Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104302**

ID профиля: **376796**

Вариант 24

Чистовик 1.

№1

$\{a_n\} \div \quad a_1 = a$

$a_n = a + d(n-1)$, $d>0$ (т.к. a_n возраст.)

$a \in \mathbb{Z}$; $d \in \mathbb{Z}$

$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_8 + a_9$

$$\begin{cases} a_5 a_{18} > S - 4 \\ a_{10} a_{13} < S + 60 \end{cases} \qquad a_1 ?$$

$$S = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{a_1 + a_1 + 8d}{2} \cdot 9 = 9(a_1 + 4d)$$

$$\begin{cases} (a+4d)(a+17d) > 9(a+4d) - 4 \\ (a+9d)(a+12d) < 9(a+4d) + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 21ad + 68d^2 > 9a + 36d - 4 \\ a^2 + 21ad + 108d^2 < 9a + 36d + 60 \end{cases}$$

$\cancel{a^2 + 21ad +}$

$\cancel{a^2 + 12ad + 68d^2 - 36d + 4} > 0$

$$+\begin{cases} a^2 + 21ad + 68d^2 > 9a + 36d - 4 \\ -a^2 - 21ad - 108d^2 > -9a - 36d - 60 \end{cases} \Rightarrow -40d^2 > -64$$

$40d^2 < 64$

$d^2 < \frac{64}{40}$

$$\begin{cases} d < \frac{8}{2\sqrt{10}} \\ d > -\frac{8}{2\sqrt{10}} \end{cases} \text{ но } d>0$$

$d \in \left(0; \frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$

$\frac{2\sqrt{10}}{5} \vee 1$

$\sqrt{10} \vee 2{,}5$

$10 > 6{,}25 \Rightarrow \frac{2\sqrt{10}}{5} > 1$

$\frac{2\sqrt{10}}{5} \vee 2$

$\sqrt{10} \vee 5$

$10 < 25 \Rightarrow \frac{2\sqrt{10}}{5} < 2$

Т.е. $d = 1$, т.к. $d \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} d = 1 \\ a^2 + 21a + 68 > 9a + 36 - 4 \\ a^2 + 21a + 108 < 9a + 36 + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 1 \\ a^2 + 12a + 36 > 0 \\ a^2 + 12a + 12 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 1 \\ (a+6)^2 > 0 \Rightarrow a \neq -6 \\ a^2 + 12a + 12 < 0 \ (*) \end{cases}$$

(*) $a^2 + 12a + 12 = 0$

$\frac{D}{4} = 36 - 12 = 24$

$$\left[\begin{aligned} a &= -6 - 2\sqrt{6} \\ a &= -6 + 2\sqrt{6} \end{aligned}\right.$$

$+ \quad - \quad +$

$-6-2\sqrt{6} \qquad -6+2\sqrt{6} \quad a$

$a \in (-6-2\sqrt{6}; -6) \cup$

$\cup (-6; -6+2\sqrt{6})$

но $a \in \mathbb{Z}$ $\cancel{т.к.}$

$\cancel{2\sqrt{6} \vee 4{,}3}$

$\cancel{24 > 9 \Rightarrow 2\sqrt{6}}$

$2\sqrt{6}$

$\Rightarrow$

к чистовику 2

Чистовик 2

$a \in \{-10; \cancel{...} -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$

$2\sqrt{6} \vee 4$

$24 > 16 \Rightarrow 2\sqrt{6} > 4$

$2\sqrt{6} \vee 5$

$24 < 25 \Rightarrow 2\sqrt{6} < 5$

т.е. $-6-2\sqrt{6} > -11$

$-6+2\sqrt{6} < -1$

Ответ: $-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2$

Чистовик 3

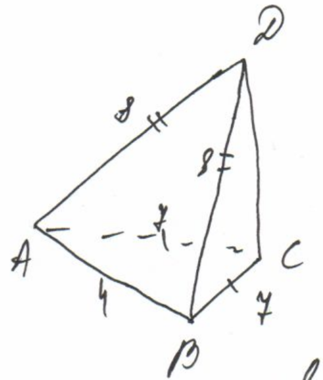
№2

$ABCD$ – тетраэдр

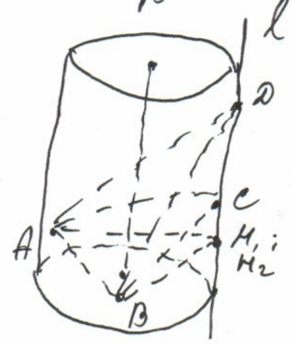
$AB=4$;

$AC=CB=7$

$AD=DB=8$



Заметим, что если CD параллельно оси цилиндра, и при этом (·)C и (·)D лежат на его боков. поверхности,



то и отрезок $[CD]$ лежит на боков. поверх.

Пусть $[CD] \subset l$;

Тогда пусть $BH_1 \perp l$; $AH_2 \perp l$

Т.к. $\Delta BCD = \Delta ACD$ ($BC=AC$; $AD=DB$; DC – общ),

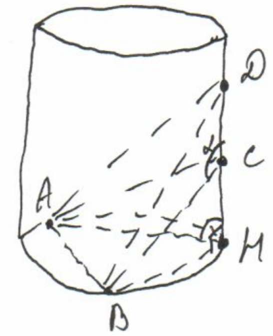
то $\angle BCD = \angle ACD$, значит $\angle BCH_1 = \angle ACH_2$,

т.е. $\Delta BCH_1 = \Delta ACH_2$ ($BC=AC$; равные остр. углы; Δ-ки прямоугол.)

