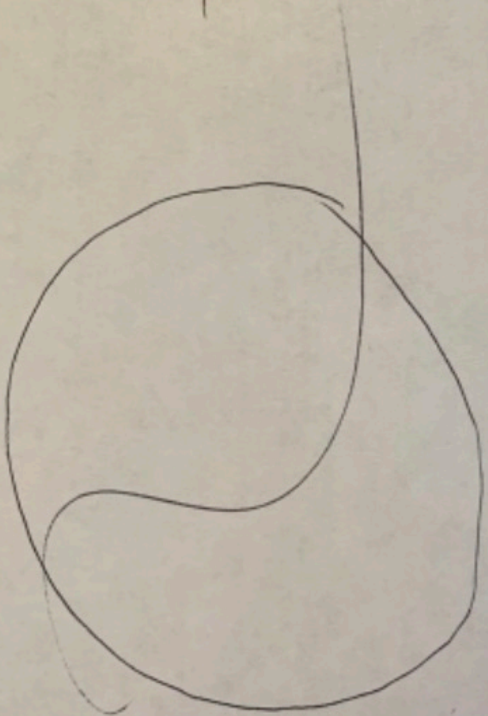
$AT = TC$



№6.







Черновик