Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

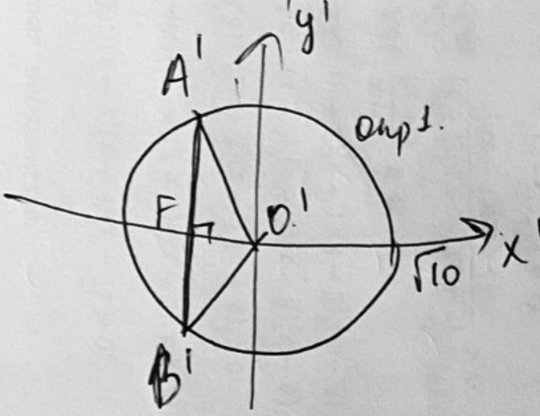
Шифр: **21104290**

ID профиля: **877787**

Вариант 24

Найдём расстояние Черновик.

$$\rho(O|y)=\frac{|3x+y+5|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$



выполним поворот системы координат так чтобы $A'B' \to AB$

$A'B' \perp OX'$

$FO'=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$A'O'=R=\sqrt{10}$

т.к. $FO'=\frac{1}{2}A'O' \Rightarrow \angle FO'A=60^\circ$

$\angle A'O'B'=120$

$\Rightarrow$ прямая $y=-3x-5$ отсекает от окружн-ти $\frac{120^\circ}{360}=\frac{1}{3}$

$S_{\text{фигуры}}M = 2S_{\text{сегмента}} = 2\cdot\frac{1}{3}\pi R^2 = \frac{2}{3}\pi(2\sqrt{10})^2 = \frac{80\pi}{3}.$

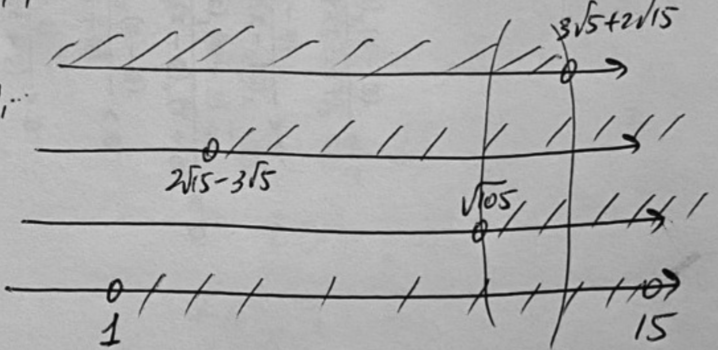
Т.к. △ BCD и △ ACD должны сущ-ть ⇒ по нер-ву в △

Черновик

$$\begin{cases} 7+x>8 \\ 8+x>7 \\ 8+7>x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>-1 \\ x<15 \end{cases} \Rightarrow 1<CD<15.$$

Итого:

$$\begin{cases} x<3\sqrt{5}+2\sqrt{15} \approx 14,\dots \\ x>2\sqrt{15}-3\sqrt{5} \approx 1,\dots \\ x>\sqrt{105} \approx 10,\dots \\ 1<x<15 \end{cases}$$

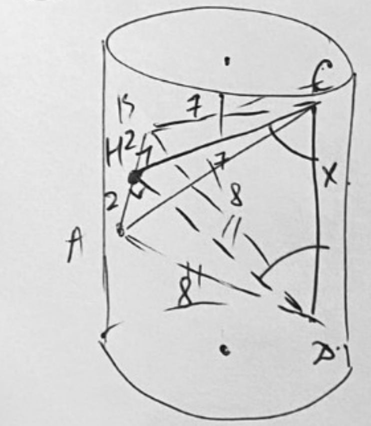


Отв: $CD \in (\sqrt{105}; 3\sqrt{5}+2\sqrt{15})$

$\frac{1}{3}$

(2)

Черновик.



$AD = BD = 8$

$AC = BC = 7$

$AB = 4.$

$R_{\text{осн цил}} \to$ наим.

CD - ?

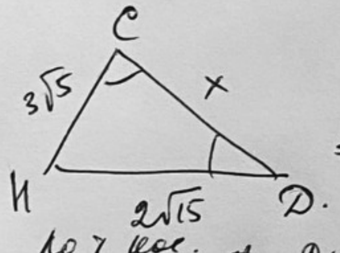
$A, B, C, D \in$ бок. пов.

Реш-е: чтобы ~~окр-ть~~ осн цил - имело наим радиус, необходимо, чтобы $\angle HCD$ и $\angle CDH$ - наим.

рассм $\triangle HCD$: $HC = \sqrt{AC^2 - AH^2}$ по т Пиф т.к. DH и CH - высоты в р/б $\triangle$

$HC = \sqrt{49-4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$DH = \sqrt{DA^2 - AH^2} = \sqrt{64-4} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$



$\Rightarrow$ чтобы $\angle C$ и $\angle D$ - наим $\Rightarrow$ $\angle H$ - наиб.

наиб $\angle \Rightarrow > 90^\circ \Rightarrow \cos\angle < 0.$

по т кос.

$\cos\angle H = \dfrac{DH^2 + CH^2 - CD^2}{2 \cdot DH \cdot CH} = \dfrac{60+45-x^2}{2 \cdot 2\sqrt{15} \cdot 3\sqrt{5}} < 0.$

$\dfrac{105 - x^2}{12\sqrt{75}} < 0. \quad | \cdot 12\sqrt{75}$

$105 - x^2 < 0$

$x^2 - 105 > 0$

$+ \quad - \quad +$

$-\sqrt{105} \quad \sqrt{105}$

$x > 0 \Rightarrow CD > \sqrt{105}$

по нер-ву $\triangle \Rightarrow$
$$\begin{cases} CD < CH + HD \\ CD < 3\sqrt{5} + 2\sqrt{15} \\ 3\sqrt{5} + CD > 2\sqrt{15} \\ 2\sqrt{15} + CD > 3\sqrt{5}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3\sqrt{5} + 2\sqrt{15} \\ x > 2\sqrt{15} - 3\sqrt{5} \Rightarrow \\ x > 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5}. \end{cases}$$

$(2\sqrt{15})^2 \quad (3\sqrt{5})^2$

$60 > 45 \Rightarrow.$

$$\begin{cases} x < 3\sqrt{5} + 2\sqrt{15} \\ x > 2\sqrt{15} - 3\sqrt{5} \\ x > \sqrt{105} \end{cases}$$