т.е. $CH_1 = CH_2$, (·)H_1 = (·)H_2

Пусть (·)H_1 = (·)H_2 = (·)H

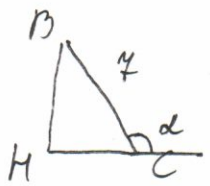
Тогда перерисуем чертёж так, чтобы (·)A, (·)B и (·)H принадлежали основанию цилиндра (перемещен. тетраэдра вертикально в цилиндре не влияет на радиус основ. цилиндра, а прямая l ($CD \subset l$) перпендик. ~~оси~~ плоскости основания цилиндра как его образующая)



Пусть $\angle BCD = \angle ACD = \alpha$

Тогда в п/у ΔBCH:

$BH = \sin\angle HCB \cdot BC = 7\sin\alpha$

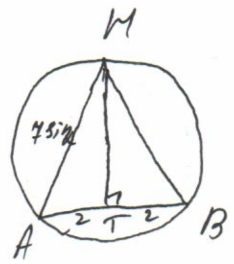


к чистовику 4

Чистовик 4

$AH = BH = 7\sin\alpha$

Тогда имеем в основ. цилиндра:



Пусть $HT \perp AB$

По т. Пифагора в $\triangle AHT$: $AH^2 = HT^2 + AT^2$

(т.к. $AH = BH$: $\triangle AHB$ – р/б, т.е. по св-ву (·)T – серед AB)

$$HT = \sqrt{49\sin^2\alpha - 4} \; \cancel{= 2\sqrt{\sin^2\alpha - 1}} =$$
$$\cancel{= 2\sqrt{-\cos^2\alpha}}$$

Тогда $S_{\triangle AHB} = \frac{1}{2} \cdot HT \cdot AB = 2\sqrt{49\sin^2\alpha - 4}$

Тогда, т.к. $\triangle AHB$ вписан в окружность – основ. цилиндра:

R – радиус окруж.:

$$R = \frac{AH \cdot BH \cdot AB}{4 \cdot S_{\triangle AHB}} = \frac{49\sin^2\alpha \cdot 4}{4 \cdot 2\sqrt{49\sin^2\alpha - 4}} =$$
$$= \frac{49}{2} \frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{49\sin^2\alpha - 4}}$$

~~Хотим наименьший R, тогда:~~

$$\cancel{f(x) = \frac{49}{2} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{49\sin^2 x - 4}}}$$

$$\cancel{f'(x) = \frac{49}{2}\left(\frac{\sin 2x\sqrt{49\sin^2 x - 4} - \frac{49\sin 2x}{2\sqrt{49\sin^2 x - 4}} \cdot \sin^2 x}{49\sin^2 x - 4}\right)}$$

~~Хотим $f'(x) = 0$:~~

$$\cancel{\begin{cases} \sin 2x\sqrt{49\sin^2 x - 4} - \frac{49\sin 2x}{2\sqrt{49\sin^2 x - 4}} \cdot \sin^2 x = 0 \quad (*) \\ 49\sin^2 x - 4 \neq 0 \end{cases}}$$

$$\cancel{(*) \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sqrt{49\sin^2 x - 4} - \frac{49\sin^2 x}{2\sqrt{49\sin^2 x - 4}} = 0 \quad | \cdot 2\sqrt{49\sin^2 x - 4} \end{array}\right.}$$

~~не подходит, т.к. при $\sin 2x = 0$~~

~~$2x = \pi k$, $x = \frac{\pi k}{2}$~~

$$\cancel{\begin{cases} 2(49\sin^2 x - 4) - 49\sin^2 x = 0 \\ 49\sin^2 x - 4 > 0 \end{cases}}$$

$$\cancel{\begin{cases} 49\sin^2 x - 8 = 0 \\ 49\sin^2 x - 4 > 0 \end{cases} \quad \sin^2 x = \frac{8}{49}}$$

$\Rightarrow$ к Чистовику 5

Чистовик 5

Пусть $\cancel{BK}$ $x = 49\sin^2\alpha$, $x \geq 0$ и $x \leq 49$

$$R = f(x) = \frac{x}{2\sqrt{x-4}} \qquad D(f) = (4; +\infty)$$

Наименьшей R: $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x-4} - \frac{x}{2\sqrt{x-4}}}{x-4}\right)$ $\quad D(f) = (4; +\infty)$

$f'(x) = 0$: $\quad \frac{\sqrt{x-4} - \frac{x}{2\sqrt{x-4}}}{x-4} = 0$

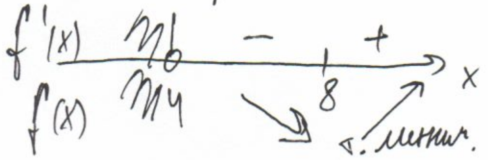
$$\begin{cases} x \neq 4 \\ \sqrt{x-4} - \frac{x}{2\sqrt{x-4}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 4 \\ 2(x-4) - x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 4 \\ x - 8 = 0 \end{cases} \qquad \text{Крит. т.: } 8$$

$$x = 8$$

$f'(x)$ — + ; $f(x)$ ↘ 8 ↗ т. миним.



