Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

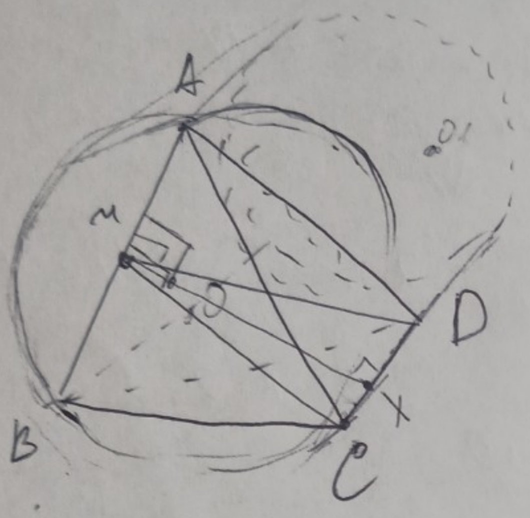
Шифр: **21104162**

ID профиля: **160883**

Вариант 24

Чистовик

№2



Дано: ABCD - тетраэдр.
AB = 4; AC = CB = 7; AD = DB = 8
Ось → $OO_1 \parallel CD$; ABCD - вписан в цилиндр; A ∈ бок. пов-сти
B ∈ бок. пов-ти; CD ∈ бок. пов-~~сти~~.

R цилиндра - минимальный из всевозможных

CD = ? (какие зн-я?)

Решение:

Отметим точку M - середину AB; т.к. △CB - равнобедр. △ADB - равнобедр. $\Rightarrow CM \perp AB$; ~~B~~ $DM \perp AB$
⇓
$XB \perp (MDC)$

Опустим из M ⊥ на DC → MX
$MX \in (MDC) \Rightarrow MX \perp AB$
т.к. $MX \perp CD$; $CD \parallel OO_1$ по постр.
⇓
$MX \perp OO_1$

$$\left.\begin{matrix} AB \perp CD \\ \cancel{AB}\; CD \parallel OO_1 \end{matrix}\right| \Rightarrow AB \perp OO_1.$$

$$\left.\begin{matrix} MX \in (BAX) \\ AB \in (BAX) \\ MX \perp OO_1 \\ AB \perp OO_1 \end{matrix}\right| \Rightarrow OO_1 \perp (BAX);\ \omega_1 \perp OO_1;\ \omega_2 \perp OO_1$$

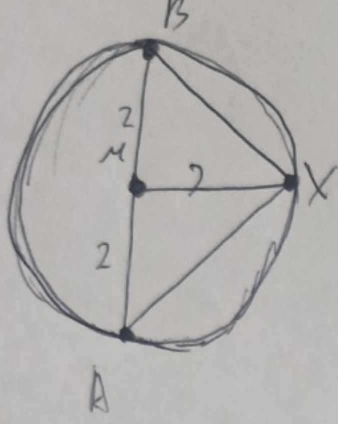
~~Тогда в плоскости BAX цилиндр → в в окружность ∥ осн~~

Окружности в основаниях.

Значит $(BAX) \parallel \omega_1 \parallel \omega_2$ (общ. перпендикуляр).
⇓
в плос-ти BAX цилиндр будет $\omega = \omega_1 = \omega_2$

Чистовик

ΔBAX:



BA - хорда $\Rightarrow BA \leq 2R \Rightarrow R \geq 2$.

$R=2$ - возможен при AB - диаметре.

$R<2$ - невозможно.

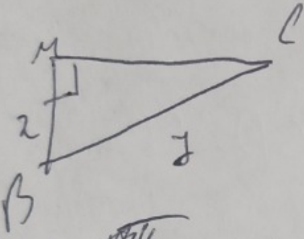
$\Downarrow$

$R_{min}=2 \Rightarrow$ M - центр окр-ти.

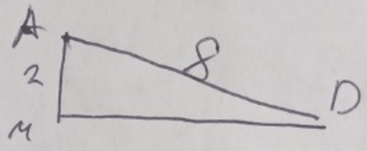
$\Downarrow$

$MX=R=2$

ΔBMC:

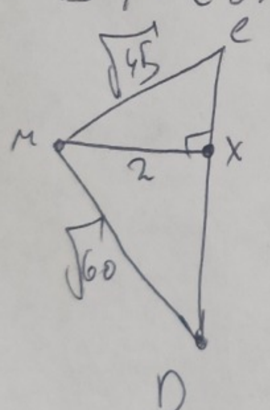


ΔAMD



По т-ме Пифагора: $MC=\sqrt{45}$; $MD=\sqrt{60}$

ΔMCD:



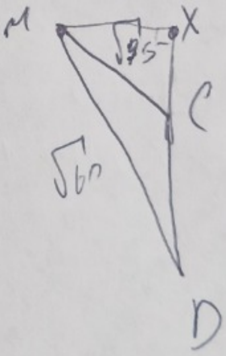
$MX \perp CD$ (выше)

По т-ме Пифагора:

$XC=\sqrt{41}$

$XD=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$

ΔMCD:



$CD=CX+XD=\sqrt{41}+2\sqrt{14}$ $\qquad$ $CD=XD-XC=2\sqrt{14}-\sqrt{41}$

Других вар-тов ΔMCD нет, т.к. $MD>MC \Rightarrow \angle C > \angle D$

$\Downarrow$

угол D не тупой.

$\Downarrow$

2 вар-та, либо $\angle C$ - тупой либо нет.