№ 2. Черновик

$60 : 4 = 15$

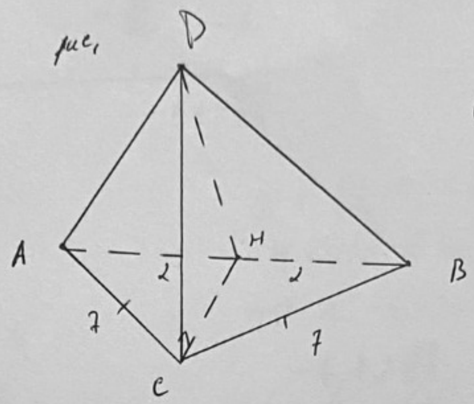
$16 \times 5 = 80$

60

$64 - 49 = 15$

$60 - 45 = 5$

рис 1

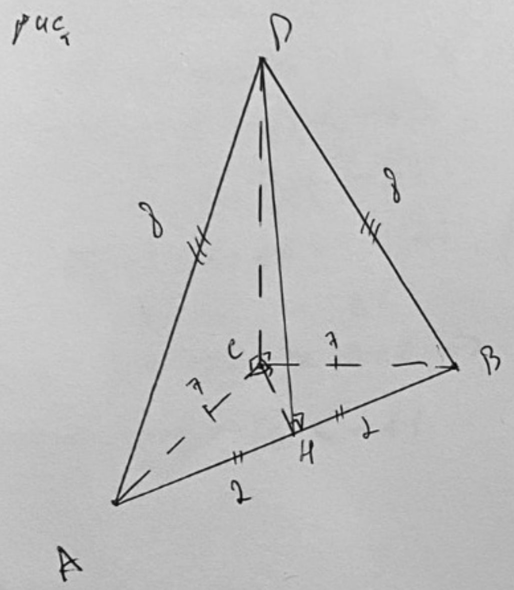


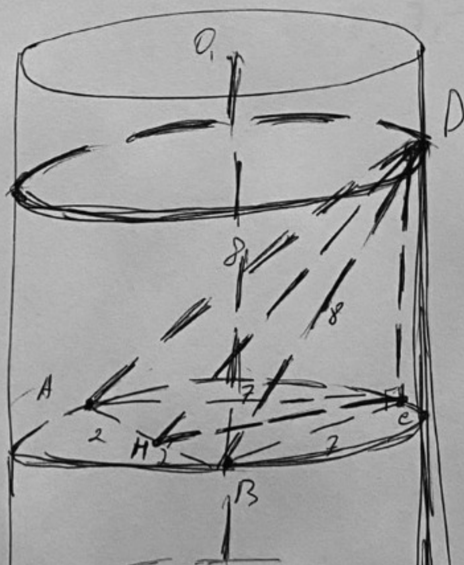
$DH = 2\sqrt{15}$

$CH = 3\sqrt{5}$

$CD = \sqrt{15}$

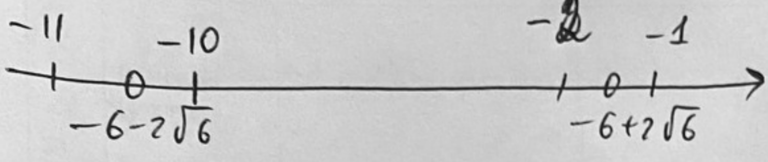
рис 2





Черновик.

$$\begin{cases} a_1 \neq -6. \\ a_1 \in (-6-2\sqrt{6}; -6+2\sqrt{6}) \end{cases}$$



$\sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9}$

$2 < \sqrt{6} < 3 \mid \cdot(-2)$

$-6 < -2\sqrt{6} < -4 \mid -6$

$-12 < -6-2\sqrt{6} < -10.$

$(-6-2\sqrt{6})^2 \vee (-11)^2.$

$36+24\sqrt{6}+24 \vee 121 \mid -$

$24\sqrt{6} \quad 61$

$3456 > 3721 \Rightarrow$

$-6-2\sqrt{6} < -11$

$2 < \sqrt{6} < 3 \mid \cdot 2$

$4 < 2\sqrt{6} < 6 \mid -6$

$-2 < -6+2\sqrt{6} < 0$

$-6+2\sqrt{6} \quad -1 \mid +6$

$2\sqrt{6} \quad 5$

$24 < 25$

$a_1 = \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2\}.$

(1) $a_5 a_{18} > S-4$ $\qquad a_5 = a_1 + 4d$ Черновик

$a_{10} a_{13} < S+60$ $\qquad a_{18} = a_1 + 17d$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$a_{13} = a_1 + 12d$

$(a_1 + 4d)(a_1 + 17d) > S - 4$

$a_1^2 + 17a_1 d + 4a_1 d + 68d^2 > S - 4$

$a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 > S - 4$

$a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 + 4 > S$

$(a_1 + 9d)(a_1 + 12d) < S + 60$

$a_1^2 + 12a_1 d + 9a_1 d + 108d^2 < S + 60$

$a_1^2 + 21a_1 d + 108d^2 - 60 < S$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 + 4 > S \\ a_1^2 + 21a_1 d + 108d^2 - 60 < S \end{cases} \Rightarrow$$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{21a_1 d} + 108d^2 - 60 < \cancel{a_1^2} + \cancel{21a_1 d} + 68d^2 + 4$

$40d^2 - 64 < 0$

$d^2 < \frac{64}{40}$ тк прогр возраст $\Rightarrow$ $d > 0$ и тк все чл. ар. целые $\Rightarrow$ d - целое $\Rightarrow$

$0 < d < \frac{\cancel{8}4}{\cancel{2}\sqrt{10}} \Rightarrow d = 1.$

$\cancel{\begin{cases} (a_1+4)(a_1+17)+4 > S \\ (a_1+9)(a_1+12) - 60 < S \end{cases}}$ $\cancel{\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 68 - 4 > S \\ a_1^2 + 21a_1 + 108 - 60 < S \end{cases}}$

$S_9 = \frac{2a_1 + n - 1}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + 8}{2} \cdot 9 = (a_1 + 4)\,9.$

$$\begin{cases} (a_1+4)(a_1+17) + 4 > (a_1+4)\,9 \\ (a_1+9)(a_1+12) - 60 < (a_1+4)\,9. \end{cases} \quad \begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 68 + 4 - 9a_1 - 36 > 0 \\ a_1^2 + 21a_1 + 108 - 60 - 9a_1 - 36 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (a_1 + 6)^2 > 0 \\ (a_1 - (-6 + 2\sqrt{6}))(a_1 - (-6 - 2\sqrt{6})) < 0 \end{cases}$$