Т.е. $R = f(8)$ наименьш. радиус

$$f(8) = \frac{8}{2\sqrt{8-4}} = 2$$

Такой радиус достигается при: $\quad 49\sin^2\alpha = 2$

$$\sin^2\alpha = \frac{2}{49}$$

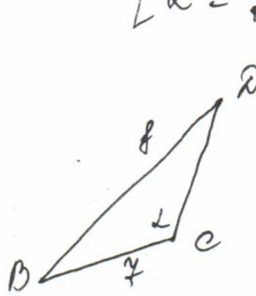
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{7}$$

$$\alpha = (-1)^n \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{7}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Т.к. $\alpha \in (0; \pi)$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{7} \\ \alpha = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{7} \end{array}\right.$$

Тогда в $\triangle BCD$:



$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{7}$$

$\Longrightarrow$ к чистовику 6

Чистовик 6

I сл. α – тупой

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\frac{2}{49}} = -\sqrt{\frac{47}{49}} = \frac{-\sqrt{47}}{7}$$

но $$\cos\alpha = \frac{BC^2+CD^2-BD^2}{2BC\cdot CD}$$

$$-\frac{\sqrt{47}}{7} = \frac{49+CD^2-64}{2\cdot 7\cdot CD}$$

$$-14\sqrt{47}\,CD = 7CD^2-105$$

$$7CD^2+14\sqrt{47}\,CD-105=0$$

$$\frac{D}{4} = 49\cdot 47+735 = 2303+735 = 3038 = 49\cdot 62$$

$$\left[\begin{array}{l} CD = \dfrac{-7\sqrt{47}-7\sqrt{62}}{7} \\ CD = \dfrac{-7\sqrt{47}+7\sqrt{62}}{7} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} CD = -\sqrt{47}-\sqrt{62} < 0 \\ CD = -\sqrt{47}+\sqrt{62} > 0 \end{array}\right.$$ не подходит по смыслу задачи

II сл. α остр.

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{47}}{7}$$

~~cos~~ имеем: $$\frac{\sqrt{47}}{7} = \frac{CD^2-15}{14CD}$$

$$14\sqrt{47}\,CD = 7CD^2-105$$

$$7CD^2-14\sqrt{47}\,CD-105=0$$

Аналогично:
$$\left[\begin{array}{l} CD = \sqrt{47}-\sqrt{62} < 0 \\ CD = \sqrt{47}+\sqrt{62} > 0 \end{array}\right.$$ не подходит по смыслу задачи

Ответ: $CD = \sqrt{62} \pm \sqrt{47}$

Чистовик 7

M фигура:

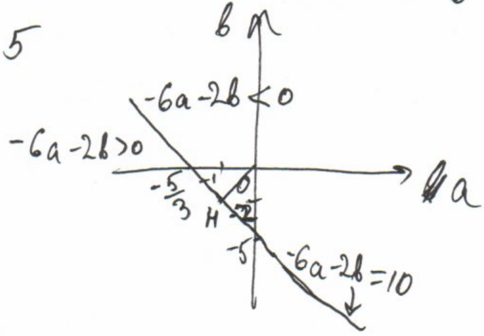
$(x;y) \in M$: $\exists\, a, b$: $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \quad (**) \\ (*)\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b, 10) \end{cases}$

(*) $a^2+b^2 \le \min(-6a-2b; 10)$

I сл. $-6a-2b \ge 10$, тогда $a^2+b^2 \le 10$

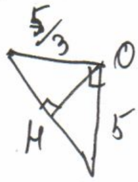
$-6a-2b=10$ прямая на пл. aOb

$b=-3a-5$



$a^2+b^2 \le 10$ — круг с центром в $O(0;0)$ и радиусом $\sqrt{10}$

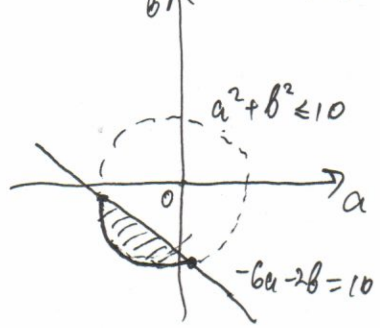
Пусть $OH = \rho(O(0;0);\ l: -6a-2b=10)$



имеем прямоугол. треугольник

$$OH = \frac{5\cdot\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{25}{9}+25}} = \frac{\frac{25}{3}}{\frac{\sqrt{25+25\cdot 9}}{3}} = \frac{\frac{25}{3}}{\frac{5}{3}\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Т.е. круг $a^2+b^2 \le 10$ пересек. прямую $-6a-2b=10$



Т. пересечен.: $\begin{cases} b=-3a-5 \\ a^2+b^2=10 \end{cases}$

$a^2+9a^2+30a+25=10$

$10a^2+30a+15=0$

$2a^2+6a+3=0$

$\frac{D}{4} = 9-6=3$

$\left[\begin{array}{l} a = \frac{-3-\sqrt{3}}{2} \\ a = \frac{-3+\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

$\Leftarrow$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\frac{-3-\sqrt{3}}{2} \\ b=-3a-5 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{-3+\sqrt{3}}{2} \\ b=-3a-5 \end{cases} \end{array}\right.$

