Часть 1

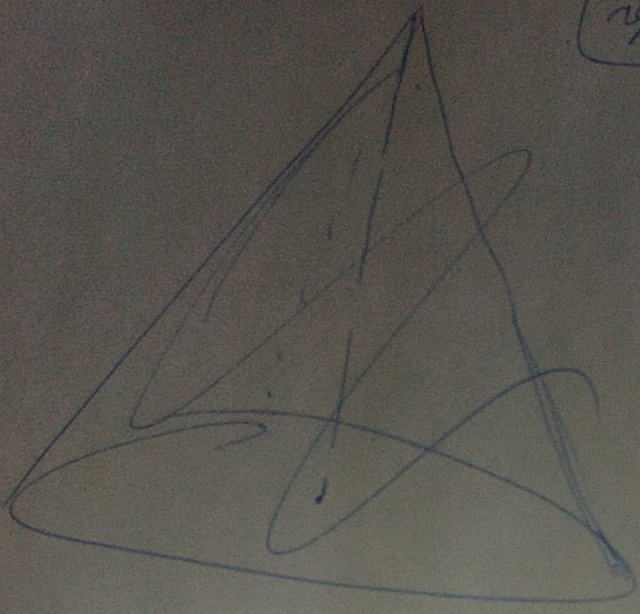
Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

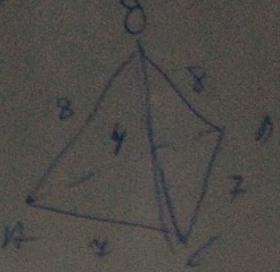
Шифр: **21104150**

ID профиля: **855543**

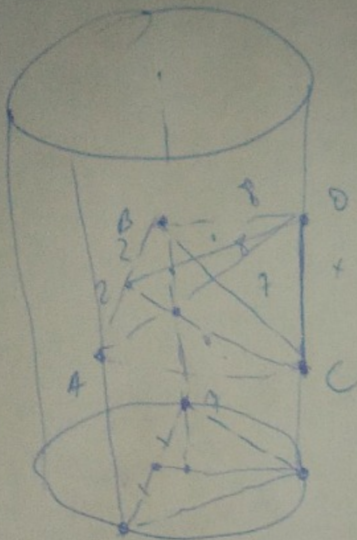
Вариант 24

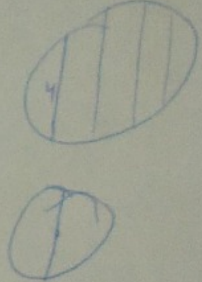
черновик





$S = \frac{abc}{4R}$





21104150 (U855543 M1296183)

№1 Черновик Вар 24

$S_9 = a_1 + a_2 + \dots + a_9 = \frac{a_1 + a_1 + 8b}{2} \cdot 9$ $a_5 \cdot a_{18} > S - 4$

$a_{10} \cdot a_{13} < S + 60$

$a_1 = a_1$ $b > 0$ $a_1, b \in \mathbb{Z}$ $(a_1 + 4b) \cdot 9$

$a_2 = a_1 + b$

$a_3 = a_1 + 2b$

$$\begin{cases} (a_1 + 4b)(a_1 + 17b) > 9(a_1 + 4b) - 4 \\ (a_1 + 9b)(a_1 + 12b) < 9(a_1 + 4b) + 60 \end{cases} \begin{cases} a_1^2 + 21a_1 b + 68b^2 > 9a_1 + 36b - 4 \\ a_1^2 + 21a_1 b + 108b^2 < 9a_1 + 36b + 60 \end{cases}$$

①

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 b - 9a_1 + 68b^2 - 36b + 4 > 0 \\ a_1^2 + 21a_1 b - 9a_1 + 108b^2 - 36b - 60 < 0 \end{cases}$$

$\underbrace{a_1^2 + 21a_1 b - 9a_1 + 68b^2}_{0} + 40b^2 \underbrace{- 36b + 4}_{0} - 64 < 0$