$D = 144 - 48 = 96 = (4\sqrt{6})^2$

$a_1 = \frac{-12 \pm 4\sqrt{6}}{2} = -6 \pm 2\sqrt{6}$

Чистовик

$FO' = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$A'O' = R = \sqrt{10}$

т.к. $FO' = \frac{1}{2} A'O' \Rightarrow \angle FO'A' = 60^\circ$

$\Rightarrow$ прямая $y = -3x - 5$ отсекает от окр-ти

$\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$

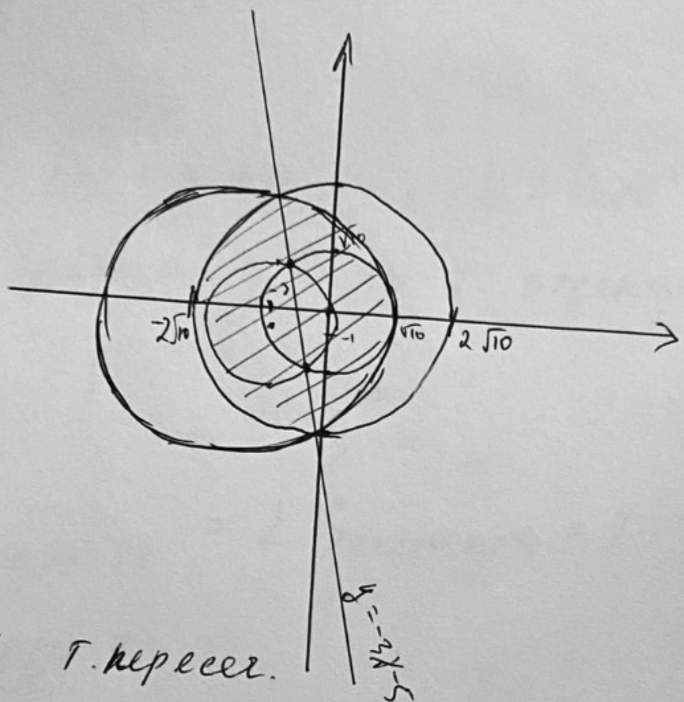
$S_{\text{фигуры } M} = 2 S_{\text{сегмента}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 = \frac{2}{3} \pi (2\sqrt{10})^2 =$

$= \frac{80\pi}{3}$

Ответ: $S_{\text{ф}M} = \frac{80\pi}{3}$

6

Чистовик.



найдем т. пересеч.
окр 1 и окр2

$a^2+b^2=(a+3)^2+(b+1)^2$

$0=6a+9+2b+1$

$b=-3a-5$

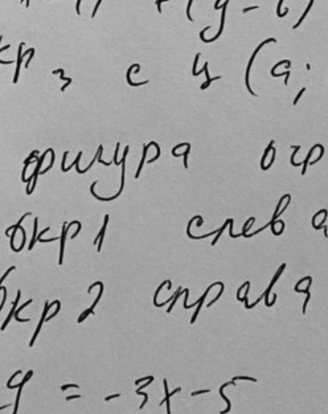
$(x-a)^2+(y-b)^2\le 10$

окр$_3$ с ц $(a;b)$ и $R=\sqrt{10}$)

фигура ограничена
окр1 слева $(0;0;2\sqrt{10})$
окр2 справа $(-3;-1;2\sqrt{10})$

$y=-3x-5$

найдем $\rho(0;y)=\dfrac{|3x+y+5|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$



выполним поворот системы координат на ∠α, чтобы

$A'B' \to AB$

$A'B' \perp Ox'$

5

Чистовик

$$\begin{cases} x < 3\sqrt{5} + 2\sqrt{15} \\ x > 2\sqrt{15} - 3\sqrt{5} \\ x > 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

$(2\sqrt{15})^2 \vee (3\sqrt{5})^2$

$60 > 45 \Rightarrow \begin{cases} x < 3\sqrt{5} + 2\sqrt{15} \\ x > 2\sqrt{15} - 3\sqrt{5} \\ x > \sqrt{105} \end{cases}$

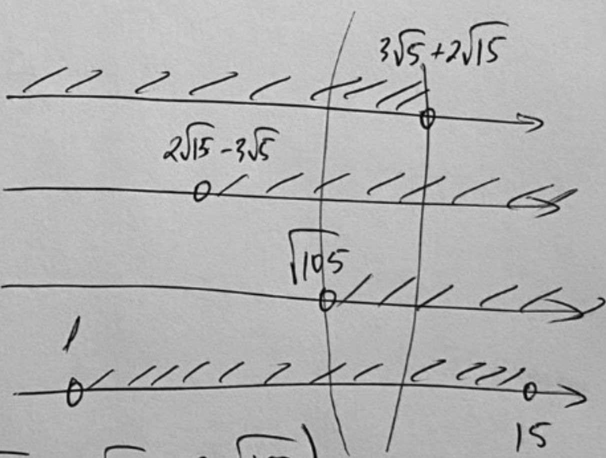
т.к. Δ BCD и Δ ACD должны существовать =>

по нер-ву в Δ-х =>

$\begin{cases} 7 + x > 8 \\ 8 + x > 7 \\ 8 + 7 > x \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \\ x < 15 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $1 < CD < 15$

Итого:

$$\begin{cases} x < 3\sqrt{5} + 2\sqrt{15} \approx 14,\ldots \\ x > 2\sqrt{15} - 3\sqrt{5} \approx 1,\ldots \\ x > \sqrt{105} \approx 10,\ldots \\ 1 < x < 15 \end{cases}$$



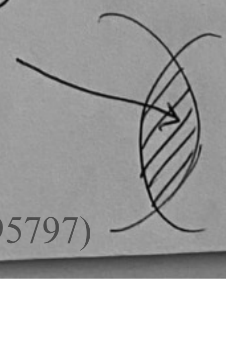
Ответ: $CD \in (\sqrt{105};\ 3\sqrt{5} + 2\sqrt{15})$

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 10 \\ a^2 + b^2 \le \min(-6a - 2b,\ 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 \le 10 \\ a^2 + b^2 \le -6a - 2b \end{cases}$$

$\begin{cases} a^2 + b^2 \le 10 \\ a^2 + 6a + 9 + b^2 + 2b + 1 \le 10 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 + b^2 \le 10 & \text{- окр}_1 \text{ с ц. } (0;0)\ R = \sqrt{10} \\ (a+3)^2 + (b+1)^2 \le 10 & \text{- окр}_2 \text{ с ц } (-3;-1)\ R = \sqrt{10} \end{cases}$

решением системы будет заштрихованная часть пересечения:



4

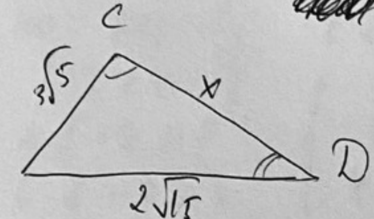
Чистовик

Чтобы осн цил-имело наим R, необходимо, чтобы $\angle HCD$ и $\angle CDH$ - наим

Р. ΔHCD: $HC = \sqrt{AC^2 - AH^2}$ (по теор. Пифагора, т.к. DH и CH - высоты в р/б Δ-ках)

$$HC = \sqrt{49-4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$DH = \sqrt{DA^2 - AH^2} = \sqrt{64-4} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$



$\Rightarrow$ чтобы $\angle C$ и $\angle D$ - наим $\Rightarrow$ $\angle H$ - наиб

наиб$\angle$-ол $\Rightarrow$ $>90^\circ$ $\Rightarrow$ $\cos\angle$-а <0 $\Rightarrow$

по теор. Косинусов:

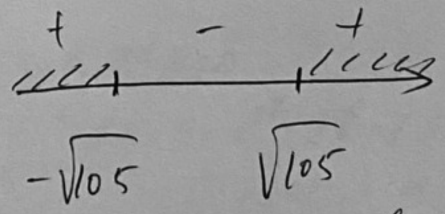
$$\cos\angle H = \frac{DH^2 + CH^2 - CD^2}{2DH \cdot CH} = \frac{60+45-x^2}{2 \cdot 2\sqrt{15} \cdot 3\sqrt{5}} < 0$$

$$\frac{105 - x^2}{12\sqrt{75}} < 0 \,\Big|\, \cdot 12\sqrt{75}$$

$$105 - x^2 < 0$$

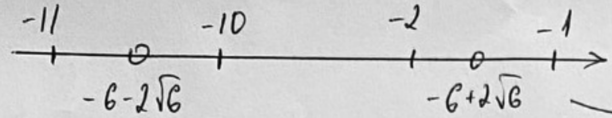
$$x^2 - 105 > 0$$

$$x > 0 \Rightarrow CD > \sqrt{105}$$



по неравен. в Δ-х $\Rightarrow$
$$\begin{cases} CD > CH + HD \\ CD < 3\sqrt{5} + 2\sqrt{15} \\ 3\sqrt{5} + CD > 2\sqrt{15} \\ 2\sqrt{15} + CD > 3\sqrt{5} \end{cases}$$

Чистовик.



$\sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9}$

$2 < \sqrt{6} < 3 \mid \cdot(-2)$

$-6 < -2\sqrt{6} < -4 \mid -6$

$-12 < -6-2\sqrt{6} < -10$

$(-6-2\sqrt{6})^2 \vee (-11)^2$

$36+24\sqrt{6}+24 \vee 121$

$24\sqrt{6} \vee 61$

$3456 < 3721 \Rightarrow$

$-6-2\sqrt{6} > -11$

$2 < \sqrt{6} < 3 \mid \cdot 2$

$4 < 2\sqrt{6} < 6 \mid -6$

$-2 < -6+2\sqrt{6} < 0$

$-6+2\sqrt{6} \vee -1 \mid +6$

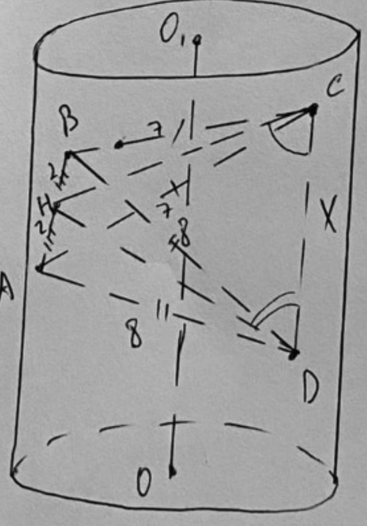
$2\sqrt{6} \vee 5$

$24 < 25$

$\Rightarrow -6+2\sqrt{6} < -1$

Ответ: $a_1 = \{-10; -9; -8; -7; ; -5; -4; -3; -2\}$

№2



Дано:
ABCD - тет-р, впис в цил.
AD = BD = 8
AC = BC = 7
AB = 4
R осн. цил - наим
A, B, C, D ∈ бок. поверхности
Найти:
CD = ?

Решение:
JCD = x

Чистовик.

№1. $a_5 a_{18} > S-4$ $\quad a_5 = a_1 + 4d$

$a_{10} a_{13} < S+60$ $\quad a_{18} = a_1 + 17d$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$a_{13} = a_1 + 12d$

1) $(a_1+4d)(a_1+17d) > S-4$

$a_1^2 + 17a_1 d + 4a_1 d + 68d^2 > S-4$

$a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 + 4 > S$

2) $(a_1+9d)(a_1+12d) < S+60$

$a_1^2 + 12a_1 d + 9a_1 d + 108d^2 < S+60$

$a_1^2 + 21a_1 d + 108d^2 - 60 < S$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 + 4 > S \\ a_1^2 + 21a_1 d + 108d^2 + 4 < S \end{cases} \Rightarrow$$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{21a_1 d} + 108d^2 - 60 < \cancel{a_1^2} + \cancel{21a_1 d} + 68d^2 + 4$

$40d^2 - 64 < 0$

$d^2 < \frac{64}{40}$, т.к. прогрессия возрастает $\Rightarrow$ $d > 0$ и т.к. все члены прогрессии целые $\Rightarrow d$ - целое число $\Rightarrow$

$0 < d < \frac{4}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow \underline{d = 1}$

$S_9 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + 8}{2} \cdot 9 = 9(a_1 + 4)$

$$\begin{cases} (a_1+4)(a_1+17) + 4 > (a_1+4)9 \\ (a_1+9)(a_1+12) - 60 < (a_1+4)9 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 68 + 4 - 9a_1 - 36 > 0 \\ a_1^2 + 21a_1 + 108 - 60 - 9a_1 - 36 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (a+6)^2 > 0 \\ (a_1 - (-6+2\sqrt{6}))(a_1 - (-6-2\sqrt{6})) < 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow D: 144 - 48 = 96 = (4\sqrt{6})^2$

$a_1 = \frac{-12 \pm 4\sqrt{6}}{2} = -6 \pm 2\sqrt{6}$

$$\begin{cases} a_1 \neq -6 \\ a_1 \in (-6-2\sqrt{6}; -6+2\sqrt{6}) \end{cases}$$

1

лист 1

21104290 (U877787 M1295797)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104290**

ID профиля: **877787**

Вариант 24

Чистовик.