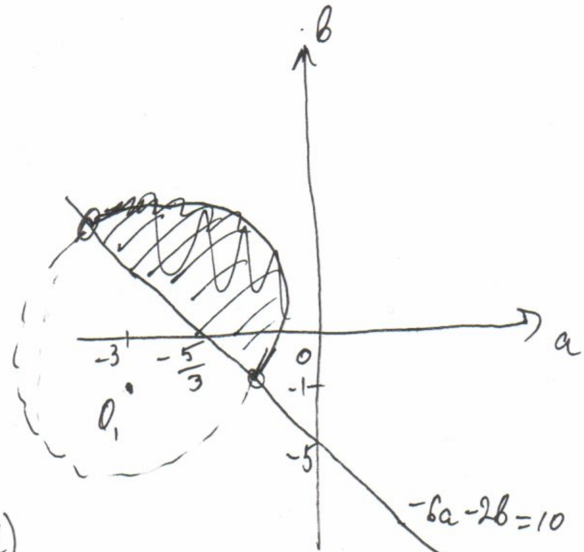
Чистовик 8

II сл. $-6a-2b<10$, т. е. $a^2+b^2 \leq -6a-2b$

$a^2+6a+b^2+2b \leq 0$

$(a+3)^2+(b+1)^2 \leq 10$

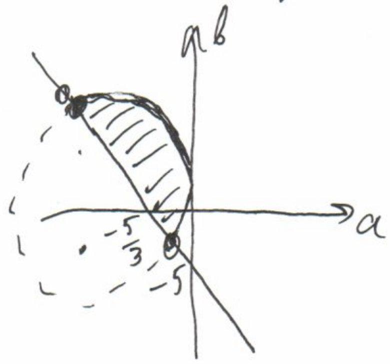
Круг с центром $(-3;-1)$ и радиусом $\sqrt{10}$ ~~без окружности~~ с тем же центром и радиусом



$O_1(-3;-1)$

$$\rho(O_1; l: -6a-2b-10=0) = \frac{|18+2-10|}{\sqrt{36+4}} = \frac{10}{2\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Значит данный ~~круг без окруж.~~ пересекает прям. $-6a-2b=10$



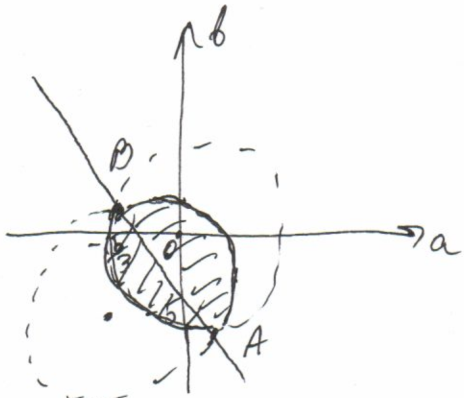
т. пересеч.:
$$\begin{cases} b=-3a-5 \\ \cancel{(a+3)^2+(b+1)^2=10} \\ a^2+6a+b^2+2b \leq 0 \end{cases}$$

$a^2+6a+9a^2+30a+25+\ldots-6a-10=0$

$10a^2+30a+15=0$

Т.е. имеем картину:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\frac{-3-\sqrt{3}}{2} \\ b=\frac{9+3\sqrt{3}}{2}-5 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{-3+\sqrt{3}}{2} \\ b=\frac{9-3\sqrt{3}}{2}-5 \end{cases} \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} a=\frac{-3-\sqrt{3}}{2} \\ a=\frac{-3+\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$



$B\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{2}; \frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)$

$A\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2}; \frac{-3\sqrt{3}-1}{2}\right)$

Тогда из (**) Необходимо найти все т. $(x;y)$ расстояние от которых до данного множества т. $(a;b)$ было не больше $\sqrt{10}$

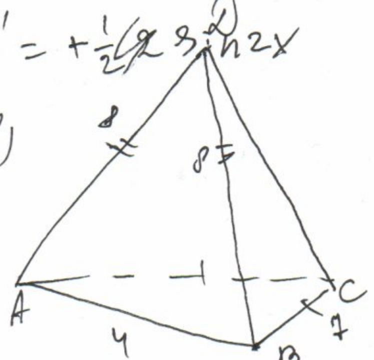
Черновик 1

$S \Leftarrow a_1 \; a$ $\quad a_n \div$ $\quad 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$

$d>0 \quad d \in \mathbb{Z} \quad a_1 \in \mathbb{Z}$ $\quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\quad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ $\quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

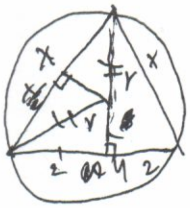
$(-\frac{1}{2}\cos^2 x)' = +\frac{1}{2}\sin 2x$

$$S = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{a_1 + a_1 + 8d}{2} \cdot 9 = 9(a_1 + 4d)$$

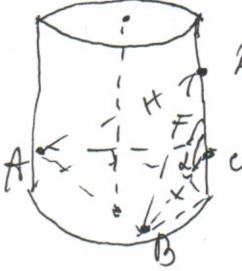


$$a_5 a_{18} > 9(a_1 + 4d) - 4$$

$$a_{10} a_{13} < 9(a_1 + 4d) + 60$$

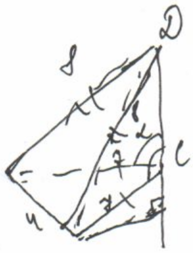


$$\begin{cases} (a_1 + 4d)(a_1 + 17d) > 9a_1 + 36d - 4 \\ (a_1 + 9d)(a_1 + 12d) < 9a_1 + 36d + 60 \end{cases}$$



$(\sqrt{x^2-4} - r)^2 + 4 = r^2$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 > 9a_1 + 36d - 4 \\ a_1^2 + 21a_1 d + 108d^2 < 9a_1 + 36d + 60 \end{cases}$$



$x^2 - 4 - 2\sqrt{x^2-4}\,r = r^2$

$$40d^2 < 64$$

$$d^2 < \frac{64}{40}$$

$1 \vee \frac{2}{5}\sqrt{10}$ $\quad 2\sqrt{x^2-4}\,r = x^2$ $\quad d < \frac{8}{2\sqrt{10}}$ $\quad d \in (0; \frac{2\sqrt{10}}{5})$

