Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104336**

ID профиля: **353124**

Вариант 24

ВАРИАНТ 24 ЧАСТЬ 1 ЧИСТОВИК

№1 $d>0$

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_9 = S \in \mathbb{Z}$

$a_5 \cdot a_{18} > S-4$ $\qquad a_1 - ?$

$a_{10} \cdot a_{13} < S+60$

Т.к. $a_1, a_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_2 = a_1+d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \mathbb{Z}$

Выразим всё через a_1 и d

$a_5 = a_1+4d$; $a_{18} = a_1+17d$

$a_{10} = a_1+9d$; $a_{13} = a_1+12d$

$$S = \frac{a_1+a_1+8d}{2}\cdot 9 = (a_1+4d)9 = 9a_1+36d$$

т.о. $\begin{cases} a_5 \cdot a_{18} > S-4 \\ a_{10} a_{13} < S+60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+4d)(a_1+17d) > 9a_1+36d-4 \\ (a_1+9d)(a_1+12d) < 9a_1+36d+60 \end{cases}$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 68d > 9a_1+36d-4 \\ a_1^2+21a_1d+108d < 9a_1+36d+60 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} 108 \\ -\ 36 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\begin{cases} a_1^2+21a_1d-9a_1+32d+4 > 0 \\ a_1^2+21a_1d-9a_1+72d-60 < 0 \end{cases}$$

т.к. $d>0 \Rightarrow a_{10}\cdot a_{13} > a_5 \cdot a_{18} \Rightarrow 9a_1+36d+60 > 9a_1+36d-4$

$60 > -4$

$$\begin{cases} a_1^2 + a_1\overbrace{(21d-9)}^{b} + 32d+4>0 & (1) \\ a_1^2 + a_1\underbrace{(21d-9)}_{b} + 72d-60<0 & (2) \end{cases}$$

(1): $D = 441d^2 - 42d\cdot 9 + 81 - 128d - 16 = 441d^2 - 506d + 65$

(2): $D = 441d^2 - 42d\cdot 9 + 81 - 288d + 240 = 441d^2 - 666d + \cancel{240}^{321}$

(1): $a_1 \in \left(-\infty; \frac{-b-\sqrt{D(1)}}{2}\right) \cup \left(\frac{-b+\sqrt{D(1)}}{2}; +\infty\right)$

(2): $a_1 \in \left(\frac{-b-\sqrt{D(2)}}{2}; \frac{-b+\sqrt{D(2)}}{2}\right)$

Чистовик

Сравним значения $D(1)$ и $D(2)$

Чтобы были решения, необходимо, чтобы

$$D(2) > D(1) \Rightarrow \underline{441d^2} - 666d + 321 > \underline{441d^2} - 506d + 65$$

$$\begin{cases} 666d - 506d < 321 - 65 \\ d > 0,\ d \in \mathbb{Z} \quad \text{— из условия} \end{cases}$$

$$160d < 256 \Rightarrow d < \frac{256}{160} < 2$$

т.к. $d \in \mathbb{Z}$ и $d > 0 \Rightarrow d = 1$ — единств. возможное d

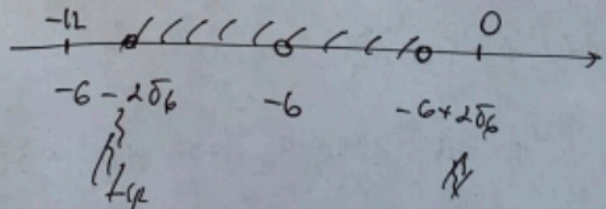
Итого имеем:
$$\begin{cases} a_1^2 + a_1(21-9) + 32 + 4 > 0 \\ a_1^2 + a_1(21-9) + 72 - 60 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 & (3) \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 & (4) \end{cases}$$

(3): $(a_1+6)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -6$

(4): $D = 36 - 12 = 24$

$$a_1 \in (-6 - 2\sqrt{6}; -6 + 2\sqrt{6})$$



$-6 - 2\sqrt{6} \vee -11 \Rightarrow 6 + 2\sqrt{6} \wedge 11 \Rightarrow 2\sqrt{6} \wedge 5$