№5

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$ x - ? два числа =, а 3-е > 1и2 числа на 1.

$\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

$] \; a = \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

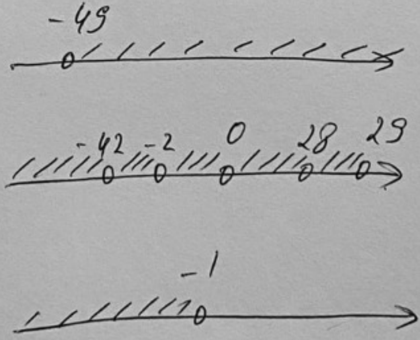
$b = \log_{(x+1)^2}(29-x)$

$c = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \frac{x}{7}+7>0 \\ \sqrt{29-x}>0 \\ \sqrt{29-x}\neq 1 \\ 29-x>0 \\ (x+1)^2>0 \\ (x+1)^2\neq 1 \\ -x-1>0 \\ \sqrt{\frac{x}{7}+7}\neq 1 \\ \sqrt{\frac{x}{7}+7}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x>-49 \\ x<29 \\ x\neq 28 \\ x<29 \\ x\neq -1; 0; -2 \\ x<-1 \\ x>-49 \\ x\neq -42 \end{cases}$$



$\Rightarrow x\in(-49;-42)\cup(-42;-2)\cup(-2;-1)$

$\Rightarrow a = 2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$b = \frac{1}{2}\log_{(-x-1)}(29-x) = \frac{1}{2\log_{(29-x)}(-x-1)}$ | т.к. $|x+1|$, но $-x-1>0 \Rightarrow |x+1| = -x-1$

$c = 2\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1) = 2\,\frac{\log_{(29-x)}(-x-1)}{\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)}$

1

Чистовик.

$S_{\Delta ABC} = \frac{3150}{49}$, $S_{\Delta APK} = 16$, $S_{\Delta CPK} = 14$

$OT \cap AC = H$, т.к. $AT = TC$ (кас) $AO = OC$ (R) $\Rightarrow \perp$

$S_{\Delta APK} = \frac{1}{2} AK \cdot OH$, $AC = 15x \Rightarrow HC = \frac{15x}{2} \Rightarrow$

из $\Delta OHC \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{3}{5} = \frac{HC}{OH} \Rightarrow$

$$\frac{\frac{15x}{2}}{OH} = \frac{3}{5} \Rightarrow OH = \frac{\overset{5}{\cancel{15}} \cdot 5x}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{25x}{2}$$

$AK = 8x$

$$S_{\Delta APK} = \frac{1}{2} \cdot 8x \cdot \frac{25x}{2} = 16 \Rightarrow$$

$$\frac{200x^2}{4} = 16$$

$$50x^2 = 16$$

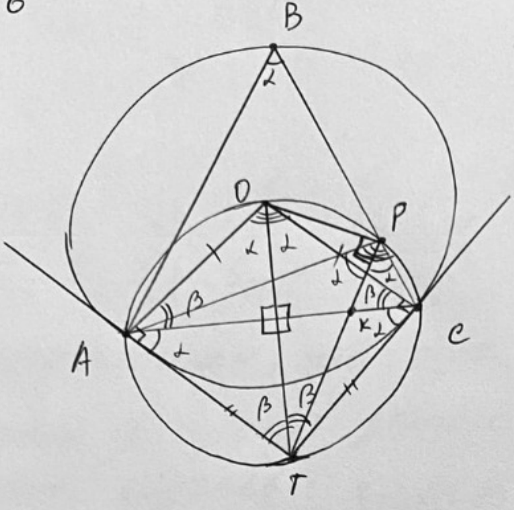
$$x^2 = \frac{16}{50} \Rightarrow$$

$$x = \frac{4}{5\sqrt{2}} \Rightarrow AC = \overset{3}{\cancel{15}} \cdot \frac{4}{\cancel{5}\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

Ответ: $6\sqrt{2}$.

Чистовик

№6



Дано: $\triangle ABC$ остроуг.
впис в окр-ть ω с ц. O.;
A, O, C $\in$ окр-ти$_2$;
TA, TC - кас к ω
P $\in$ BC, окр-ти$_2$
TP $\cap$ AC в (.). K
$S_\triangle APK = 16$
$S_\triangle CPK = 14$

а) найти: $S_\triangle ABC$ - ?
б) AC - ?
если $\angle ABC = \arctg \frac{3}{5}$

Решение:

а). AT = TC (кас к одной окр)
в 4-х/$\angle$-ке AOCT: $\angle A + \angle C = 180 \Rightarrow \angle O + \angle T = 360 - 180 = 180 \Rightarrow$
можно описать окр-ть, а т.к. A, O, C $\in$ окр$_2$ $\Rightarrow$ T $\in$ окр$_2$
$\Rightarrow$ OT - диаметр, $\angle AOC = \angle ABC$) опир на $\smile AC$, т.к. OT - диаметр $\Rightarrow \triangle OPT$ - прямоуг, $\angle P = 90°$

$\exists\ \alpha + \beta = 90$
$\angle ABC = 2\alpha$
$\smile TC = 2\alpha \Rightarrow \angle TPC = \alpha = \angle APT \Rightarrow$ PK - биссек $\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC}$

$S_\triangle APK = \frac{1}{2} AP \cdot PK \cdot \sin\alpha$
$S_\triangle CPK = \frac{1}{2} \cdot PC \cdot PK \cdot \sin\alpha$
$\Rightarrow \frac{S_\triangle APK}{S_\triangle CPK} = \frac{AP}{PC} = \frac{8}{7} \Rightarrow$ AP : PC = 8 : 7 $\Rightarrow$ AK : KC = 8 : 7
$\exists$ x - коэф. подоб $\Rightarrow$
AK = 8x
KC = 7x
$\}$ AC = 15x

Т.к $\angle AOC = 2\alpha$ - центр $\Rightarrow \angle ABC = \alpha$, т.к впис.
$\triangle ABC \sim \triangle KPC$ т.к $\angle B = \alpha$, $\angle P = \alpha$, $\angle C$ - общ $\Rightarrow$

$\frac{S_\triangle ABC}{S_\triangle KPC} = k^2 = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = \frac{(15\cancel{x})^2}{(7\cancel{x})^2} = \frac{225}{49} \Rightarrow S_\triangle ABC = \frac{225 \cdot S_\triangle KPC}{49} = \frac{225 \cdot 14}{49} = \frac{3150}{49}$

Ответ: $\frac{3150}{49}$

6

5 $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(29-x)$, Черновик

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$ x - ? два числа =, а 3-е > 1 и 2 на 1.