Ответ: $CD=\sqrt{41}+2\sqrt{14}$; $CD=2\sqrt{14}-\sqrt{41}$.

2/6

3 | 6

Чистовик

№3 Преобразуем систему:

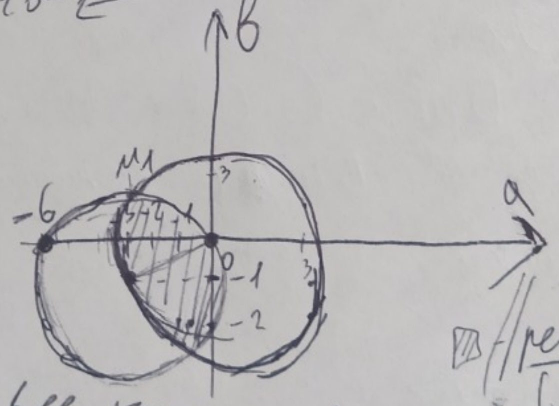
$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 10\\ \begin{cases}a^2+b^2\le -6a-2b\\ a^2+b^2\le 10\end{cases}\end{cases}$$

Решим графически относительно $(a;b)$ нижнюю часть

$$\begin{cases}(a^2+2\cdot 3a+3^2)-9+(b^2+2b+1)-1\le 0\\ a^2+b^2\le 10\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a+3)^2+(b+1)^2\le 10\\ a^2+b^2\le 10\end{cases}$$

круги ~~окружности~~ с центром в $(0;0)$ и в $(-3;-1)$ и $R=\sqrt{10}$ => решение ↓ их пересечение.



▨ - решение - фигура M_1

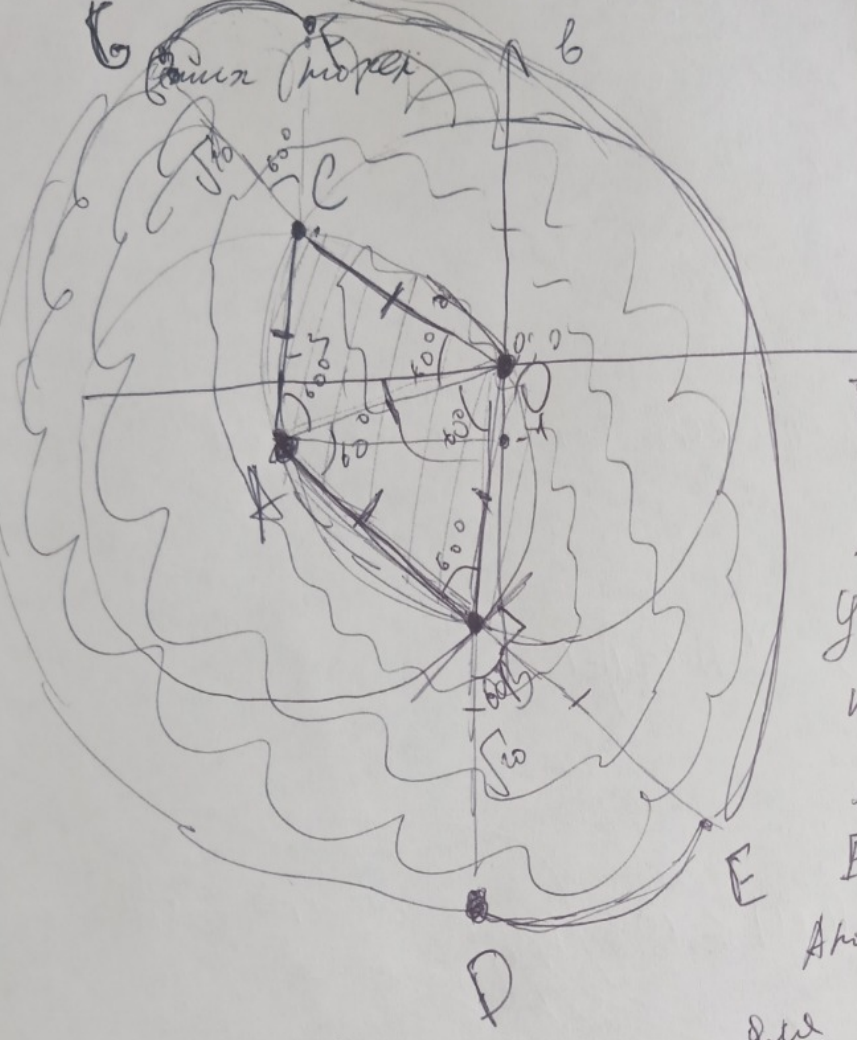
Теперь найдём все ~~[illegible]~~ значений $(x;y)$, такие, что $(a-x)^2+(b-y)^2\le 10$ - будет иметь общие точки с уже нарисованным решением.

$(a-x)^2+(b-y)^2\le 10$ - окружность с центром в $(x;y)$ и $R=\sqrt{10}$

$\rho((x;y);M_1)\le\sqrt{10}$ т.е. $(x;y)$ - это множество точек, удалённых

Чистовик

От ми $\leq \sqrt{10}$. Найдём M_2 - фигуру, состоящую из



Удвоим: AB за B = E

OB за C = D

OC за C = G

AC за C = F

Т.к. кратчайшее расстояние до фигуры - высота, то

Тогда: множество точек, у которых (ближайшая точка ∈ ◡(GB) - это множество → сектор EAF

Аналогично сектор DOF для ◡ BAC.