$24 \wedge 25 \Rightarrow \underline{-6 - 2\sqrt{6} > -11}$

$-6 + 2\sqrt{6} \vee -1 \rightarrow 6 - 2\sqrt{6} \wedge 1 \rightarrow 5 \wedge 2\sqrt{6}$

$25 \wedge 24 \quad \underline{-6 + 2\sqrt{6} < -1}$

т.о. $a_1 \in \{-10; -2\} / \{6\}$

Ответ: $a_1 \in \{-10; -2\} \setminus \{6\}$ ← без 6-ти

№2

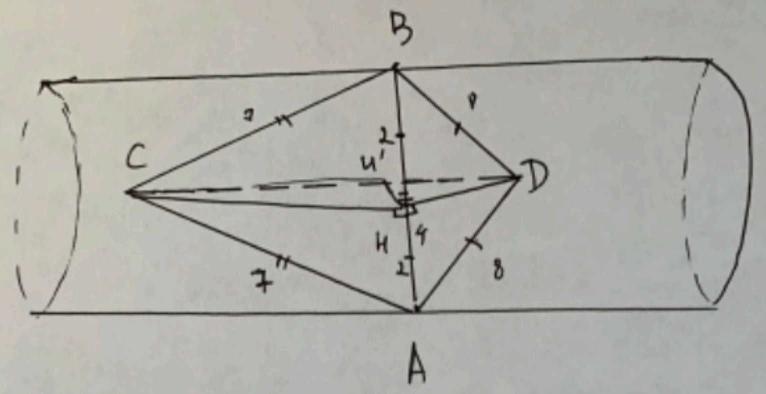
Чистовик

$AB = 4$

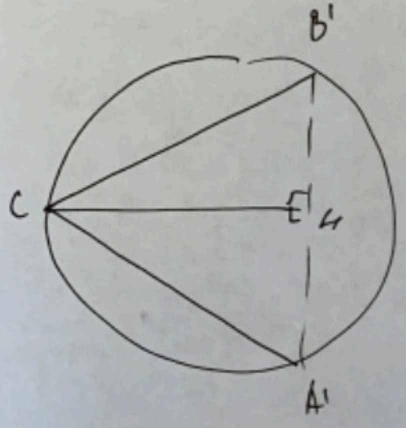
$AC = CB = 7$

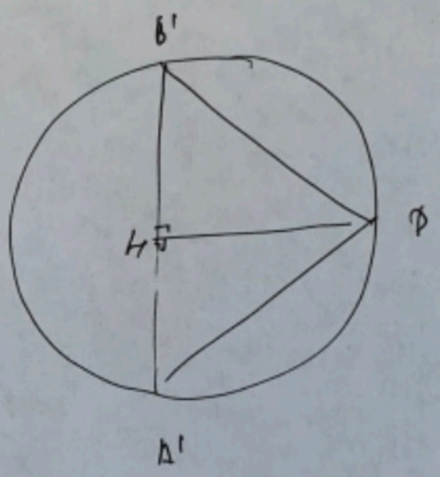
$AD = DB = 8$

$CD - ?$



Рассмотрим проекции ~~на~~ треугольников ABC и ABD на плоскость основания цилиндра





из th. cos:

$$CD = \sqrt{CH^2 + HD^2 - 2CH\cdot HD\cdot\cos(\angle CHD)}$$

$$CH = \sqrt{CB^2 - BH^2} = \sqrt{49-4} = 3\sqrt{5}$$

$$HD = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{64-4} = 2\sqrt{15}$$

$$\Rightarrow CD = \sqrt{45+60-60\sqrt{3}\cos(\angle CHD)}$$

Условие наим. радиуса — чтобы точка H была центром окр-ти, ось которой проходит через ось цилиндра тогда A'B' и AB — диаметр, а значит $r = 2$.

$HH' = 2$

$$CH' = \sqrt{CH^2 - r^2}$$

$$DH' = \sqrt{HD^2 - r^2}$$

$$\Rightarrow CD = CH' + H'D = \sqrt{45-4} + \sqrt{60-4} = \sqrt{41} + \sqrt{56}$$

чистовик

№2 $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b, 10)\end{cases}$ S_M – ?

