Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104292**

ID профиля: **368796**

Вариант 24

Чистовик 1

№1 Пусть a_1 - первый член прогрессии, d - разность пр-сии; $d>0$

$a_1=a_1;\ a_2=a_1+d;\ a_3=a_1+2d;\ \dots$

$$S=a_1+a_2+\dots+a_9=\frac{a_1+(a_1+8d)}{2}\cdot 9=9(a_1+4d)$$

$$a_5a_{18}=(a_1+4d)(a_1+17d)=a_1^2+21a_1d+68d^2>9(a_1+4d)-4 \quad (1)$$

$$a_{10}a_{13}=(a_1+9d)(a_1+12d)=a_1^2+21a_1d+108d^2<9(a_1+4d)+60 \quad (2)$$

$$\begin{array}{l} -(2)\Leftrightarrow \\ (1): \end{array}\begin{cases} -a_1^2-21a_1d-108d^2>-9(a_1+4d)-60 \\ a_1^2+21a_1d+68d^2>9(a_1+4d)-4 \end{cases} \Rightarrow \oplus: \boxed{-40d^2>-64}\ (3)$$

(3): $40d^2<64 \Rightarrow$ т.к. $a_1\in\mathbb{Z}$; $a_2=(a_1+d)\in\mathbb{Z}\Rightarrow d\in\mathbb{Z}, d>0\Rightarrow d=1$, т.к.

$d^2=\frac{64}{40}<2.$

$\underline{d=1}$

(1): $a_1^2+21a_1+68-9a_1-36+4>0.$

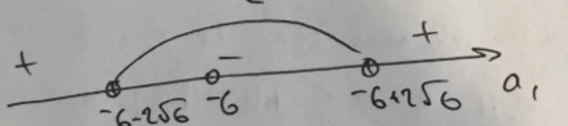
$a_1^2+12a_1+36=(a_1+6)^2>0$, если $a_1+6\neq0$, т.е. $\underline{a_1\neq-6}$.

(2): $a_1^2+21a_1+108-9a_1-36-60<0.$

$a_1^2+12a_1+12<0.$

Найдем нули:

$$a_1=\frac{-12\pm\sqrt{144-48}}{2}=-6\pm2\sqrt6$$



$-10>-6-2\sqrt6>-11$

$-4>-2\sqrt6>-5.$

$2<\sqrt6<2{,}5$

$4<6<6{,}25.$

$-2<-6+2\sqrt6<-1$

$4<2\sqrt6<5.$

$2<\sqrt6<2{,}5$

$4<6<6{,}25.$

$a_1\in(-6-2\sqrt6;\,-6+2\sqrt6)\setminus\{-6\}$, но $a_1\in\mathbb{Z}\Rightarrow$

a_1 может принимать такие значения: $\boxed{-10;-9;-8;-7;-5;-4;-3;-2}$

Любое из них удовл. нер-вам при $d=1$. Отв.:

~~Чистовик~~ 3

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10\\ a^2+b^2\le \min(-6a;-2b;10)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10\\ a^2+b^2\le 10\\ a^2+b^2\le -6a-2b\end{cases}$$

$a^2+b^2\le 10$ — круг с центром в т. $(0,0)$ и радиусом $\sqrt{10}$.

$a^2+b^2\le -6a-2b$.

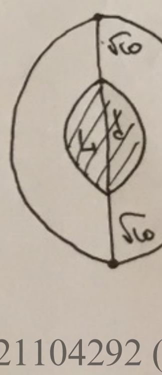
$a^2-6a+9+b^2-2b+1=10$

$(a-3)^2+(b-1)^2\le 10$ — круг с центром $(3,1)$ и радиусом $\sqrt{10}$.

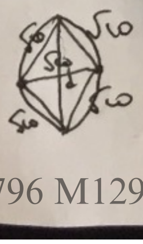
все возможные точки, где ~~могут~~ могут располагаться a и b. Пусть это мн-во L

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 10$ — круги с центром в т. a и b, где $a,b\in L$. т.е расстояние от x,y до L не больше $\sqrt{10}$, ~~т.е наша фигура M получается «увеличением» L~~

~~т.к.~~ центры окр лежат ~~на~~ на второй окр. т.к. $3^2+1^2=10$. и M получается из L «увеличением» во все стороны на $\sqrt{10}$. $M\sim L \Rightarrow$ Площадь M относится к площади L как квадрат коэф. подобия k.



$k=\dfrac{d+2\sqrt{10}}{d}$, где d — Расстояние м/у точками пересечения окружностей, определяющих ГМТ a и b.