~~Эти~~

и сектора DBE и GCF - это для точек, у которых ближайшим оказался B и ~~B~~ G соответственно

(Пояснение: ~~фигура из FC OBE~~ я так сделал, т.к. кратчайшее расстояние до фигуры - это высота ⇒ высота на дугу содержит центр, поэтому появились сектора.)

— фигура M_2.

$S_{M2} = S_{\text{сек}}AEF + S_{\text{сек}}OGD - S_{ACDB} + S_{\text{сек.}}DBE + S_{\text{сек}}FCG$ −

общ. часть

~~$= \pi \cdot (2\sqrt{10})^2 \cdot 2 - \frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}{2} \cdot \sin 120° \cdot 2 + 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{10}$~~

4/6

21104162 (U160883 M1296081)

Чистовик.

89

⑤ $\frac{\pi\cdot(2\sqrt{10})^2}{3}\cdot 2-\frac{1}{2}\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\sin 120^\circ\cdot 2+\pi\cdot(\sqrt{10})^2\cdot\frac{1}{6}\cdot 2=$

$=\frac{\pi\cdot 40\cdot 2}{3}-5\cdot\sqrt{3}+\frac{\pi\cdot 10}{3}=\frac{\pi\cdot 10}{3}(8+1)-5\sqrt{3}=$

$=30\pi-5\sqrt{3}$

Почему $S_{M_2}=S_M$? — По тому, что каждая точка фигуры M_2 ~~вдо~~ на плоскости $(a;b)$ — взаимнооднозначно переходит в точку фигуры M на плоскости $(x;y)$.

$\Downarrow$

их площади совпадут.

$\boxed{\text{Ответ: } S_M=S_{M_2}=30\pi-5\sqrt{3}}$

№1 $a_1=a$

$S=a+a+d+a+2d+\ldots+a+8d=9a+9d\cdot 4=9a+36d$

$\begin{cases} a_5\cdot a_{18}=(a+4d)(a+17d)>9a+36d-4\\ 9a+36d+60>(a+9d)(a+12d)\end{cases}\Bigg|+$

$64\cancel{4}>9\cdot 12d^2-4\cdot 17d^2$

$64>d^2\cdot 50$

$0<d<\frac{4\sqrt{2}}{5}$ ~~[illegible]~~)

5/6

Чистовик.

6\6

$\boxed{d < \frac{4\sqrt{2}}{5}}$

$$\begin{cases} 9a+36d+60 > a^2+21ad+108d^2 \,\Big|\, -50d^2 \\ 9a+36d-4 < a^2+21da+68d^2 \\ \cancel{9a+36d+60-50d^2 > a^2+21da+68d^2 > 9a+36d-4} \end{cases}$$

$9a > a^2+d(21a-36)+108d^2-60$

$9a < a^2+d(21a-36)+68d^2+4.$

$a_5+a_{18}=a_{13}+a_{10}=2a+22d=k$

$\Updownarrow$

$(a_5+a_{18})^2=(a_{13}+a_{10})^2$

$\frac{(a_5+a_{18})-a_5^2-a_{18}^2}{2}=a_5\cdot a_8$ $\quad a_{13}\cdot a_{10}=\frac{(a_5+a_{18})^2-a_{10}^2-a_{13}^2}{2}$

$\frac{k^2-a_5^2-a_{18}^2}{2} > S-4 \quad \Big| +$

$\frac{k^2-a_{13}^2-a_{10}^2}{2} < S+60$

$64 > \frac{a_5^2+a_{18}^2-a_{10}^2-a_{13}^2}{2}$

$128 > (a+4d)^2+(a+17d)^2-(a+9d)^2-(a+12d)^2$

$128 > (a+13d)^2-5d+(2a+29d)5d=5d(16d.$

Черновик

$S = a_1 + a_2 + ... + a_9$

$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + ... + a_1 + 8d = S = 9a_1 + 9d \cdot 4 =$

$a_5 \cdot a_{18} > S - 4$

$\frac{(a_5 + a_{13})^2}{2} - \frac{a_5^2}{2} - \frac{a_{18}^2}{2}$

$= 9a + 36d$

$a_1 \cdot a_{13} < S + 60$

$+60^+$

$(a_1 + 4d) \cdot (a_1 + 17d) > 9a + 36d - 4$

~~60~~ 15

$(a_1 + 9d)(a_1 + 12d) < 9a + 36d + 60$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{21da} + 9 \cdot 12d^2 < \cancel{9a} + \cancel{36d} + 60$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{21da} + 4 \cdot 17d \geq 9a + \cancel{36d} - 4$