Сделаем равносильное преобразование

$\left[\begin{array}{l}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \; (*) \\ \begin{cases}a^2+b^2 \le -6a-2b \\ -6a-2b \le 10\end{cases} \; (1) \\ \begin{cases}a^2+b^2 \le 10 \\ -6a-2b \ge 10\end{cases} \; (2)\end{array}\right.$

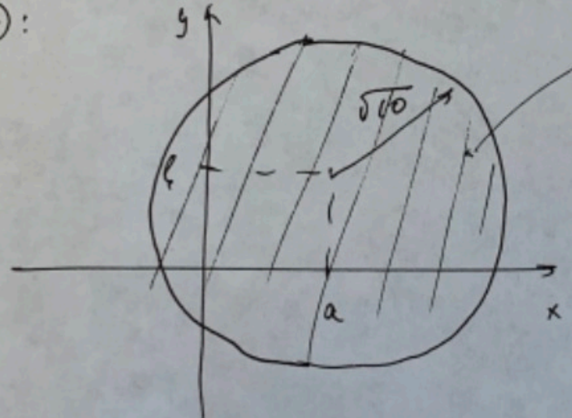
(1): $\begin{cases}a^2+b^2 \le -6a-2b \\ -6a-2b \le 10\end{cases}$

(2): $\begin{cases}a^2+b^2 \le 10 \\ -6a-2b \ge 10\end{cases}$

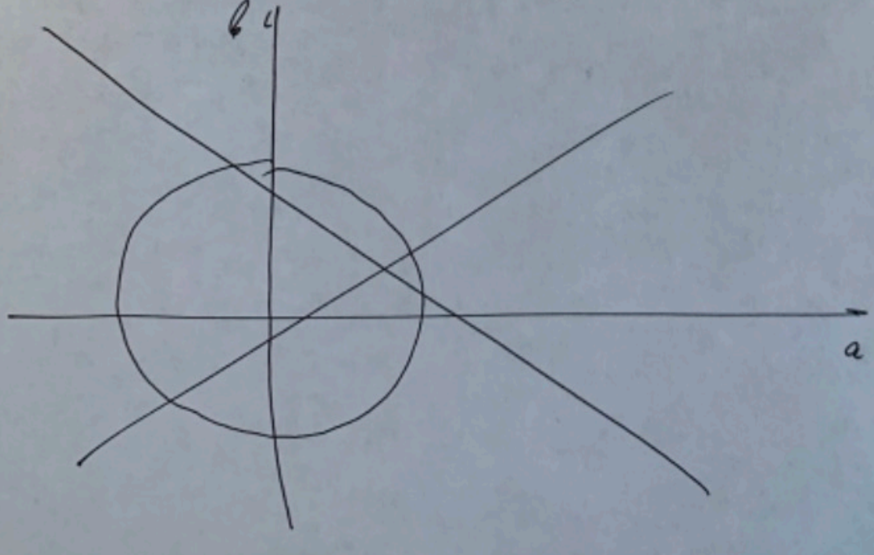
из (1): $\begin{cases}-(a^2+b^2) \ge 6a+2b \\ -10 \le 6a+2b\end{cases}$

$-(a^2+b^2) \ge -10 \Rightarrow a^2+b^2 \le 10$

из $(*)$:

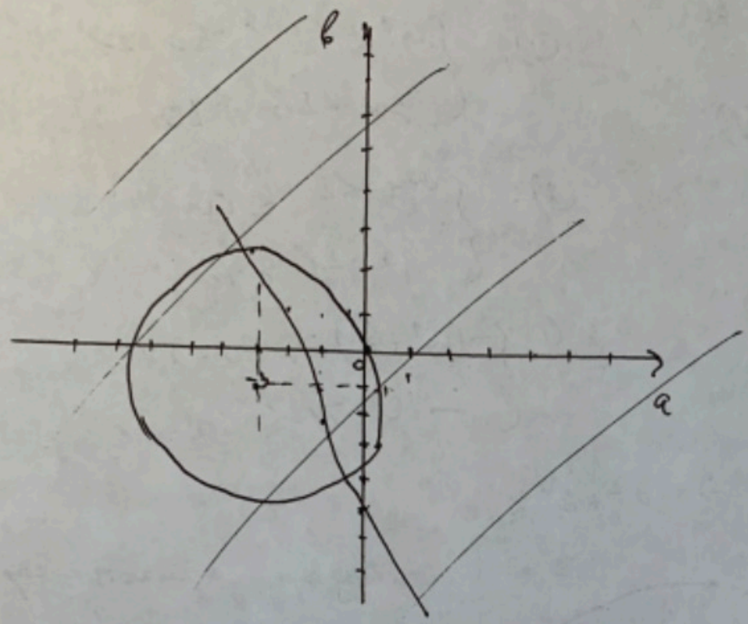


Нарисуем второе уравнение сначала в aOb (α)

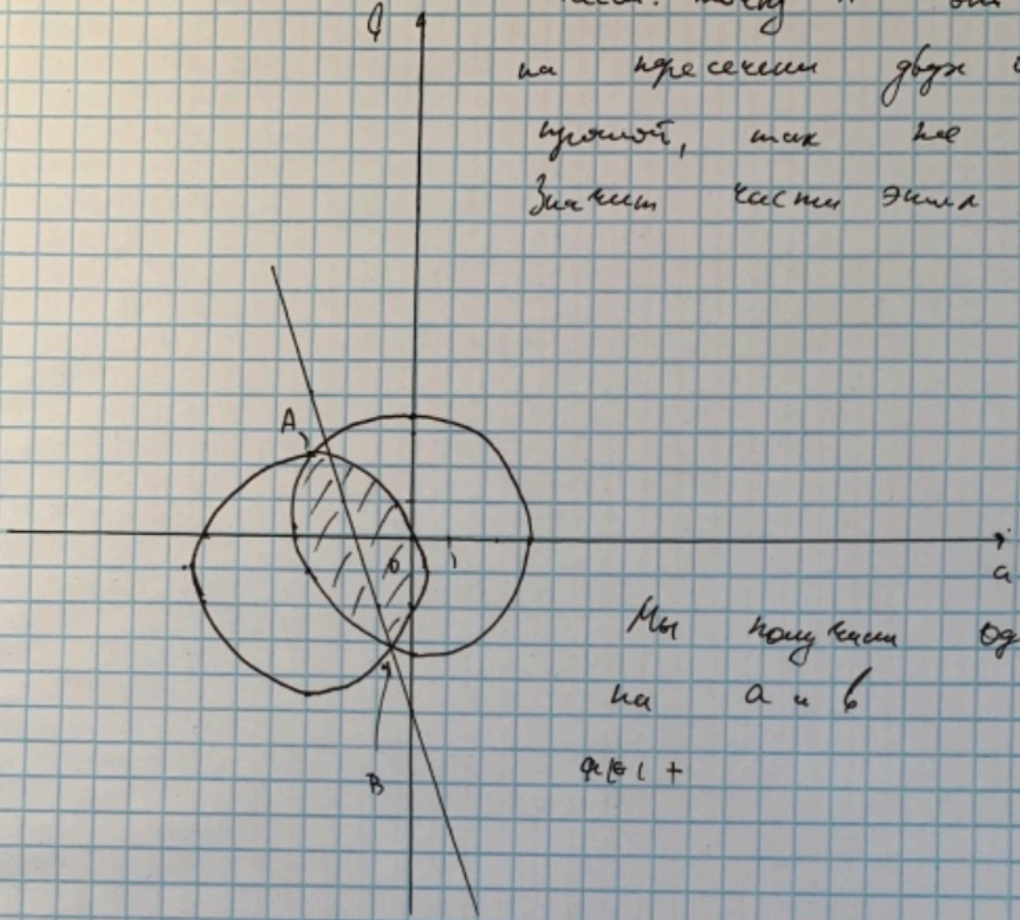


чистовик

$$\left[\begin{cases} a^2+6a+b^2+2b \le 0 \\ b \geq -3a-5 \end{cases} \atop \begin{cases} a^2+b^2 \le 10 \\ b \le -3a-5 \end{cases}\right. \rightarrow \left[\begin{cases} (a+3)^2+(b+1)^2 \le 10 \\ b \geq -3a-5 \end{cases} \atop \begin{cases} a^2+b^2 \le 10 \\ b \le -3a-5 \end{cases}\right.$$



Чистовик



Рассм. точку A от центра на пересечении двух окр-тей и прямой, так же как и т. B. Значит части этих окр-тей симметр.