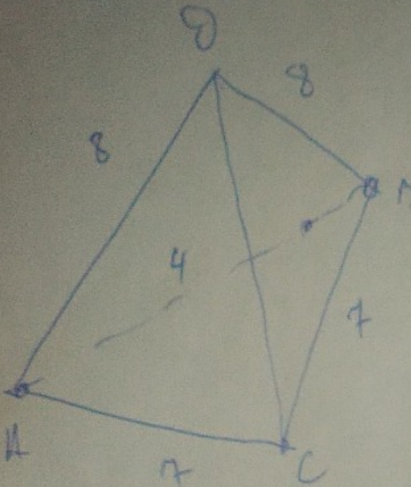
$40b^2 - 64 < 0$

$40b^2 < 64$

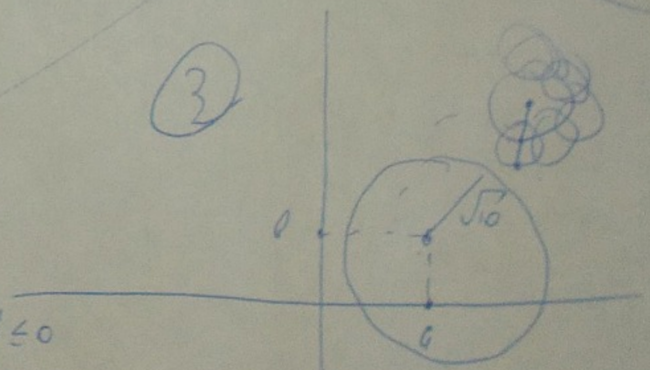
$10b^2 < 16$

$5b^2 < 8 \Rightarrow b = \pm 1$

$b > 0 \Rightarrow b = 1$



③



$a^2 + b^2 \le \min(-6a - 2b, 10)$

$-6a - 2b \ge 0$ $3a + b \le 0$

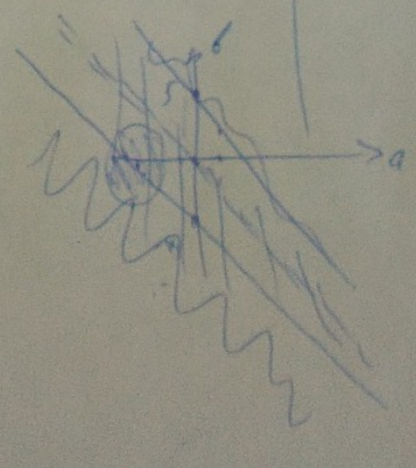
$-6a - 2b \ge 10$ $b \le -3a$

$3a + b \le 5$

$b \le -5 - 3a$

$a^2 + 6a + 9 + b^2 + 2b + 1 \le 10$

$(a+3)^2 + (b+1)^2 \le 10$



чистовик 24 вар
5 часть

Мы можем представить себе это как бесконечное количество ~~окружностей~~ кругов, с радиусом $R=\sqrt{10}$ и центрами, лежащими внутри другого ~~кр~~ круг., с центром в т.$(-3;-1)$ и $R=\sqrt{10}$. Таким образом (решение похоже на доказательство теорем в волновой оптике) мы видим, что все эти круги накладываются друг на друга, но нас интересуют те, чьи центры лежат на окружности, образующей круг. Очевидно, что расстояние от т.$(-3;-1)$ до их дальних точек $= R+R=2\sqrt{10}$, а т.к. их бесконечно много $\Rightarrow$ они образуют новый круг, с радиусом $R'=2\sqrt{10}$

$$S=\pi(R')^2=\pi\cdot 4\cdot 10=\boxed{40\pi}$$

Ответ: 40π

Лист 4

№3

Чистовик 24 вариант I часть

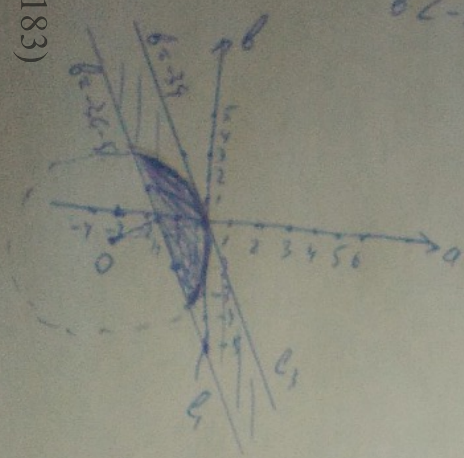
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b;10) & (2)\end{cases}$$