I. $a = \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

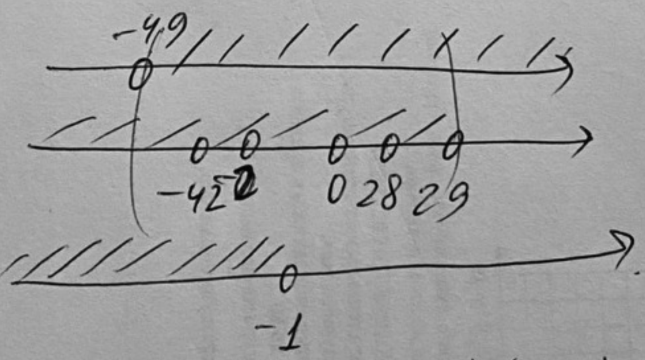
$в = \log_{(x+1)^2}(29-x)$

$c = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

ООЗ:

$$\begin{cases} \frac{x}{7}+7>0 \\ \sqrt{29-x}>0 \\ \sqrt{29-x}\neq 1 \\ 29-x>0 \\ (x+1)^2>0 \\ (x+1)^2\neq 1 \\ -x-1>0 \\ \sqrt{\frac{x}{7}+7}>0 \\ \sqrt{\frac{x}{7}+7}\neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-49 \\ 29-x>0 \\ 29-x\neq 1 \\ x<29 \\ x\neq -1 \\ x\neq 0 \\ x\neq -2 \\ x<-1 \\ \frac{x}{7}+7>0 \\ \frac{x}{7}+7\neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-49 \\ x<29 \\ x\neq 28 \\ x<29 \\ x\neq -1; 0; -2 \\ x<-1 \\ x>-49 \\ x\neq -42 \end{cases}$$



$x \in (-49; -42)(-42; -2)(-2; -1)$

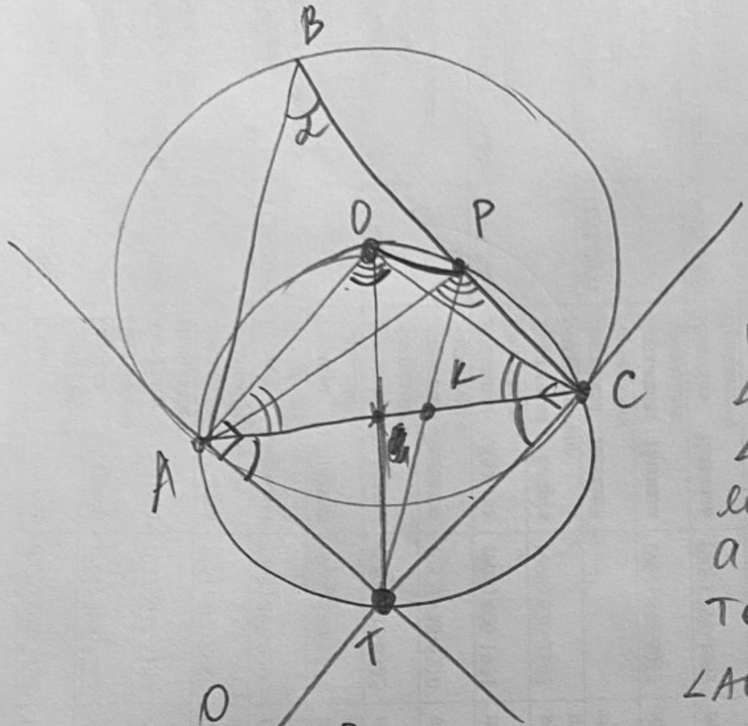
№1

Черновик.

$S_{APK} = 16$

$S_{CPK} = 14$

S_{ABC} — ?



$AT = TC$

в чет-ке $AOCT$

$\angle A + \angle C = 180 \Rightarrow$

$\angle O + \angle T = 360 - 180 = 180 \Rightarrow$

можно описать окр

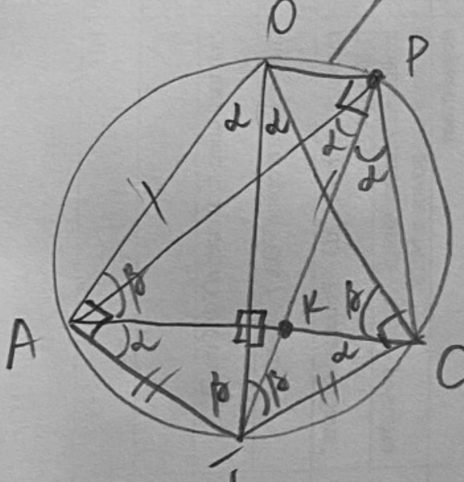
а т.к. $A, O, C \in$ окр 1 $\Rightarrow$

$T \in$ окр 2 $\Rightarrow OT$ - диаметр.

$\angle AOC = \angle APC$, опир на $\smile AC$

т.к OT - диам $\Rightarrow \triangle OPT$ - прямоуг

$\angle P = 90°$



$\exists\ \alpha + \beta = 90$.

$\angle APC = 2\alpha$.

$\smile TC = 2\alpha \Rightarrow$

$\angle TPC = \alpha = \angle APT \Rightarrow$

PK - биссек $\Rightarrow \dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AK}{KC}$

$S_{APK} = \frac{1}{2} AP \cdot PK \cdot \sin\alpha$

$S_{CPK} = \frac{1}{2} PC \cdot PK \cdot \sin\alpha$

$\Rightarrow \dfrac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \dfrac{AP}{PC} = \dfrac{\cancel{16}^{8}}{\cancel{14}_{7}}$

$\Rightarrow AP : PC = 8 : 7 \Rightarrow$

$AK : KC = 8 : 7$

$\exists\ x$ - коэф пропорц $\Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} AK = 8x \\ KC = 7x \end{matrix}\right\} AC = 15x$

т.к $\angle AOC = 2\alpha$ - центр $\Rightarrow \angle ABC = \alpha$ т.к. впис.

$\triangle ABC \sim \triangle KPC$ т.к $\angle B = \alpha$, $\angle P = \alpha$, $\angle C$ - общ $\Rightarrow$

$\dfrac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = k^2 = \left(\dfrac{AC}{KC}\right)^2 = \dfrac{(15x)^2}{(7x)^2} = \dfrac{225}{49} \Rightarrow$

$S_{ABC} = \dfrac{225 \cdot S_{KPC}}{49} = \dfrac{225 \cdot 14}{49} = \dfrac{3150}{49}$

в) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$ $\quad AC - ?$ Черновик.