Мы получили оценку на a и b

$a \in (1 +$

Нарисуем 1-е уравнение сразу при всех возможных a и b. Чтобы нарисовать границу фигуры, нужно рисовать окр-ти при граничных b и a — т.е. двигаться по границе фигуры в b(a)

$$\begin{cases} a_1^2 + a_1(21d-9) + 32d + 4 > 0 \\ a_1^2 + a_1(21d-9) + 72d - 60 < 0 \end{cases}$$

МБСЛЧ

$D = (21d-9)^2 - 4(32d+4)$

$441d^2 - 21 \cdot 2 \cdot 9d + 81 - 128d - 16$

$\begin{array}{r} 81 \\ -16 \\ \hline \end{array}$

$36 - 12 = 24$

$-6 - 2 \cdot 2 = -10$

$-6 + 2 \cdot 2 = -2$

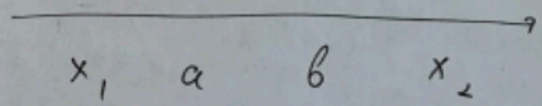
$$\begin{cases} c + 32d + 4 > 0 \\ c + 72 - 60 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c > -32d - 4 \\ c < -72d + 60 \end{cases}$$

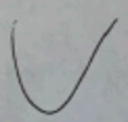
$a > S - 4$ $\qquad$ $a > S - 4$

$b < S + 60$ $\qquad$ $b < S + 60$

$a > b$ $\qquad$ $\cancel{a \neq b}$

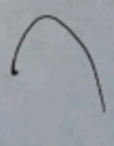
$a < b$





378

$\begin{array}{r} 378 \\ +128 \\ \hline 506 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r} 378 \\ +288 \\ \hline 666 \end{array}$



$\begin{array}{r} 321 \\ -65 \\ \hline 256 \end{array}$

$\begin{array}{r} 240 \\ +81 \\ \hline 321 \end{array}$

$6a + 2b \geq -10$

$6a + 2b \leq a^2 + b^2$

$x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 \leq 10$

$x^2 + y^2 - 2xa - 2yb \geq 0$

$-6x - 2y$

$a + 6a + b^2 + 2b$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104336**

ID профиля: **353124**

Вариант 24

ВАРИАНТ 24 ЧАСТЬ 2 ЧИСТОВИК

№5 $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(29-x)$, $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

Запишем ОДЗ: $\begin{cases} 29-x>0 \\ 29-x\neq 1 \\ \frac{x}{7}+7>0 \\ (x+1)^2>0 \\ (x+1)^2\neq 1 \\ \frac{x}{7}+7\neq 1 \\ -x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<29 \\ x\neq 28 \\ x>-49 \\ x\neq -1 \\ x\neq -2 \\ x\neq 0 \\ x\neq -42 \\ x<-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1 \\ x>-49 \\ x\neq -2 \\ x\neq -42 \end{cases}$

Преобразуем числа

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 2\log_a b = A$

$\log_{(x+1)^2}(29-x) = \frac{1}{2}\log_{-x-1}(29-x) = \frac{1}{2}\log_c a = B$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = 2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1) = 2\log_b c = C$

Запишем все возможные случаи для этих чисел.