Я (2) $a^2+b^2\le \min(-6a-2b,10)$

$]\ -6a-2b<10$ + $a^2+b^2\ge 0 \Rightarrow -6a-2b>0$

$3a+b>-5$ $\qquad 3a+b<0$

$b>-3a-5$ $\qquad b<-3a$



$a^2+6a+9+b^2+2b+1\le 10$

$(a+3)^2+(b+1)^2\le 10$

~~окружность~~ круг с центром $(\cdot)(-3;-1)$ $R=\sqrt{10}$

$]\ OH\perp l_1$ $\quad (l_1 - b=-3a-5)$

$\Updownarrow$

$k_1\cdot k_2=-1$ $\quad k_1\cdot(-3)=-1$ $\quad k=\frac{1}{3}$

$\begin{cases}b_1=-3a-5\\ b_2=\frac{1}{3}a+n\end{cases}$ $\quad (\cdot)\ O\in l_2 \Rightarrow -1=-1+n$, $n=0$

$b_2=\frac{1}{3}a$

$(\cdot)\ H\in l_1$ и $\in l_2 \Rightarrow$ пусть её координаты $(x;y)$

$\begin{cases}y=-3x-5\\ y=\frac{x}{3}\end{cases}$ $\quad \frac{x}{3}+3x=-5$, $10x=-15$, $x=-1,5$, $y=-\frac{1}{2}$ $\Big| \Rightarrow OH=\sqrt{(-3+\frac{3}{2})^2+(-1+\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

решения - на чертеже

O касается l_1 $\qquad$ I

лист ③

$]\ -6a-2b\ge 10$

$3a+b\le -5$ $\Rightarrow$

решения - оставшаяся часть круга

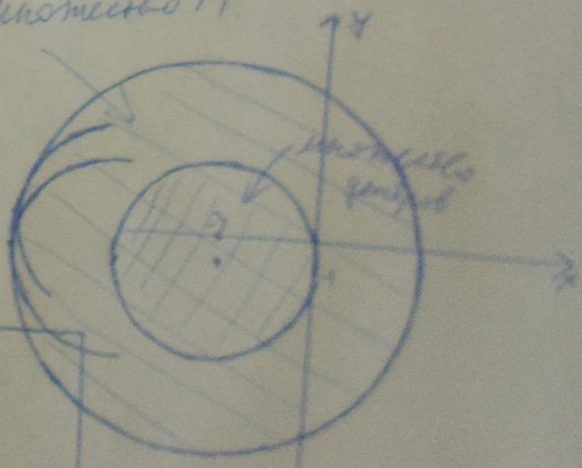
II

Из I и II $\Rightarrow$ a и b принадлежат кругу $O(-3;-1)$ и $R=\sqrt{10}$

Я (1)

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 10$ – круг с центром $(\cdot)(a;b)$ $R=\sqrt{10}$

множество M.



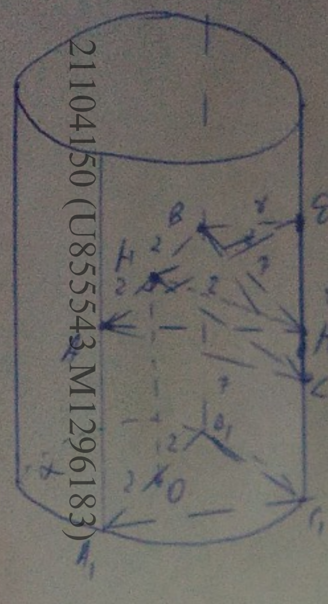
№2

чистовик 24 вариант
I часть

1) $CH \perp AB \Rightarrow$ т.к. ABC – р/б $(AC = BC) \Rightarrow AH = BH$

2) $\measuredangle \triangle ABD$ DH – мед; $BD = AD \Rightarrow DH \perp AB$ т.к. ABD – р/б

3) $A_1B_1C_1$ – проекция $\triangle ABC$ на плоскость α – нижнее основание цилиндра.