$2{,}5 \vee \sqrt{10}$ $\quad r = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-4}}$ $\quad d > -\frac{8}{2\sqrt{10}}$ $\quad d>0$

$6{,}25 < 10$

$d = 1$

$2 \vee \frac{2}{5}\sqrt{10}$

$$a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + 36 - 4$$

$5 \vee \sqrt{10}$

$$a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0$$

$25 > 10$ $\quad CD^2 - (64-49) = -15$

$$(a_1 + 6)^2 > 0$$

$3038 : 49 = 62$; $\quad 175 \times 7 = 735$; $\quad 17 \times 4 = 68$; $\quad 15 \times 7 = 105$

$$a_1^2 + 21a_1 + 108 < 9a_1 + 36 + 60$$

$108 - 96 = 12$

$$a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 - 12 = 24$$

$3038 : 2 = 1519$; $\quad 12 \times 9 = 108$; $\quad 64 - 49 = 15$

$$\cos \angle BCD = \frac{49 + x^2 - 64}{2 \cdot 7 \cdot x} = \frac{x^2 - 15}{14x}$$

$49 \times 47 = 2303$

$\sqrt{3038} = 55$; $\quad 25$; $\quad 538$; $\quad 525$; $\quad 1300$; $\quad 1101$; $\quad 105 \times 5$

Черновик 2.

$(x;y)$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ \end{cases}$$

$$\frac{25}{9}+\frac{25\cdot 9}{9}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104302**

ID профиля: **376796**

Вариант 24

Чистовик 1

№ 6 $\triangle ABC$ - остроугольн.

$\omega(O;R)$ описан. около $\triangle ABC$ окруж.

$\omega_1(O_1;R_1)$ проходит через (·)O; (·)A; (·)C

$\omega_1 \cap [BC] = \{C; P\}$

l_1 и l_2 - касат. к ω

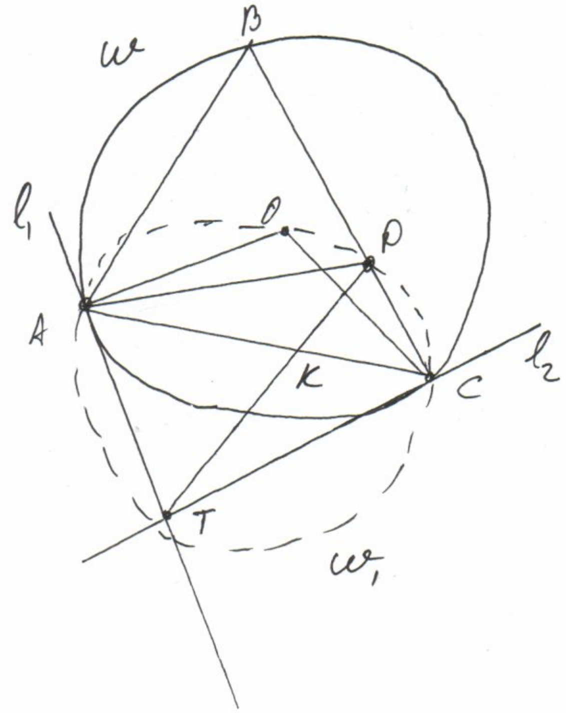
(·)$A \in l_1$; (·)$C \in l_2$

$l_1 \cap l_2 =$ (·)T

$[TP] \cap [AC] =$ (·)K

$S_{\triangle APK} = 16$

$S_{\triangle CPK} = 14$



а) Заметим, что $\angle AOC$ (вписан.) и $\angle APC$ (вписан.) опираются на одну и ту же дугу в ω_1, т.е. $\angle AOC = \angle APC$.

$\angle AOC$ опирается на меньшую дугу $\breve{AC}$ как центральн. угол.

Пусть т.о. $\angle AOC = \alpha = \angle APC$

Тогда $\angle ABC$, вписан. угол, опирающ. на меньшую дугу $\breve{AC}$ в ω, равен $\frac{\alpha}{2}$; $\angle ABC = \frac{\alpha}{2}$

Также $\angle ACT$ и $\angle CAT$ равны половине малой дуги $\breve{AC}$ как углы между хордой и касательн. к ω, проходящих через общую точку. Т.е. $\angle ACT = \angle CAT = \frac{\alpha}{2}$

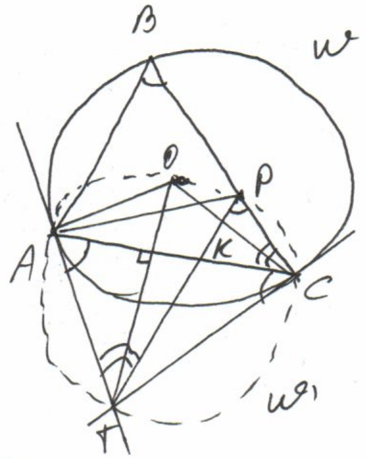
Тогда в $\triangle ATC$: $\angle ATC = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 180° - \alpha$

Тогда в 4х угольнике APCT: $\angle ATC + \angle APC = 180° - \alpha + \alpha = 180°$,

т.е. APCT можно вписать в окруж.. А т.к. (·)A, (·)P и (·)C принадлежат ω_1, то (·)$T \in \omega_1$

→ к Чистовику 2

Чистовик 2.