~~1)~~ $\begin{cases} 2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \frac{1}{2}\log_{-x-1}(29-x) \\ 2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)+1 \end{cases}$

вернуть

$\boxed{\text{Пусть } 29-x=a,\ \frac{x}{7}+7=b,\ -x-1=c,\ \text{тогда}}$

$\begin{cases} 2\log_a b = \frac{1}{2}\log_c a \\ 2\log_a b = 2\log_b c+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_a b = \frac{1}{4}\log_c a \\ \log_a b = \log_b c \end{cases}$ (1)

(1): $\frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\ln c}{\ln b}$

$\ln^2 b = \ln a \cdot \ln c$

(2): $\log_a b = \frac{\log_a c}{\log_a b} \Rightarrow$ $\log_a b = \frac{1}{4}\log_c a$

$\log_a b = \log_b c + \log_a a^{\frac{1}{2}}$

Рассмотрим произведение этих чисел

$2\log_a b \cdot \frac{1}{2}\log_c a \cdot 2\log_b c = 2 \cdot \log_c b \cdot \log_b c = 2$

Заменим числа и составим систему

$ABC = 2$

~~ABC~~

1

чистовик

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}A=B\\A+1=C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A^2C=2\\A+1=C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A^3+A=2\\C=A+1\end{cases},\ A=B \longrightarrow 1\\[2ex]\begin{cases}B=C\\B+1=A\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AB^2=2\\B+1=A\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B^3+B=2\\A=B+1\end{cases},\ B=C \longrightarrow 2\\[2ex]\begin{cases}A=C\\A+1=B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A^2B=2\\A+1=B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A^3+A=2\\B=A+1\end{cases},\ A=C \longrightarrow 3\end{array}\right.$$

Очевидно, что у уравнения $x^3+x=2$ есть только одно решение $x=1$ (т.к. левая часть монотонно $\nearrow$)

т.о. 1) $A=B=1$, $C=2$ $\Rightarrow \begin{cases}2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1\\ \frac12\log_{-x-1}(29-x)=1\\ 2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)=2 \quad (1)\end{cases}$

~~$\frac12\log_6 22+1$~~

$\frac12\log_6 36=1$

$2\log_{36}6=1$

(1): $\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)=1 \Rightarrow -x-1=\frac{x}{7}+7 \Rightarrow -7x-7=x+49$

$\left[x=\frac{-7\cdot8}{8}=-7\right]$ удовл.

2) $B=C=1$, $A=2$ $\Rightarrow 2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)=2$

$29-x=\frac{x}{7}+7 \Rightarrow 29\cdot7-7x=x+7\cdot7$

$\left[x=\frac{22\cdot7}{8}=\frac{11\cdot7}{4}=\frac{77}{4}\right]$

$2\log_{\frac{11}{4}+7}\left(\frac{-77-4}{4}\right)=2\cdot\log_{\frac{39}{4}}\left(-\frac{81}{4}\right)\nexists$

$\uparrow<0$

т.к. $x\geq0 \Rightarrow \varnothing$ не удовл.

3) $\begin{cases}\frac12\log_{(-x-1)}(29-x)=2\\ 2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)=2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)=1\end{cases}$

$\sqrt{29-x}=\frac{x}{7}+7 \Rightarrow 29-x=\frac{1}{49}\left(x^2+49\cdot2x+49^2\right)$

$29-x=\frac{x^2}{49}+2x+49$

$x^2+3\cdot49x+20\cdot49=0$

450−9

441

$D=(3\cdot49)^2-80\cdot49=\cancel{147\cdot49-80\cdot49=67\cdot49}$ $9\cdot49\cdot49-80\cdot49$ $=361\cdot49$

$x=\frac{-3\cdot49\pm19\cdot7}{2}=\frac{7(-21\pm19)}{2}=\left[\begin{array}{l}-140\\-7\end{array}\right.$