$9 \cdot 12d^2 - 4 < 4 \cdot 17d^2 + 60$

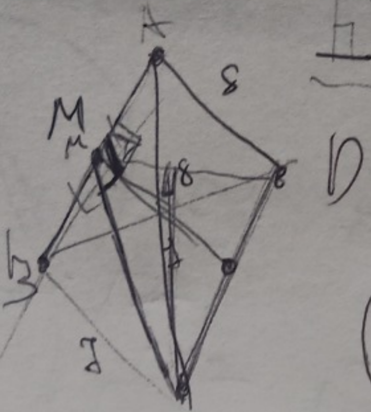
$108d^2 - 68d^2 < 64$

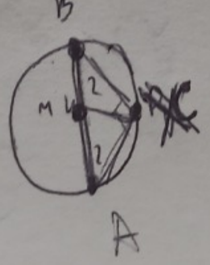
$40d^2 \leq 64$

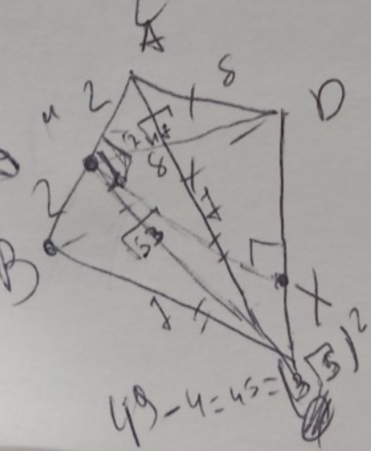
$d^2 < \frac{64}{40} = \frac{8}{5}$

$d < 2\sqrt{\frac{2}{5}}$

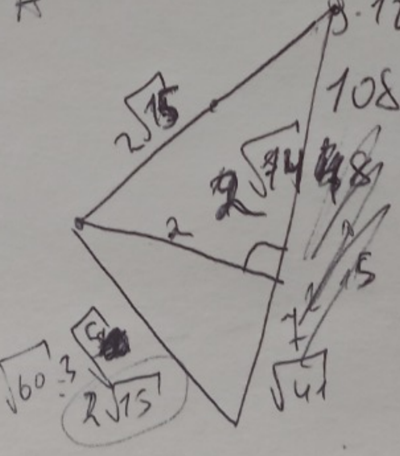
$2\sqrt{14}, \sqrt{41}$





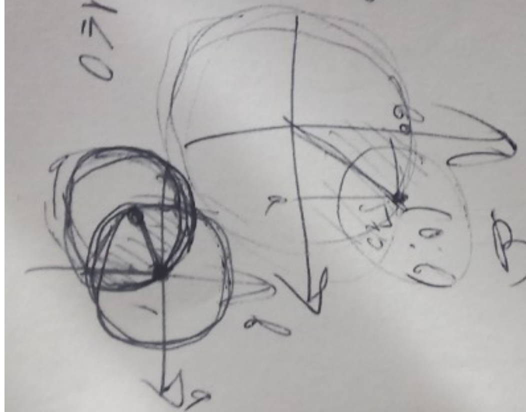


$4^3 - 4 = 45 =$



$\sqrt{60} : 3$

$2\sqrt{15}$

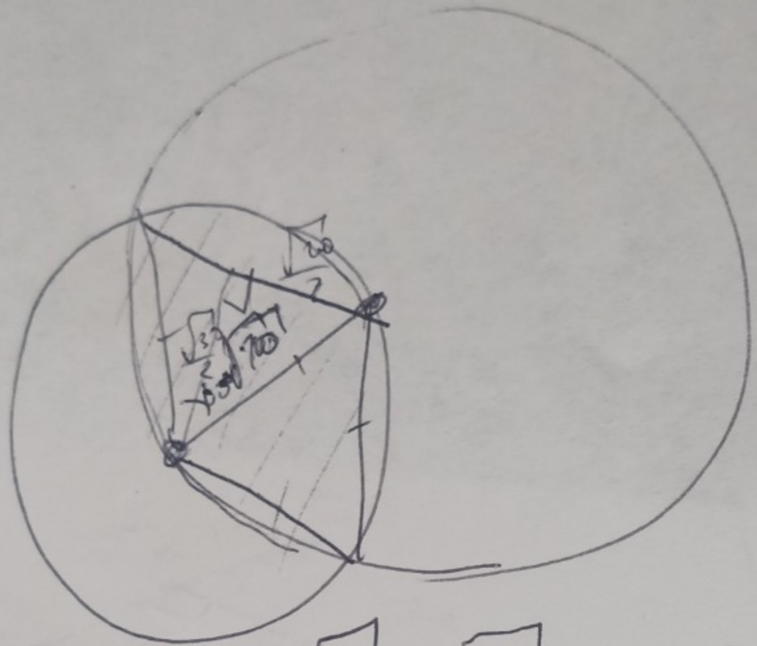


$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 10$

$a^2 + b^2 \leq -6a - 2b$

$a^2 + 6a + 9 - 9 + b^2 + 2b + 1 - 1 \leq 0$

$(a+3) + (b+1) \leq 10$



$$S_\Delta = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{30}}{4} = \frac{10\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{2} =$$

$$2S_\Delta = 5\sqrt{3}$$

$S_{\text{сектор}}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104162**

ID профиля: **160883**

Вариант 24

Чистовик:

№4

Нод$(a; b; c) = 33 \Rightarrow a = a_1 \cdot 33;\ b = b_1 \cdot 33;\ c = c_1 \cdot 33$ и

Нод$(a_1; b_1; c_1) = 1$ (иначе нод$(a; b; c)$ - был бы другим)

Нок$(a; b; c) = 3^{19} \cdot 11^{15} =$ Нок$(33a_1; 33b_1; 33c_1) = 33 \cdot$Нок$(a_1, b_1, c_1)$

~~[illegible]~~

Т.к. Нод$(a_1, b_1 c_1) = 1$ ~~[illegible]~~

$3^{18} \cdot 11^{14} =$ Нок$(a_1; b_1; c_1)$

все 3 $(a_1; b_1; c_1)$ не могут делиться на 3, и/или на 5 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ либо 2 делятся на 3, 1 не делится; 1 делится, остальные не делятся. (С 5 аналогично) ~~$\Rightarrow$~~, ~~всего вариантов рассмотрим~~, причём, у одного числа в разложении на простые будет 3^{18}, и у одного (возможно того же) 5^{14} (иначе нок будет другой) и никаких других чисел в разложении нет.