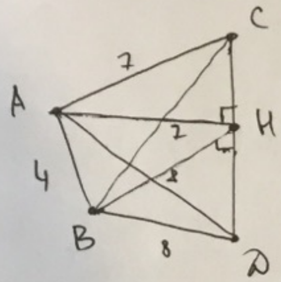


$$d=2\cdot\sqrt{10-\frac{10}{4}}=2\cdot\sqrt{2{,}5\cdot 3}=\sqrt{30}$$

$$k=1+\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt3\sqrt{10}}=1+\frac{2}{\sqrt3}$$

Чистовик 2

Задача 2



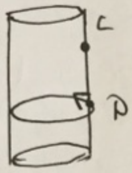
$AB = 4$; $AC = CB = 7$; $AD = DB = 8$.

1) Пусть M – ~~точка~~ середина AB.

CM – медиана => высота, т.к $AC = CB$.

Аналогично $DM \perp AB \Rightarrow AB \perp CMD \Rightarrow$ $AB \perp CD$.

$CD \parallel$ оси цилиндра => $CD \perp$ поп. сечениям цилиндра:



=> $AB \parallel$ поп. сечениям цилиндра => лежит в одном из них, т.е радиус цилиндра не меньше, чем $\frac{AB}{2} = 2$.

Достигается ли это значение? Если да, то узнаем при каких CD из решения задачи.

Проведем высоты AH_1 и BH_2 треугольников ACD и BDC соотв, т.к $\triangle CAD = \triangle CBD$ по трем сторонам, то $H_1 = H_2 = H \Rightarrow$

ABH и есть плоскость поперечного сечения, т.к $CD \perp BH$, $CD \perp AH$.

При сечении пл-ю ABH цилиндра в сечении обр. окр. с радиусом равным радиусу цилиндра. Пусть получается окр. ω.

Пусть $CD = x$, радиус $\omega \geq \frac{AB}{2}$, минимален если AB – диаметр =>

$BH^2 + AH^2 = AB^2 = 16$. ; Пусть $HD = a$. $CH = x - a$; $BH^2 = BD^2 - HD^2 = 64 - a^2$.

$BH^2 = BC^2 - HC^2 = 49 - x^2 + 2ax - a^2$

$AH^2 = 49 - CH^2 = 49 - x^2 + 2ax - a^2$.

$64 - a^2 = 49 - x^2 - a^2 + 2ax$.

$2ax = 15 + x^2$.

$BH^2 = 64 - a^2$.

$AH^2 + BH^2 = 113 - x^2 - 2a^2 + 2ax = 16$.

$2a^2 = 112$.

$a = 2\sqrt{14}$

$BH^2 = -HD^2 + BD^2 = 64 - 56 = 8 = BC^2 - HC^2 = 49 - HC^2 \Rightarrow HC = \sqrt{41} \Rightarrow$

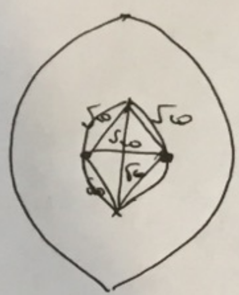
$\Rightarrow x = \sqrt{41} + 2\sqrt{14}$ При такой длине CD, при том ед!, радиус минимален.

Ответ: $CD = \sqrt{41} + 2\sqrt{14}$

Чистовик 4

№3

$K = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ Площадь М = площадь $L \cdot k^2$ =



Площадь L:

площадь ромба со стороной $\sqrt{10}$ и углом $60°$: $\cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{\cancel{2}} \cdot \sin 60° = 5\sqrt{3}$

И еще 4 площади ~~...~~ вот таких.

это площадь $\frac{1}{6}$ окр т.к. угол 60° – площадь треугольника равност. со ~~...~~ стороной $\sqrt{10}$.

$S_{окр} = \pi R^2 = 10\pi$

$\frac{1}{6} S_{окр} = \frac{5}{3}\pi$

$S_\Delta = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$S = \frac{5}{3}\pi - \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$S_L = 4S + S_{ромба} = 5\sqrt{3} + \frac{20}{3}\pi - 10\sqrt{3} =$

$= \boxed{\frac{20}{3}\pi - 5\sqrt{3}}$

$S_M = S_L \cdot k^2 = \left(\frac{20}{3}\pi - 5\sqrt{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$

P.S S_M – площадь фигуры М.