т.к. $x>-49$ по ОДЗ $\Rightarrow$ $!x=-7$

Ответ: -7

№6 Чистовик

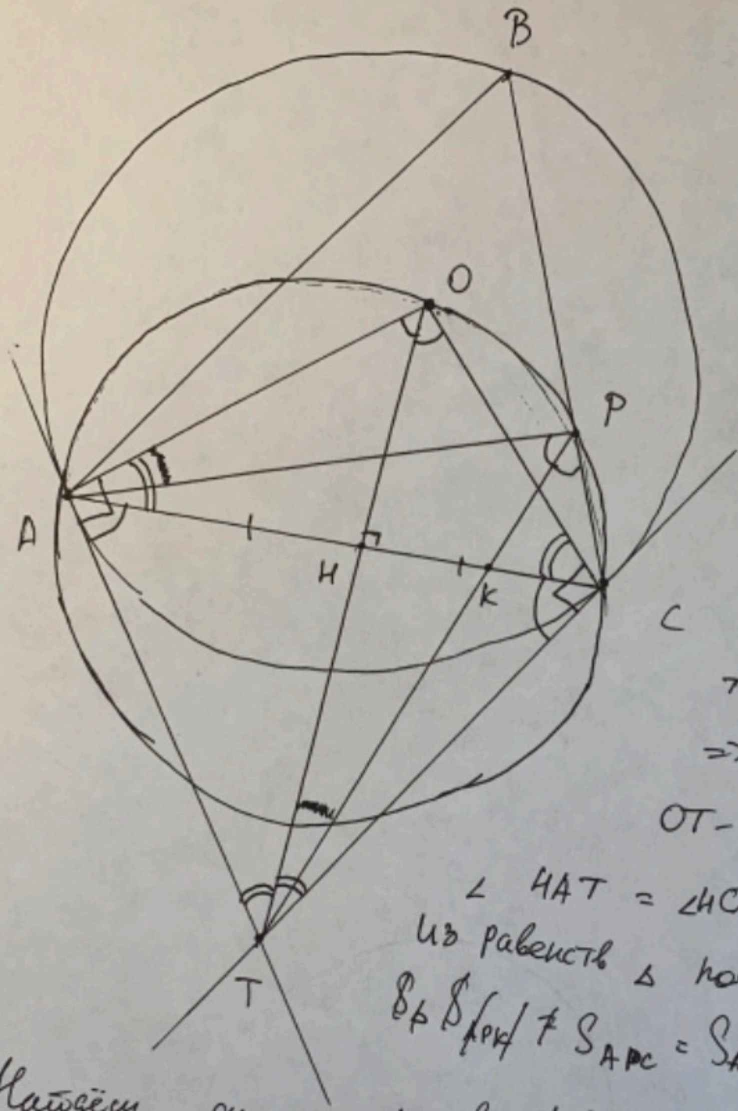
$S_{APK} = 16$

$S_{CPK} = 14$

а) S_{ABC} – ?

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{5}$

AC – ?



$AO = OC = R$ $\perp AT, TC$ соотв.

$\angle ATO = \angle CTO$

Рассм $\triangle AOC$

$AO = OC \Rightarrow$ р/б $\triangle$

т.к. $\triangle AOT = \triangle COT \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AOT = \angle COT \Rightarrow$

OT – бисс., мед, выс. в $\triangle AOC$

$\angle HAT = \angle HOA = \angle HCT = \angle HOC$

Из равенств $\triangle$ получим, что $\angle OAH = \angle OCH = \angle ATH = \angle CTH$

$S_{\triangle}$ ~~S_{APK}~~ $S_{APC} = S_{APK} + S_{CPK} = 30$

Найдём сумму углов $AOCT$. Пусть $\Delta = \beta$; $\Delta = \alpha$

тогда $\angle OAT = 90° = \alpha + \beta = \angle OCT$; $2\alpha + 2\beta = 180°$

$\angle AOC + \angle ATC = 2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow ATCO$ – впис. чет-к.

Точки $T \in$ окружности. Тогда $\angle AOT = \angle APT = \alpha$

$\angle OAP = \angle OTP = \gamma$; $\angle TOC = \angle TPC$

$S_{APK} = AP \cdot PK \cdot \frac{\sin\alpha}{2}$; $S_{PKC} = KP \cdot PC \cdot \frac{\sin\alpha}{2}$

т.о. $\frac{AP}{CP} = \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{8}{7}$ Пусть $AP = 8x$; $CP = 7x$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC \sin\angle BCA$

чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 33 \\ НОК(a;b;c) = 3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$$