Т.Е у нас 3 варианта для максимальной степени 3-ки • 2 варианта для второго числа: 3 • 18 (степени 0; 1; 2...17) + 3 варианта, где 2 числа $\vdots\ 3^{18} \Rightarrow$ всего вар-ов 3-ки: $3 \cdot 2 \cdot 18 + 3$

Аналогично для ~~11~~ 11-ти: $3 \cdot 2 \cdot 14 + 3$

Итого: $3 \cdot (37) \cdot 3(29) = 9 \cdot 37 \cdot 29 = 333 \cdot 29 = 9667$

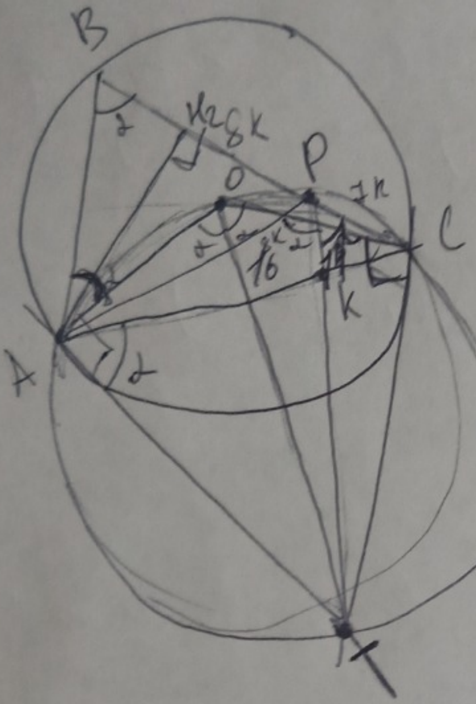
$\boxed{\text{Ответ: } 9667}$

Нод$(a; b; c) = 33$ - правда, т.к. среди $a_1; b_1; c_1$ есть числа $\not\vdots\ 3$; $\not\vdots\ 11$

Нок$(a; b; c) = 33 \cdot 3^{18} \cdot 11^{14} = 3^{19} \cdot 11^{15}$, т.к. среди $a_1; b_1; c_1$ есть числа $\vdots\ 3^{18}$; $\vdots\ 11^{14}$

№6 Чистовик

2/4



Дано: ΔABC – остр-ый.

$\omega(O,R)$ опис. окр ΔABC;

ω_1 – опис окр Δ OAC;

$\omega_1 \cap BC = P$; AT и TC – касательные к ω; $TP \cap AC = K$;

$S_{\Delta APK} = 16$; $S_{\Delta PKC} = 14$

а) $S_{\Delta ABC} = ?$

б) ~~Δr~~ $ctg\angle ABC = \frac{3}{5}$; AC=?

Решение:

$\angle ABC = \alpha$; $\angle AOC = 2\alpha$ (т.к. центральный опир. на дугу = 2α (из впис $\angle ABC$))

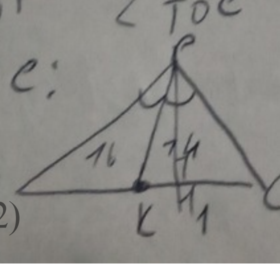
$\angle CAT = \alpha$ (т.к. угол между кас. и хордой $= \frac{1}{2} \smile AC = \angle ABC$)

т.к. TC – касательная к ω, то $\angle AOC = \angle TOA = \frac{\angle AOC}{2} = \alpha$ (OT – бис-са $\angle AOC$), тогда AOCT – вписанный 4-хугольник, т.к. $\angle TAC = \angle TOC = \alpha$; по одну сторону от CT;

ω_1 – окр-ость сод-ая точки AOC $\Rightarrow T \in \omega_1$;

тогда $\underset{\angle AOT}{\angle APT} = \underset{\angle TOC}{\angle TPC} = \alpha \Rightarrow$ PK – бис-са $\angle APC$;

Рассмотрим ΔAPC:



$S_{\Delta APK} = \frac{PH_1 \cdot AK}{2} = 16$

$S_{\Delta KPC} = \frac{PH_1 \cdot KC}{2} = 14$

: одно на другое

Чистовик

3/4

$$\frac{AK}{KC}=\frac{8}{7}=\frac{AP}{PC}$$

св-во бис-сы PK

Тогда если $AP=8k$, то $PC=7k$

$\angle ABP=\angle TPC=\alpha \Rightarrow AB \parallel TP$ (соотв-ые углы равны),

тогда:

$\angle APT=\angle BAP=\alpha$ (накрестлежащие) $=\angle ABP$

$\Rightarrow \triangle BPA$ - равнобедренный с осн-ем BA

$\Downarrow$

$BP=PA=8k$.