п. а) Заметим, что в w, $\angle TAC$ и $\angle TPC$ опираются на одну и ту же дугу как вписан. $\Rightarrow \angle TAC = \angle TPC$

Тогда $\angle TAC = \angle ABC = \angle TPC$ (оба равны $\frac{\alpha}{2}$)

$\angle ACB$ - общий $\Big|$ по двум углам $\Rightarrow$ $\Delta ABC \sim \Delta PKC$

Тогда по св-ву:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CPK}} = \left(\frac{AC}{CK}\right)^2$$

А т.к. ~~для~~ у ΔAPK и ΔCPK общая высота к AK и CK соответс.:

$$\frac{S_{\Delta APK}}{S_{\Delta CPK}} = \frac{AK}{CK} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}; \quad \text{т.е. } \frac{CK}{AC} = \frac{7}{15}$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CPK}} = \frac{15^2}{7^2} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{14 \cdot 15^2}{7^2} = \frac{2 \cdot 225}{7} = \frac{450}{7}$$

б) Заметим, что вписан. углы $\angle ATP$ и $\angle ACP$ равны (в w' опираются на одну и ту же дугу)

$\angle ATP = \angle ACP$

$\angle TAK = \angle ABC$ $\Big| \Rightarrow \Delta ATK \sim \Delta ABC$

Чистовик 3

№5.

$$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right); \quad \log_{(x+1)^2}(29-x); \quad \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$$

x? два равны, третье больше на 1

$$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)^2$$

при $29-x>0$; $29-x\neq 1$; $\frac{x}{7}+7>0$

$\cancel{\log_{(x+1)^2}(29-x)}$

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = 2\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1) =$$

$$= \log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(x+1)^2$$

при $\frac{x}{7}+7>0$; $\frac{x}{7}+7\neq 1$; $-x-1>0$

Тогда пусть $a = 29-x$

$b = \frac{x}{7}+7$

$c = (x+1)^2$

Тогда имеем: $\log_a b^2$; $\log_c a$; $\log_b c$

I сл.

$$\begin{cases} \log_a b^2 = \log_c a \\ \log_b c = \log_c a + 1 \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} \cancel{\log_a b^2} = \frac{\ln b^2}{\ln a} = \frac{\ln a}{\ln c} \\ \frac{\ln c}{\ln b} = \frac{\ln ac}{\ln c} \end{cases}}$$

$$\begin{cases} \ln b^2 \ln c = \ln^2 a \\ \ln^2 c = \ln b \cdot \ln a \end{cases}$$

$\cancel{\ln^2 a = \sqrt{\ln b^2 \ln c}}$

$$\begin{cases} \ln b^2 \ln c = \ln^2 a \\ \ln^2 c = \ln b(\ln a + \ln c) \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} 2\ln b \ln c = \ln^2 a \\ \ln^2 c = \ln b \ln a + \frac{\ln^2 a}{2} \end{cases}}$$

$$\begin{cases} \ln c = \frac{\ln^2 a}{2\ln b} \\ \frac{\ln^4 a}{4\ln^2 b} = \ln b \cdot \ln a + \frac{\ln^2 a}{2} \quad | \cdot 4\ln^2 b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln c = \frac{\ln^2 a}{2\ln b} \\ \ln^4 a = 4\ln^3 b \ln a + 2\ln^2 a \ln^2 b \end{cases}$$

$\begin{cases} \ln c = \dfrac{\ln^2 a}{2\ln b} \\ \ln^3 a = 4\ln^3 b + 2\ln a \ln^2 b \end{cases}$ Чистовик 4

Два логарифма равны либо: 1) если $a > 1$ при $b^2 = a = 1$

$0 < c < 1$ невозможно

($0 < a < 1$, $c > 1$ аналог.)

2) если $a = c$

$a = b^2$

$\begin{cases} 29 - x = x^2 + 2x + 1 \\ 29 - x = \dfrac{x^2}{49} + 2x + 49 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + 3x - 28 = 0 \\ \dfrac{x^2}{49} + 3x + 20 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -7 \\ x = 4 \end{array} \right. \\ \dfrac{x^2}{49} + 3x + 20 = 0 \end{cases}$ $\varnothing$

II сл. $\begin{cases} \log_a b^2 = \log_b c \\ \log_{c} a = \log_b c+1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ аналог. 1) $a > 1$, $0 < b < 1$ или $0 < a < 1$, $b > 1$ $b^2 = c = 1$ невозможно

2) если $a = b$

$b^2 = c$

$\begin{cases} 29 - x = \dfrac{x}{7} + 7 \\ \dfrac{x^2}{49} + 2x + 49 = x^2 + 2x + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{8}{7}x = 22 \\ \dfrac{48}{49}x^2 = 48 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \dfrac{7 \cdot 22}{8} \\ x^2 = 49 \end{cases}$ $\varnothing$

Чистовик 5

№4. $НОД(a;b;c)=33$

$НОК(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15}$

~~a; b~~ $a=33k_a$; $(3^{19}\cdot 11^{15}) \vdots (33k_a)$ $(3^{18}\cdot 11^{14}) \vdots k_a$

$b=33k_b$; $(3^{19}\cdot 11^{15}) \vdots (33k_b)$ $(3^{18}\cdot 11^{14}) \vdots k_b$

$c=33k_c$; $(3^{19}\cdot 11^{15}) \vdots (33k_c)$ $(3^{18}\cdot 11^{14}) \vdots k_c$

~~если~~ $\cancel{\begin{cases} k_a>1 \\ k_b>1 \\ k_c>1 \end{cases}}$ ~~то~~ $\cancel{НОД(a;b;c)\neq 33}$

~~т.к. $k_a; k_b; k_c$ — произведение степеней 3 и 11, то~~

k_a; k_b и k_c — произведение степеней 3 и 11.

k_a, k_b и k_c одновремено не могут делится на 11 ~~..~~ (иначе $НОД(a;b;c)\neq 33$). Аналогично и с делимостью на 3.