$tg\,\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{25}}} = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$ $\quad \cos\alpha > 0$, $\sin\alpha > 0$ т.к. ABC - остр

$S_{ABC} = \frac{3150}{49}$ $\quad S_{APK} = 16$ $\quad S_{CPK} = 14.$

~~△ABC так PC~~, пусть $OT \cap AC = H$ т.к. $AT = TC$ (нас) $AO = OC$ (нас руд) $\Rightarrow$ 1

$S_{APK} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot OH$, $AC = 15x \Rightarrow HC = \frac{15x}{2} \Rightarrow$

из $\triangle OHC \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{3}{5} = \frac{HC}{OH} \Rightarrow$

$\frac{\frac{15x}{2}}{OH} = \frac{3}{5} \Rightarrow OH = \frac{\cancel{15}^{5} \cdot 5x}{2 \cdot \cancel{3}} = \frac{25x}{2}.$

$AK = 8x$

$S_{APK} = \frac{1}{2} \cdot 8x \cdot \frac{25x}{2} = 16 \Rightarrow$

$\frac{200x^2}{4} = 16$

$50x^2 = 16$

$x^2 = \frac{16}{50} \Rightarrow x = \frac{4}{5\sqrt{2}} \Rightarrow AC = \cancel{15}^{3} \cdot \frac{4}{\cancel{5}\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$

Отв: $6\sqrt{2}$

Чистовик

$\exists \log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)=t$; $\log_{(29-x)}(-x-1)=k$

$a=2t$ $\quad$ $1^\circ.$ $\exists$ $a=b$

$b=\frac{1}{2k}$ $\quad$ $c=a+1$

$c=\frac{2k}{t}$

$$\begin{cases} 2t=\frac{1}{2k} \\ \frac{2k}{t}=2t+1 \end{cases} ; \; 4tk=1 \; ; \; t=\frac{1}{4k}$$

$$\frac{2k}{\frac{1}{4k}}=\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\cancel{4}k}+1$$

$$8k^2=\frac{1}{2k}+1 \quad \Big|\cdot 2k\neq 0$$

$$16k^3-2k-1=0$$

$\exists k=\frac{1}{2}$; $\frac{16}{8}-2\frac{1}{2}-1=0 \Rightarrow$

$$\begin{array}{l|l} 16k^3-2k-1 & k-\frac{1}{2} \\ \hline 16k^3-8k^2 & 16k^2+8k+2 \\ \quad 8k^2-2k & \\ \quad 8k^2-4k & \\ \qquad 2k-1 & \\ \qquad 2k-1 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$16k^2+8k+2=0$

$D: 64-4\cdot2\cdot16<0$

$\varnothing$

$k=\frac{1}{2} \Rightarrow t=\frac{1}{4\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow$ $a=1$

$b=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}=1$

$c=2$

2

№4. продолжение. Чистовик.

$\begin{cases} НОД(a,b,c)=33 \\ НОК(a,b,c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$ $a,b,c\in\mathbb{N}$

$\exists$ $a=33\cdot x$ x,y,z – натур взаимно просты
$b=33\cdot y$
$c=33\cdot z$

$НОК=33\cdot x\cdot y\cdot z=3^{19}\cdot 11^{15}\Rightarrow$
$x\cdot y\cdot z=3^{18}\cdot 11^{14}$ т.к. x,y,z - взаимно просты, то

$x=3^{18}$ $y=11^{14}$ $z=1$ кол-во перестановок $3!=6$.

~~$x=11^{14}$ $y=3^{18}$ $z=1$~~

или $x=1$ $y=3^{18}$ $z=11^{14}$

Отв: 6.

⑨

Черновик.

16

Черновик

4) $a, b, c \in N$

НОД $\left(\frac{a}{33} ; \frac{b}{33} ; \frac{c}{33}\right) = 1 \Rightarrow$

$\frac{a}{33} \cdot \frac{b}{33} \cdot \frac{c}{33} = \frac{3^{19} \cdot 11^{15}}{33} = 3^{18} \cdot 11^{14}$

1) предположим что одно из чисел $\frac{a}{33}, \frac{b}{33}, \frac{c}{33}$ равно 1 тогда ум. вып-ся и кол-во таких случаев

$3 \cdot 19 \cdot 15 = 855$

2) если ни одно из чисел не $= 1$, то возможны 2 случая, одно из чисел делится на 3 (11), а два других на 11(3) или одно из чисел делится на 3, другое на 11, а третье на 11 и на 3

$\overset{42}{3 \cdot 14} + \overset{54}{3 \cdot 18} + \overset{1710}{6 \cdot 15 \cdot 19} = 1806$

в обоих опис. случ. учесть, что ни одно из чисел не равно 1

3) всего чисел получаем $1806 + 855 = 2661$

Чистовик.

$t = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$b = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2$

$c = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = 1$

1) $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 1$

$\frac{x}{7} + 7 = \sqrt{29x}$

$x^2 + 147x + 980 = 0$

$x = -140; -7$

$\notin ОДЗ \quad \in ОДЗ$

2) $\log_{(x+1)^2}(29-x) = 2$

$29 - x = (x+1)^4$

$29 - x = (x^2+2x+1)(x^2+2x+1)$

$29 - x = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + x^2 + 2x + 1$

$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x - 28 = 0$

3) $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = 1$

$\frac{x}{7} + 7 = (-x-1)^2$

$7x^2 + 14x + 7 - x - 49 = 0$

$7x^2 + 13x - 42 = 0$

$D = 1345$, корни не совпадают с 1ур-ем

$\Rightarrow$ нет общих x, $\Rightarrow$

Ответ: при $\underline{x = -7}$

№6

5

$16k^3-2k-1=0$ Черновик

$\exists\ k=\frac{1}{2}$ $\frac{16}{8}-2\frac{1}{2}-1=0 \Rightarrow$

$16k^3-2k-1 \mid k-\frac{1}{2}$

$\underline{16k^3-8k^2} \quad 16k^2+8k+2$

$\underline{-8k^2-2k}$
$8k^2-4k$

$\underline{2k-1}$
$2k-1$

0

$16k^2+8k+2=0$

$D=64-4\cdot2\cdot16<0$

$\varnothing$

$k=\frac{1}{2} \Rightarrow \quad t=\frac{1}{4\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow$ $a=1$

$b=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}=1$

$c=2$

$a=\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1$; $b=\log_{(x+1)^2}(29-x)=1$; $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=2$