4) $\triangle ADC = \triangle BDC$ (III)

$BD = AB = 8$
$AC = BC = 7$
DC – общ

$\Rightarrow AH = BH$, где $AH \perp DC$ и $BH_1 \perp DC$

5) по Т пиф в $\triangle AHC$ и BHC

$$\begin{cases} KC^2 = AC^2 + AH^2 \\ K_1C^2 = BH^2 + BC^2 \end{cases}$$

$AC = BC \Rightarrow AH = BH \Rightarrow KC = K_1C \Rightarrow$
$\Rightarrow H$ и H_1 – совпадают!

6) $\measuredangle AA_1C_1H$

$AH \perp HC_1$
$A_1C_1 \perp HC_1$
$AA_1 \parallel HC_1$

$\Rightarrow AA_1C_1K$ – прямоугольник.

$AA_1 = KC_1$

7) –//–

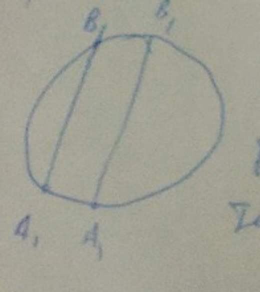
$BB_1 = KC_1$

8) $AA_1 = KC_1 = BB_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} AA_1 \perp \alpha \\ BB_1 \perp \alpha \\ AA_1 = BB_1 \end{cases} \Rightarrow AB \parallel \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1B_1 = AB \Rightarrow AB$ – проецируется без искажения.

7) $\measuredangle \alpha$



Очевидно, что A_1B_1 – хорда и она всегда равна 4, а если мы хотим сделать окружность наименьшего радиуса мы должны взять A_1B_1 в качестве диаметра, потому что диаметр – наибольшая хорда.
Таким образом $R = 2$, а $A_1O = OB_1 = R$ O – центр окр.
$O \in A_1B_1$

8) т.к. $AHOA_1$ – пр-ник $(AH = A_1O)$ $\Rightarrow O$ – проекция (·) H. $OH = AA_1 = HC_1$ (**)

9) из (**) $\Rightarrow$ ~~XXXX~~ $HH \parallel \alpha$ т.к. $HO \perp \alpha$; $HC_1 \perp \alpha$; $HO = HC_1 \Rightarrow HC_1 = OC_1 = R = 2$

10) по Т пифаг в $\triangle AHK$ $AH = 2\sqrt{2}$ ($\angle H = 90°$)

11) по Т пифаг в $\triangle AHC$ $HC = \sqrt{49 - 8} = \sqrt{41}$ ($\angle H = 90°$)

12) по Т пифаг в $\triangle ADH$ $DH = \sqrt{64 - 8} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$ ($\angle H = 90°$) $\Rightarrow DC = DH + HC = \sqrt{41} + 2\sqrt{14}$

Ответ: $DC = \sqrt{41} + 2\sqrt{14}$

лист 2

Олимпиада Физтех по математике   чистовик

I часть. 24 вариант. 11 класс

№1

a_1 – первый член, а b – разность прогр. $\Rightarrow a_1 = a_1;\ a_2 = a_1 + b;\ a_3 = a_1 + 2b \ldots$

т.к. $a_1, a_2 \ldots$ – целые числа $\Rightarrow a_1$ и $b \in \mathbb{Z}$.