Ответ: $S_M = \left(\frac{20}{3}\pi - 5\sqrt{3}\right)\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

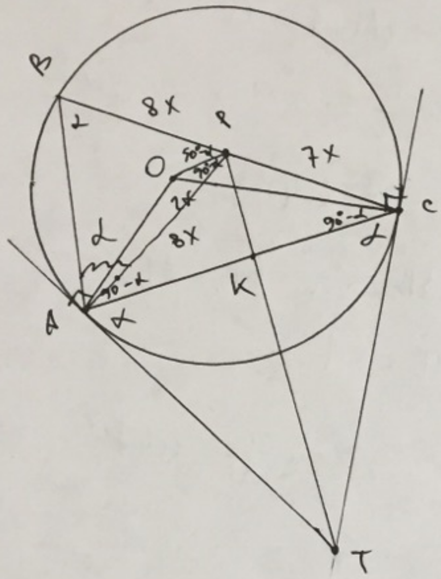
Шифр: **21104292**

ID профиля: **368796**

Вариант 24

Чистовик 1

Задача 6



1) Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle AOC = 2\alpha$, как центр, $\angle OAC = \angle OCA = 90^\circ - \alpha$.

$\angle CAT = \angle ACT = \alpha$, т.к касательная к окр. $\perp$ радиусу проведенному в т. касания $\Rightarrow \angle ATC = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow OACT$ – вписанный, т.к $\angle AOC + \angle ATC = 180^\circ$, но тогда $AOPCT$ – впис, т.к $AOPC$ – окр. по условию, т.е и там и там есть впис. ΔAOC, а треугольник можно вписать в ед. окружность. при том OT – диаметр, т.к $\angle OAT = 90^\circ$. т.к $AOPCT$ – впис, то $APCT$ впис $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle TPC = \angle TAC = \alpha$, как опирающиеся на одну дугу. $\Rightarrow PT \parallel AB \Rightarrow \dfrac{CK}{AK} = \dfrac{PC}{PB}$.

$$S_{CPK} = \frac{PK \cdot CK}{2} \cdot \sin\angle CKP = 14$$

$$S_{APK} = \frac{PK \cdot AK}{2} \cdot \sin(180^\circ - \angle CKP) = 16 \Rightarrow \frac{AK}{CK} = \boxed{\frac{8}{7} = \frac{PB}{PC}}$$

$$S_{APC} = S_{APK} + S_{CPK} = 30$$

$$\frac{S_{APC}}{S_{APB}} = \frac{\frac{AP \cdot PC \cdot \sin\angle APC}{2}}{\frac{AP \cdot PB \cdot \sin(180^\circ - \angle APC)}{2}} = \frac{PC}{PB} = \frac{7}{8}$$

$$S_{APB} = \frac{8}{7} S_{APC} = \frac{240}{7}$$

$$S_{ABC} = S_{APB} + S_{APC} = \frac{240}{7} + \frac{210}{7} = \boxed{\frac{450}{7}}$$

Шаповалов 2. (№ 8)

2) $\frac{PC}{PB} = \frac{7}{8}$; пусть $PC = 7x$; $PB = 8x$.

$\angle APO = \angle ACO = 90° - \alpha \Rightarrow \angle BAP = \alpha \Rightarrow$

$\angle APC = 2\alpha$, как внешний.

По Т. косинусов $AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP \cdot PC \cdot \cos 2\alpha =$

$= 64x^2 + 49x^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot x^2 \cos 2\alpha$.

~~По Т. косинусов $AB^2 = 2 \cdot 64y^2 - 2 \cdot 64y^2$~~

Пусть M - середина AB, $PM \perp AB$, т.к $BP = AP \Rightarrow$

$tg\alpha = \frac{PM}{MB} = \frac{3}{5}$; Пусть $PM = 3t$; $MB = 5t$.

по Т. Пифагора $PM^2 + MB^2 = PB^2 \Rightarrow 9t^2 + 25t^2 = 64x^2$

$34t^2 = 64x^2$.

$t^2 = \frac{64}{34}x^2$

$t = \frac{8x}{\sqrt{34}} \Rightarrow AB = \frac{16x}{\sqrt{34}}$

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{16x \cdot 15x \cdot \sin(arctg\frac{3}{5})}{2} =$

$120x^2 \sin(arctg\frac{3}{5}) = \frac{450}{7}$.