$\frac{x}{7}+7=\sqrt{29-x}$

$7\sqrt{29-x}=x+49, \quad x+49\geq0$

$49(29-x)=x^2+98x+49^2$

$x^2+98x+49x+2401-1421=0$

$x^2+147x+980=0$

$D=21609-4\cdot980=17689=133^2$

$x_1=\frac{-147\pm133}{2}=-140; -7$
$\in ООЗ \quad \in ООЗ$

$29-x=(x+1)^2$

$29-x=x^2+2x+1$

$x^2+3x-28=0$

$x_1=4 \quad x_2=-7$
$\in ООЗ \quad \underline{\in ООЗ}$

$-x-1=\frac{x}{7}+7$

$-7x-7=x+49$

$8x=-56$

$x=-7$

при $x=-7$

$2^0. \begin{cases} b=c \\ a=b+1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{2k}=\frac{2k}{t} \\ 2t=\frac{1}{2k}+1 \end{cases}$

$4k^2=t$

$8k^2=\frac{1}{2k}+1 \quad |\cdot 2k$

$16k^3=1+2k$

$16k^3-2k-1=0$

$k=\frac{1}{2} \Rightarrow t=4\cdot\frac{1}{4}=1 \Rightarrow$

$a=2 \quad b=1 \quad c=1$

№3

Чистовик.

Чистовик.

№4 $\begin{cases} НОД(a;b;c)=33 \\ НОК(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$

$a,b,c \in N$

$НОД\left(\frac{a}{33};\frac{b}{33};\frac{c}{33}\right)=1 \Rightarrow$

$\frac{a}{33}\cdot\frac{b}{33}\cdot\frac{c}{33}=\frac{3^{19}\cdot 11^{15}}{33}=3^{18}\cdot 11^{14}$

1) предположим, что одно из чисел $\frac{a}{33};\frac{b}{33};\frac{c}{33}$ равно 1, тогда условие выполняется и кол-во таких случаев: $3\cdot 19\cdot 15=\underline{855}$

2) если ни одно из чисел $\neq 1$, то возможны 2-а случае; одно из чисел делится на 3 (11), а два других на 11 (3) или одно из чисел делится на 3, другое на 11, а третье на 11, и на 3.

$3\cdot 14+3\cdot 18+6\cdot 15\cdot 19=42+54+1710=\underline{1806}$

— в обоих описанных случаях учитывается, что ни одно из чисел $\neq 1$

3) всего чисел получаем: $1806+855=2661$

~~Ответ~~ продолжение на листе №9.

№6

б) $\angle ABC = \operatorname{arcctg}\frac{3}{5}$, $AC=?$

$tg\,\alpha=\frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{9}{25}}}=\frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{34}}$

$\cos\alpha>0$

$\sin\alpha>0$

т.к. $\triangle ABC$ - остроугольный.

7

Черновик.

$S_{AOB} = 16$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 1$

$\frac{x}{7} + 7 = \sqrt{29-x}$

~~$49(29-x) = (x+49)^2$~~

$x_1 = -140 \notin ОДЗ$

$x_2 = -7 \in ОДЗ$

нет таких x

Ответ: при $x = -7$

Черновик.

$\log_{(x+1)^2}(29-x) = 2$

$29 - x = (x+1)^4$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = 1$

$-x-1 = \sqrt{\frac{x}{7}+7}$

$\frac{x}{7} + 7 = (-x-1)^2$

$x + 49 = 7(x^2+2x+1)$

$7x^2 + 14x + 7 - x - 49 = 0$

$7x^2 + 13x - 42 = 0$

$D = 1345$

корни не совпадают с 1 ур-ем ⇒

21104290 (U877787 M1295798)

Чистовик.

1) $a = \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 1$; $b = \log_{(x+1)^2}(29-x) = 1$; $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = 2$

1) $7\sqrt{29-x} = x+49$, $x+49 \geq 0$

$49(29-x) = x^2+98x+49^2$

$x^2+98x+49x+2401-1421=0$

$x^2+147x+980=0$

$D: 21609-4\cdot 980 = 17689 = 133^2$

$x_1 = \frac{-147 \pm 133}{2} = -140; \underline{-7}$

$\notin ОДЗ \quad \in ОДЗ$

2) $29-x = (x+1)^2$

$29-x = x^2+2x+1$

$x^2+3x-28=0$

$x_1 = 4; \; x_2 = \underline{-7}$

$\notin ОДЗ \quad \in ОДЗ$

3) $-x-1 = \frac{x}{7}+7$

$8x = -56$

$\underline{x = -7}$

$\in ОДЗ$

$\Rightarrow$ при $\underline{x = -7}$

$2^\circ \begin{cases} b = c \\ a = b+1 \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{2k} = \frac{2k}{t} \\ 2t = \frac{1}{2k}+1 \end{cases}$

$4k^2 = t$

$8k^2 = \frac{1}{2k}+1 \mid \cdot 2k$

$16k^2-2k-1=0$

$k = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 4\cdot\frac{1}{4} = 1 \Rightarrow$

$a=2; \; b=1; \; c=1.$

3

Чистовик

1) $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=2$

$\frac{x}{7}+7=29-x$

$x+49=203-7x$

$8x=154$

$x=19,25$

$\notin$ ОДЗ

2) $\log_{(x+1)^2}(29-x)=1$

$29-x=x^2+2x+1$

$x=4;\ -7$

$\notin$ ОДЗ $\quad \in$ ОДЗ

3) $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=1$

$\sqrt{\frac{x}{7}+7}=-x-1$

$\frac{x}{7}+7=x^2+2x+1$

$7x^2+14x+7-x-49=0$

$7x^2+13x-42=0$

$D: 169+28\cdot 42=1345$

=> т.к. одинаковой, то не удв. т.к. $x=19,25\notin$ ОДЗ

3° $\begin{cases} a=c \\ b=a+1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2t=\frac{2k}{t} \\ \frac{1}{2k}=2t+1 \end{cases}$ $\quad 2k=2t^2 \quad k=t^2$

$\frac{1}{2t^2}=2t+1$

$1=4t^3+2t^2$

$4t^3+2t^2-1=0$

$t=\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{l|l} 4t^3+2t^2-1 & t-\frac{1}{2} \\ \hline -(4t^3-2t^2) & 4t^2+4t+2=0 \\ \quad 4t^2-1 & \\ -(4t^2-2t) & \\ \quad 2t-1 & \\ -(2t-1) & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$2t^2+2t+1=0$

$D=4-4\cdot 2<0$

$\varnothing$

4