$S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{a_1 + a_1 + 8b}{2} \cdot 9 = 9(a_1 + 4b)$

По условию $\begin{cases} a_5 \cdot a_{18} > S - 4 \\ a_{10} \cdot a_{13} < S + 60 \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1+4b)(a_1+17b) > 9(a_1+4b) - 4 \\ (a_1+9b)(a_1+12b) < 9(a_1+4b) + 60 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2 + 21a_1b + 68b^2 > 9a_1 + 36b - 4 \\ a_1^2 + 21a_1b + 108b^2 < 9a_1 + 36b + 60 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1b - 9a_1 + 68b^2 - 36b + 4 > 0 \quad (1) \\ \underbrace{a_1^2 + 21a_1b - 9a_1 + 68b^2 - 36b + 4}_{(1) > 0} + 40b^2 - 64 < 0 \end{cases}$

$\underset{0}{\overset{\vee}{(1)}} + 40b^2 - 64 < 0$

$40b^2 < 64$

$5b^2 < 8 \Rightarrow$

$b \in \mathbb{Z} \Rightarrow b = -1 \quad b = 0 \quad b = 1$

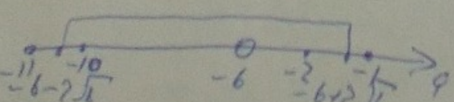
так как прогрессия $\uparrow \Rightarrow b > 0$

Таким образом $b = 1$

Подставим в исходную систему.

$\begin{cases} (a_1+4)(a_1+17) > 9(a_1+4) - 4 \\ (a_1+9)(a_1+12) < 9(a_1+4) + 60 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + \overset{32}{36 - 4} \\ a_1^2 + 21a_1 + 108 < 9a_1 + \underset{96}{36 + 60} \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1+6)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -6 \quad (**) \\ D = 144 - 12 \cdot 4 = \end{cases}$

$= 12 \cdot 8 = 4 \cdot 4 \cdot 6$



$a_1 = \frac{-12 \pm 4\sqrt{6}}{2} = -6 \pm 2\sqrt{6}$

$2\sqrt{6} = n$

$n^2 = 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 < n < 5$

$4 < 2\sqrt{6} < 5 \quad (*)$

С учетом $(*)$ $-11 < -6 - 2\sqrt{6} < -10$

$-2 < -6 + 2\sqrt{6} < -1$

Таким образом нас устраивают все целые $a_1 \in [-10; -2]$, за исключением 6 т.к. $(**)$

Ответ: $-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104150**

ID профиля: **855543**

Вариант 24

$\log_a b^2$ | $2\log_a b$

$\log_{c^2} a$ | $\frac{1}{2}\log_c a$

$\log_b c$ | $\log_b c$

$2\log_a b = \frac{1}{2}\log_c a = \log_b c+1 \quad | \cdot 2$

$4\log_a b = \log_c a = 2\log_b c+2$

$\log_a b^4 = \log_c a = \log_b c^2 \cdot b^2$

$\log_a b^4 = \frac{1}{\log_a c}$

$\log_a b^4 \cdot \log_a c = \log_b c^2 b^2$

$a = c^{\log_c a} = b^{4 \cdot \log_a c}$

$b^4 = a^{\log_c a}$

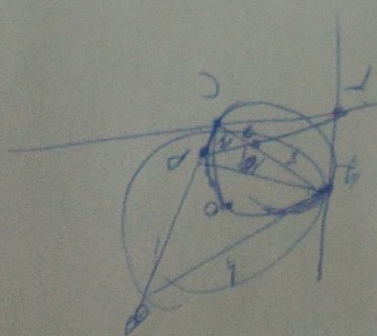
$\left(a^{\log_c a}\right)^{4\log_a c} = a^{4\log^2_a c} = a$