~~Тогда Пусть k_a и k_b делятся на 3, а k_c нет.~~

Т.к. $НОК(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{5}$, то ~~как~~ хотя бы одно (но не более двух) число из k_a; k_b и k_c равно 3^{18}, аналог и с 11^{14}

Пусть ~~a~~ $k_a=3^{18}\cdot t$; Тогда либо: $k_a=3^{18}$ (т.е. $t=1$

~~либо $k_a=3^{18}$.~~

$\begin{cases} k_b=11^{14} \\ k_c=11^{14} \end{cases}$

$\begin{cases} k_b=11^{14}\cdot 3^{18} \\ k_c=11^{14} \end{cases}$

$\begin{cases} k_c=11^{14}\cdot 3^{18} \\ k_b=11^{14} \end{cases}$

$\begin{cases} k_b=1 \\ k_c=11^{14} \end{cases}$ $\cancel{\begin{cases} k_b=1 \\ k_c=11^{14}\cdot 3^{14} \end{cases}}$

$\Rightarrow$

$\begin{cases} k_c=1 \\ k_b=11^{14} \end{cases}$ $\cancel{\begin{cases} k_c=1 \\ k_b=11^{14}\cdot 3^{18} \end{cases}}$

Чистовик 6

Пусть $k_a \not\vdots 11$

Тогда либо $k_b = 11^{14} \cdot l$

либо $k_c = 11^{14} \cdot m$

Пусть $k_b \not\vdots 3$ и $k_c \not\vdots 3$ Тогда либо $k_b = 11^{14}$ k_c любая степень 11 от 11^0 до 11^{14}

либо наоборот.

Т.е. всего $2 \cdot 15$ вар.

Пусть $k_b \vdots 3$ $k_c \not\vdots 3$ Тогда $2 \cdot 15 \cdot 19$ вариантов

(k_b делится на любую степень 3 от 3^0 до 3^{18})

Если $k_b \not\vdots 3$ $k_c \vdots 3$ Аналогично, т.е. $2 \cdot 15 \cdot 19$ вариантов

Если же $k_a \vdots 11$, тогда k_a делится на любую ст. 11 от 11^0 до 11^{14} то либо $k_b = 3^i$, $i \in [0; 18]$, $i \in \mathbb{Z}$

либо $k_c = 3^j$, $j \in [0; 18]$, $j \in \mathbb{Z}$

либо $k_b = 1$; тогда $k_c = 11^{x} 3^{p}$, либо $k_c = 1$; $k_b = 11^{x} 3^{p}$

Т.е. всего $15 \cdot 2 \cdot 19 +$

$+ 15 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 15$

Аналогично, если $k \vdots 11$, но $k \not\vdots 3$ $(2 \cdot 15 + 2 \cdot 15 \cdot 19 + 2 \cdot 15 \cdot 19$ вариантов)

Итого: $2 \cdot (2 \cdot 15 + 2 \cdot 15 \cdot 19 + 2 \cdot 15 \cdot 19) + 15 \cdot 2 \cdot 19 + 15 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 15$ вариантов

Черновик 1

$a; b; c$

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=33 \\ НОК(a;b;c)=3^{13}\cdot 11^{15} \end{cases}$$

$a\cdot b\cdot c = 33\cdot 3^{13}\cdot 11^{15} = 3^{20}\cdot 11^{16}$

$3^{17}; 11^{1}$

$a : 33 = 33k$ $\quad 3\cdot 11$

$b : 33 = 33t$ $\quad 3\cdot 11$

$c : 33 = 33m$ $\quad 3\cdot 11$

$a = 3\cdot 11\cdot \cancel{3^{7}\cdot 11^{3}}$

$b = 3\cdot 11\cdot 3^{6}\cdot 11^{4}$

$c = 3\cdot 11\cdot 3^{4}\cdot 11^{6}$

$НОД(24;12;18)=6$

$НОК(24;12;18)=72$

$24\cdot 3 = 72$

$72\cdot 86 = 642$

$x^3 = 4y^3 + 2xy^2$

$2y^2(2y+x)$

$24\cdot 12 = 48 + 24 = 288$

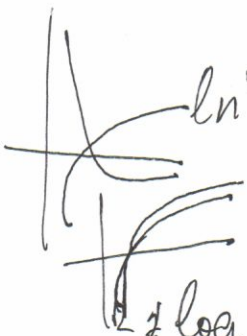
$288\cdot 18 = 2304 + 288 = 3184$

$24\cdot 12\cdot 18$

$3^{13}\cdot 11^{15} : 33k$

t

m



$\ln^4 a + 4\ln^3 b\ln a = 8\ln^3 b\ln a + 2\ln^2 a\ln^2 b$

$8-4$ $\quad \ln a(\ln^3 a + 4\ln^3 b) = 2\ln a\ln^2 b(4\ln b + \ln a)$

$\frac{1}{2}\log_{(23-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right); \quad \frac{1}{2}\log_{(x-1)}(23-x); \quad 2\log_{\frac{x}{7}+7}(x-1)$