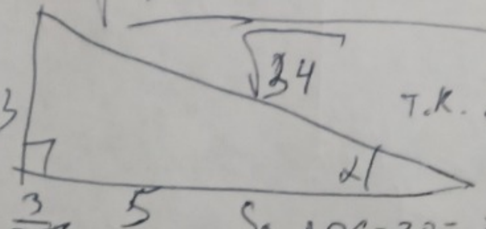
Тогда $S_{\triangle ABP}=\frac{AH_2 \cdot BP}{2}=\frac{AH_2 \cdot 8k}{2}=\frac{AH_2 \cdot 7k}{2}\cdot\frac{8}{7}=$

$=S_{\triangle APC}\cdot\frac{8}{7}=\frac{30 \cdot 8}{7}=\frac{240}{7}$

$S_{\triangle ABC}=\frac{240}{7}+30=30\left(\frac{15}{7}\right)=\frac{450}{7}$

$\boxed{\text{а) Ответ: } S_{\triangle ABC}=\frac{450}{7}}$

б) $\angle\alpha=\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$



т.к. $\alpha<90°$:

$\Downarrow$

$\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{34}}$; $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{34}}$

$S_{\triangle APC}=30=\frac{7k \cdot 8k}{2}\cdot\sin\alpha=$

4/4

Чистовик

$= \frac{7k \cdot 8k \cdot 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2} = 7 \cdot 8k^2 \cdot \frac{5 \cdot 3}{34} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 15}{17} k^2 = 30$

$k^2 = \frac{17}{14}$

$k = \sqrt{\frac{17}{14}}$

По т-ме косинусов △ ABC:

$AC^2 = 64k^2 + 49k^2 - 2 \cdot 56k^2 \cdot \cos 2\alpha =$

$= k^2\left(113 - 2 \cdot 56 \cdot \underbrace{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}_{\frac{16}{34}}\right) = \frac{17}{14} \cdot 113 - \frac{\cancel{2} \cdot 56 \cdot 16}{2 \cdot 14} =$

$= \frac{17 \cdot 113 - 56 \cdot 16}{14} = \frac{16(113-56)+113}{17} = \frac{16 \cdot 57 + 113}{17} =$

$= \frac{912+113}{17} = \frac{1025}{17}$ ~~$= 60\frac{5}{17}$~~ $AC = \sqrt{\frac{1025}{17}} = 5\sqrt{\frac{41}{17}}$

~~Ответ: $60\frac{5}{17}$~~ Ответ: $AC = 5\sqrt{41/17}$

№5

$x \neq 28$

x ~~$\neq$~~ < 29

$x \neq 0$

$x \neq -\frac{6}{7}$

$x > -49$

$x < -1$

$-49 < x < -1$

$x \neq 0$

$\Rightarrow x \neq -\frac{6}{7}$

$a = 29 - x$

$b = -x - 1$

$c = \frac{x}{7} + 1$

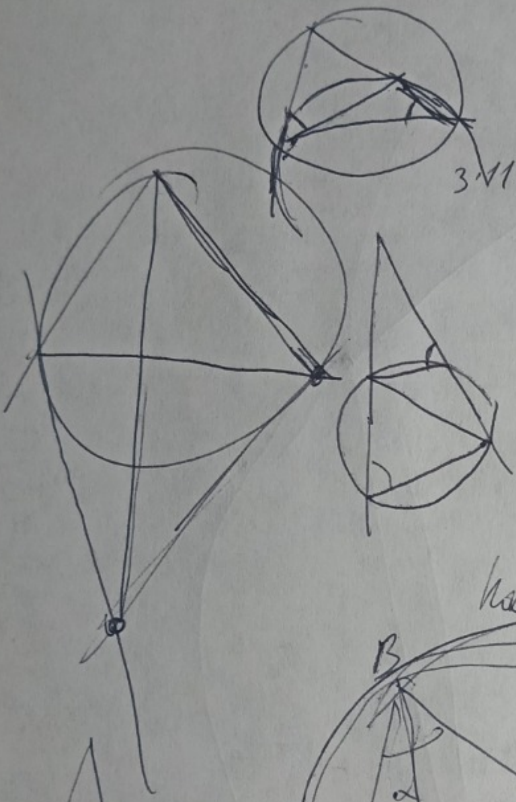
$\log_{\sqrt{b}}(c);\ \log_{b^2} a;\ \log_{\sqrt{c}}(b)$

$2\log_{b}(c);\ \frac{1}{2}\log_{b} a;\ 2\log_{c}(b)$

Нужно р-ть 3 случая.