Из очевидных соображений для $a, b, c \geqslant 33$

$a, b, c \leqslant 3^{19}\cdot 11^{15}$

$$\cancel{\frac{НОК(a;b;c)}{НОД(a;b;c)} = 3^{18}\cdot 11^{14} = abc}$$

$$НОК(a;b;c)\cdot НОД(a;b;c) = 3^{20}\cdot 11^{16} = abc$$

Всего:

$$\begin{cases} xyz = 2 \\ \cancel{x+y} = x = y \\ z = y+1 \end{cases}$$

$y^2 z = 2$

$z = y+1$

30

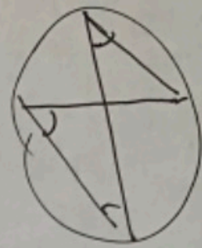
3, 6, 5

$1 \cdot 30 = 90$

$x^3 + x - 2 = 0$

$\underbrace{x}\underbrace{(x^2+1)} = 2$

$x \neq 1$



$2 / \frac{2}{3}$

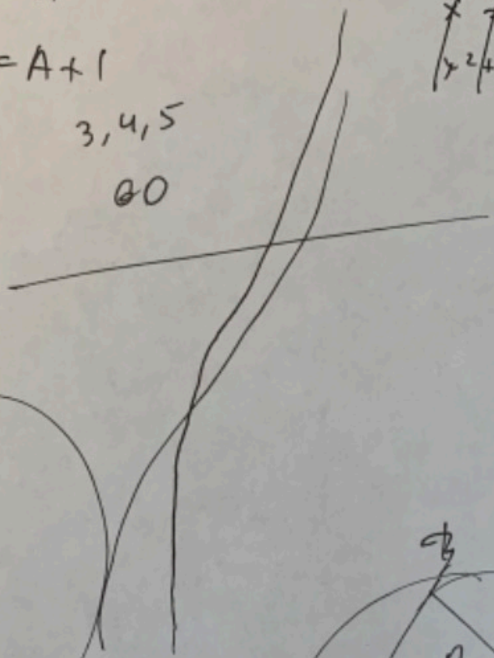
$$\begin{cases} A^3 + A = 2 \\ C = A + 1 \end{cases}$$

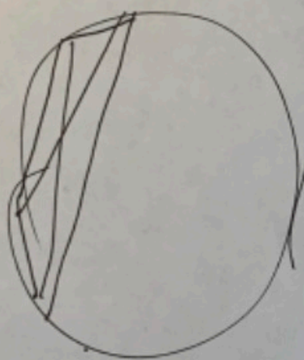
3, 4, 5

60

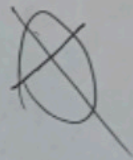
$\underbrace{x^3 + x} = 2$

$3x^2 + 1$





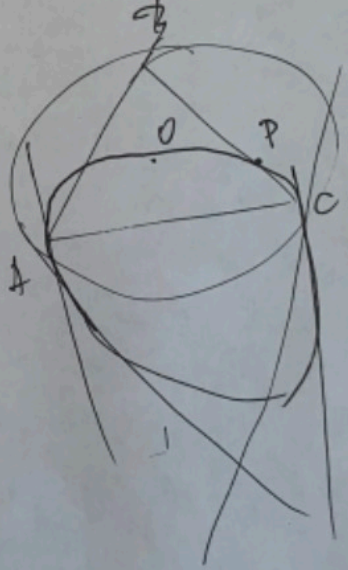
3.4.5

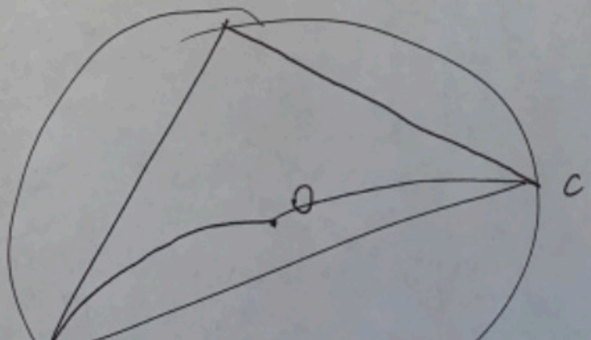


НОК(3, 4)

12

1





МЫСЛИ

НОК + НОД

НОК(7, 8, 9

70

2, 6, 7

2, 6, 7 14.6

1

№ чистовик