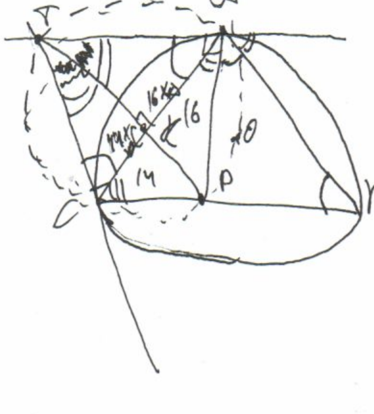
$\ln^3 a = 4\ln^3 b + 2\ln a\ln^2 b$

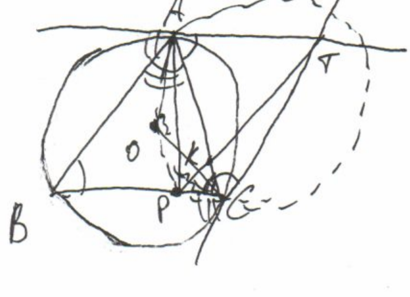
$\ln a(\ln^2 a - 2\ln^2 b) = 4\ln^3 b$

$\log_{(23-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)^2; \quad \log_{(x-1)^2}(23-x); \quad \log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)^2}(x+1)^4$

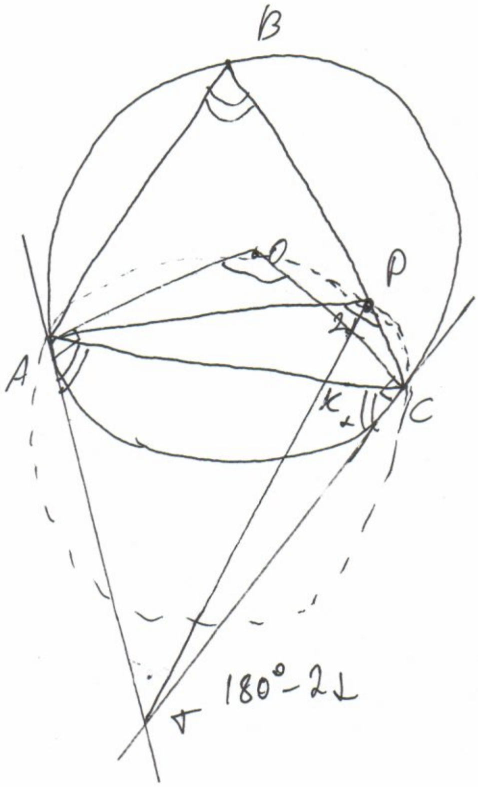
$\log_a b^2; \quad \log_{c^2} a; \quad \log_{b^2} c^4$

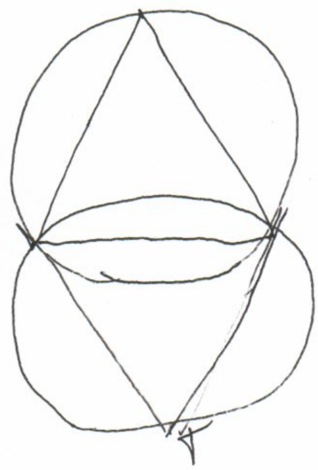
$\log_a b^2 = \log_{b^2} c^4 \quad \frac{\log_a c^4}{\log_a b^2} \quad \log_a^2 b^2 = \log_a c^4$





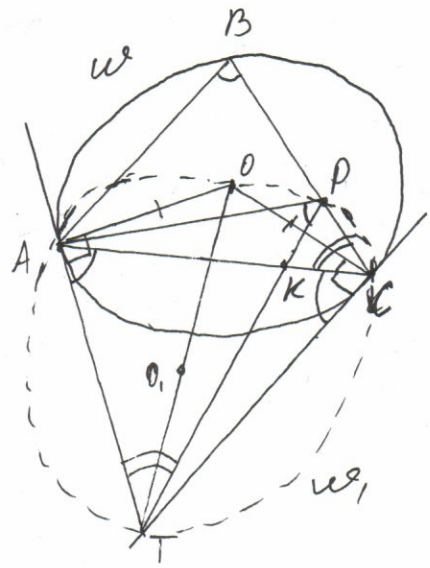
Черновик 2.





AT·AB = AP·AC = AK·BC

~~Чистовик~~ Черновик 3



Т. к. $\angle TAO = \angle TCO = 90^\circ$ (~~радиус~~ AO и CO радиусы AT и CT касател.),

то OT - диаметр $ω_1$,

т.е. $O_1 \in OT$

Заметим также, что в $ω_1$:

$\angle ACP$ и $\angle ATP$ - вписан., опирающ. на одну и ту же дугу $\Rightarrow \angle ATP = \angle ACP$

$15^2 = 225$

$\times\ 2$

450

Имеем:

$\angle ATP = \angle ACB$

$\angle TAC = \angle ABC$ (оба равны $\frac{\alpha}{2}$) $\Big| \Rightarrow$ по двум углам

$\triangle ABC \sim \triangle AKT$

По определ. подобия:

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AT}{BC} = \frac{TK}{AC}$$

Т.к. у $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ общая высота к AK и KC соответствен.:

$$\frac{AK}{CK} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}\ ;\ \text{т.е. } AK = \frac{8}{15} AC$$

Также углы $\angle APT = \angle ACT$ (в $ω_1$ опираются на одну и ту же дугу как вписан.)

т.е. $\angle APT = \angle ACT = \angle ABC \Rightarrow$ по двум углам ($\angle ATP = ACB$)

$\triangle ABC \sim ATP$.

По определ. подобия:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AT}{AC} = \frac{TP}{BC}$$