$x = \sqrt{\frac{450}{840\sin(arctg\frac{3}{5})}}$

$AC = \sqrt{\frac{450}{840\sin(arctg\frac{3}{5})}\left(113 - 112\cos\left(2arctg\left(\frac{3}{5}\right)\right)\right)}$

Отв: $AC = \sqrt{\frac{450}{840\sin(arctg\frac{3}{5})}\left(113 - 112\cos\left(2arctg\left(\frac{3}{8}\right)\right)\right)}$

21104292 (U368796 M1295186)

Чистовик 3

№4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c) = 33 \\ \text{НОК}(a,b,c) = 3^{17} \cdot 11^{15} \end{cases}$$

1) т.к $\text{НОК}(a,b,c)$ не содержит простых кроме 3 и 11, то a,b,c не содержат простых, кроме 3 и 11

2) т.к $\text{НОД}(a,b,c) = 3 \cdot 11$, то $a, b, c \vdots 3, 11 \Rightarrow$

$a = 3^{\alpha_1} \cdot 11^{\alpha_2}$ $\quad \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{N}$

$b = 3^{\beta_1} \cdot 11^{\beta_1}$ $\quad \max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 19$

$c = 3^{\gamma_1} \cdot 11^{\gamma_2}$ $\quad \max(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2) = 15$

теперь нас интересуют упорядоченные тройки $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ удовлетворяющие условиям написанным выше. При том ~~всего~~ троек $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$: $19^3 - 18^3$ ~~: отсюда~~ получаем это как все случаи – минус случаи, когда ни α_1 ни ~~β_1~~ ни $\gamma_1 \neq 19$.

Т.е $\alpha_1 \in \{1, 2, \ldots, 19\}$; $\beta_1 \in \{1, 2, \ldots, 19\}$, $\gamma_1 \in \{1, 2, \ldots, 19\} \Rightarrow$ всего 19^3 вариантов, вариантов, где $\alpha_1 \in \{1, 2, \ldots, 18\}$, $\beta_1 \in \{1, 2, \ldots 18\}$, $\gamma_1 \in \{1, 2, \ldots, 18\}$ – $18^3 \Rightarrow$

удовл. условию троек $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ $19^3 - 18^3$

Аналогично удовл. условиям троек $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ – $15^3 - 14^3$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Всего троек (a, b, c) – $\boxed{(19^3 - 18^3) \cdot (15^3 - 14^3)}$, т.к

разным тройкам $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ соотв. разные тройки (a,b,c)

разным тройкам $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ соотв. разные тройки (a,b,c)

Ответ: $(19^3 - 18^3)(15^3 - 14^3)$

21104292 (U368796 M1295186)

Чистовик 4

№5

$$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right);\ \log_{(x+1)^2}(29-x);\ \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$$

1) 1-й случай

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)+1$

$x=-7$ подходит.

Действ:

$\log_6(6)=\log_{36}36$

$\log_{\sqrt{6}}(6)=\log_6(6)+1$

Больше решений нет, т.к

~~$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{(x+1)^2}(29-x)$ не более 1-го точки.~~

Аналогично 2) $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)+1$ имеет не более 1-го корня, $x=-7$ подх $\Rightarrow$ это ед. решение.

ОДЗ: $\sqrt{29-x}>0$ $x<29.$

$\sqrt{29-x}\neq 1\Rightarrow x\neq 28.$

$\frac{x}{7}+7>0\Rightarrow x>-49$

$\frac{x}{7}+7\neq 1\Rightarrow x\neq -42$

$-x-1>0\Rightarrow x<-1$

$(x+1)^2\neq 1\Rightarrow x\neq 0;\ x\neq -2$

$x\in(-49;-1)\setminus\{-42;-2\}$

2) $\underbrace{\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)}_{f(x)}=\underbrace{\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)}_{g(x)}$

$\log_{\sqrt{29-x}}(x/7+7)+1=\log_{(x+1)^2}(29-x)$

Не больше 1-го корня, т.к

при увел x $f(x)\uparrow$, т.к $29-x>1$

$(\sqrt{29-x}\downarrow,\ \frac{x}{7}+7\uparrow)$ $\uparrow$

$g(x)$ при увел x $\downarrow$, т.к $\sqrt{\frac{x}{7}+7}$

$(-x-1)\downarrow$ Но реш. нет,

т.к ф-ии расходятся

3) $\log_{(x+1)^2}(29-x)=\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{(x+1)^2}(29-x)$

Аналогично 2) не более 1-го корня.

Реш. нет, т.к ф-ии расходятся

$\log_{\sqrt{x+7}}(-x-1)=2\log_{x+7}(-x-1)$

$\log_{(x+1)^2}(29-x)=\frac{1}{2}\log_{|x+1|}(29-x)=$

$=\frac{1}{2}\log_{-x-1}(29-x)$

Ответ: $x=-7$

21104292 (U368796 M1295186)