Нок $(33\cdot a_1; 33\cdot b_1; 33\cdot c_1) = 3^{19}\cdot 11^{15}$

$a_1; b_1; c_1$ - взаимнопростые



$3\cdot 11\cdot$ Нок$(a_1; b_1; c_1) = 3^{19}\cdot 11^{15}$

$3^{18}\cdot 11^{15}$

~~Нок $(a_1 b_1 c_1)$~~

Нок abc; $\frac{abc}{\text{Нод}(A;B;C)}$

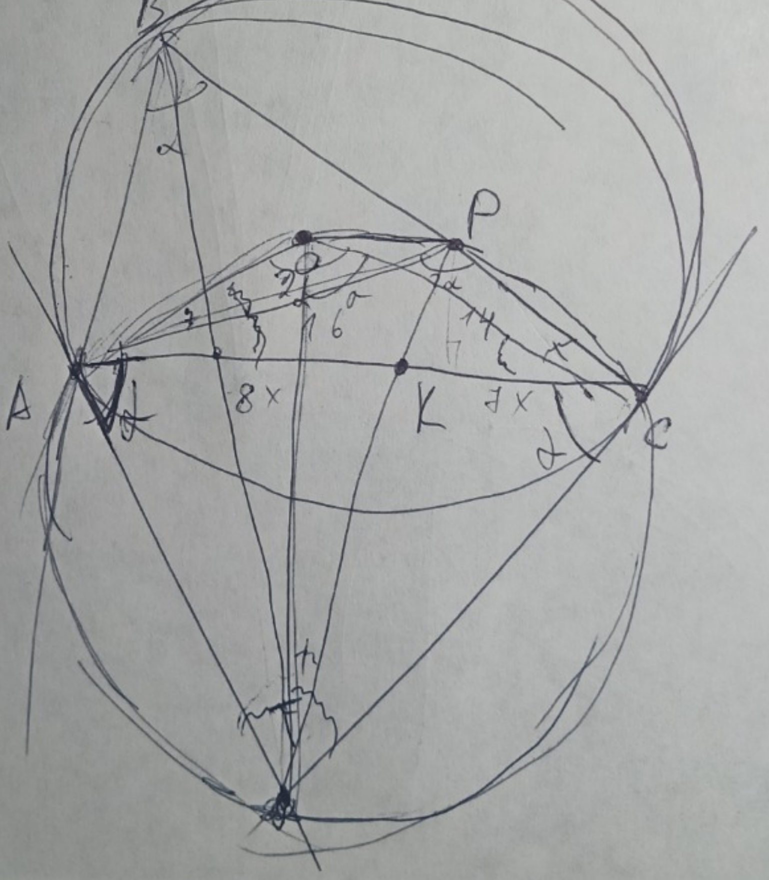
$3^{19}\, 11^{15} :$ ~~Нок$(a_1 b_1 c_1)$~~ $\cdot 1 = a_1 b_1 c_1$

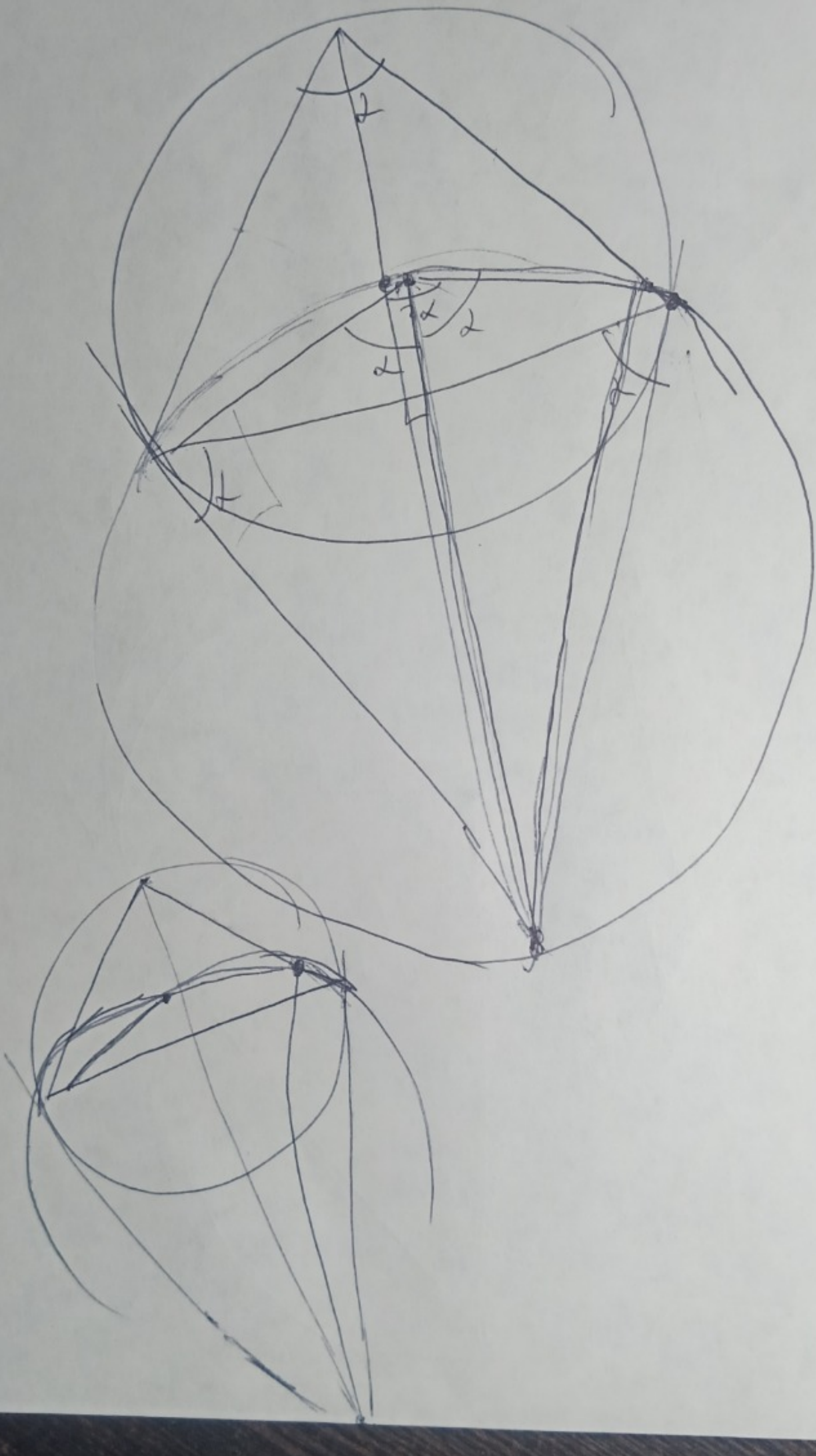
$: 33 ; 33$

$3^{18}\cdot 11; 11^{16}\cdot 3; 33$

$a\cdot b\cdot c = 3^{20}\cdot 11^{16}$

Нок$(6\ 4\ 8) = 2\cdot$ Нок$(3; 2; 4) = 24$



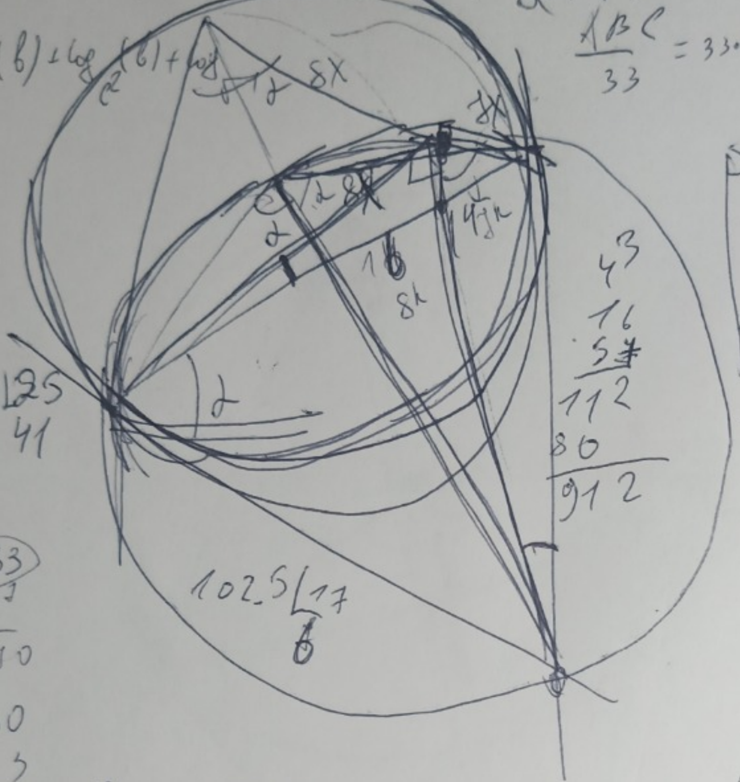

α
α
α
α
α
α

$33 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 \cdot (33)^3}{}$

$\frac{abc}{\text{Нод}(a; b; c)} = \text{нок}(A \cdot B C)$

$\frac{ABC}{33} = 33 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot c_1$

$\log_{\sqrt{a}}(b) + \log_{c^2}(b) + \log$



1025 | 25
41

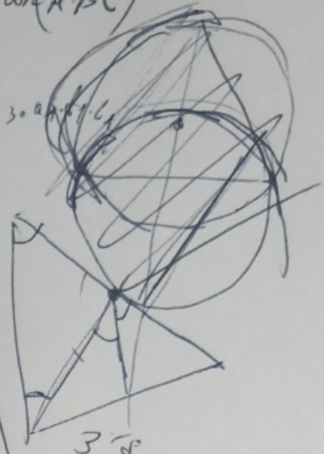
9.

333
+ 37
330

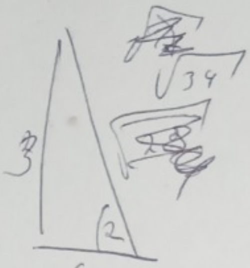
9990
− 333
9667

4^3

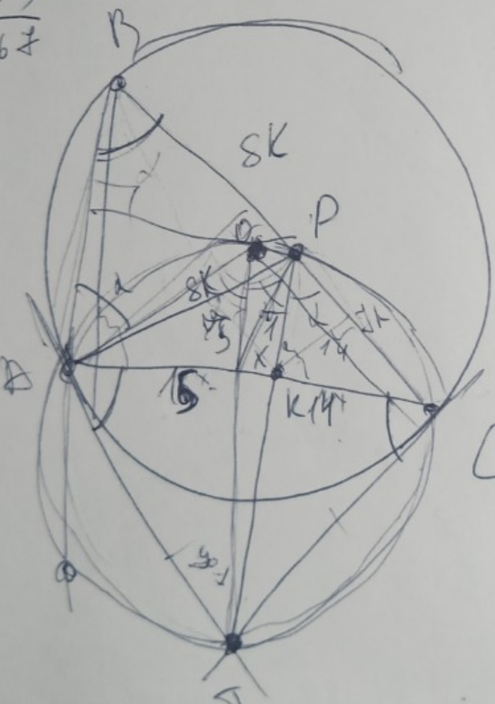
16
· 57
112
80
912



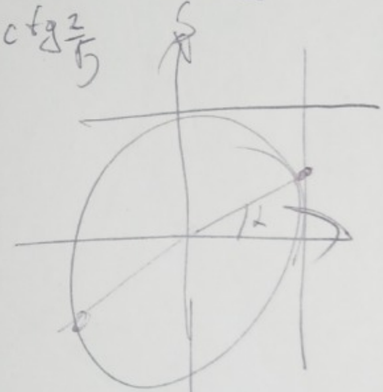
3·8
3·3·5·5·4
·5·5·7



α = arctg $\frac{2}{\sqrt{5}}$



$S = \frac{1}{2}$



$\frac{7k \cdot 8k}{2} \cdot 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{56k^2 \cdot 10}{29} = 30$

$k^2 = \frac{3 \cdot 29}{56}$