$4\log^2_a c = 1$

$\log^2_a c^2 = 1$

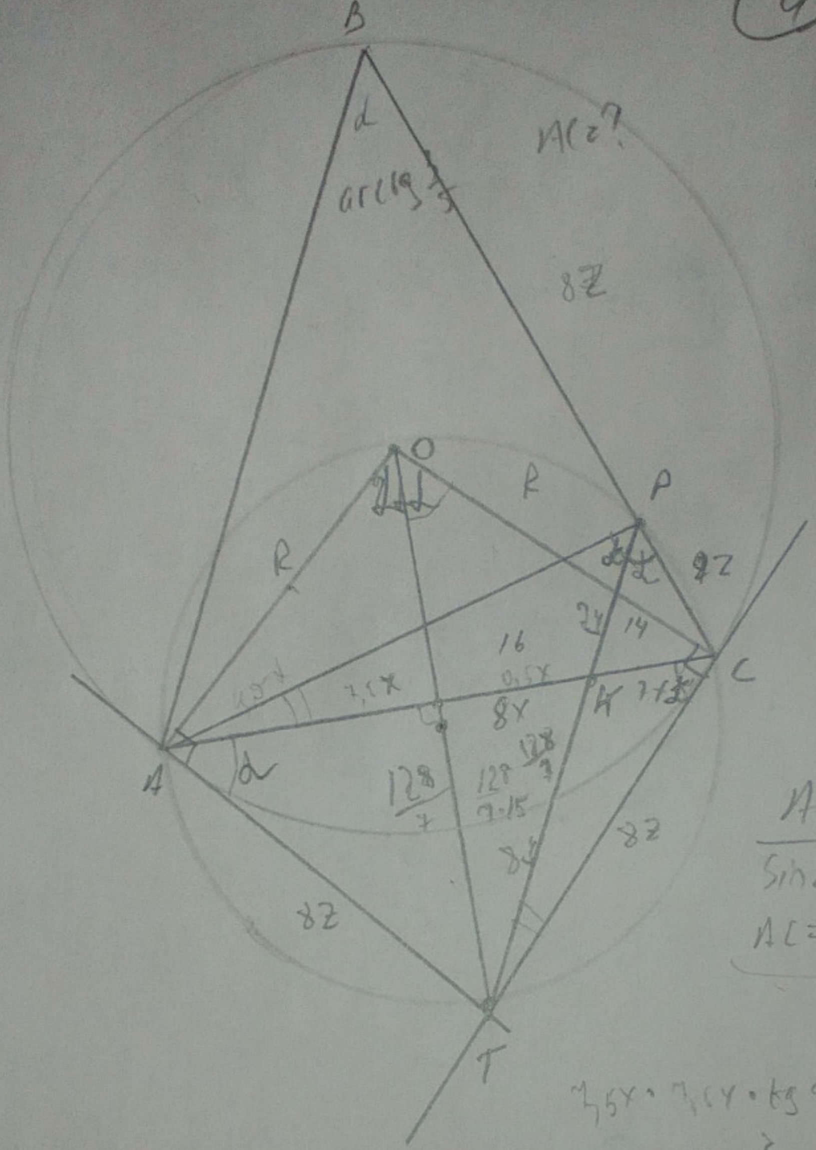
$c^2 = 1$

$a = c^{\pm 1/2}$



21104150 (U855543 M1296184)

9



$$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = 2R$$

$$AC = 2 \cdot R \cdot \sin \alpha$$

$7{,}5x \cdot 7{,}5x \cdot tg\ arctg \frac{3}{5} = \frac{128}{7}$

$\frac{15 \cdot 15}{4} x^2 = \frac{128 \cdot 5}{\cdot 21}$

15

$\frac{HC}{HT}$

$\frac{15}{4{,}15}$

$306 = 2 \cdot 135 + 36$

150 + 50 + 75

Чернови

чистовик II часть 24 вар

№5

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)=A$

$\log_{(x+1)^2}(29-x)=\frac{1}{2}\log_{|x+1|}(29-x)=\frac{1}{2}\log_{-x-1}(29-x)=B$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=2\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)=C$

ОДЗ
$x<29$
$x\neq 28$
$x\neq -2$
$x<-1$
$x\neq -42$
$x\neq -7$

$\exists\ A=C=B+1$

$\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)$

$\frac{1}{\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(29-x)}=\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)\Rightarrow\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(29-x)\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)=1$

$2\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)=\frac{1}{2}\log_{(-x-1)}(29-x)+1$

$29-x\ \searrow$
$\frac{x}{7}+7\ \nearrow$
$\frac{x}{7}+7\ \nearrow$
$-x-1\ \searrow$

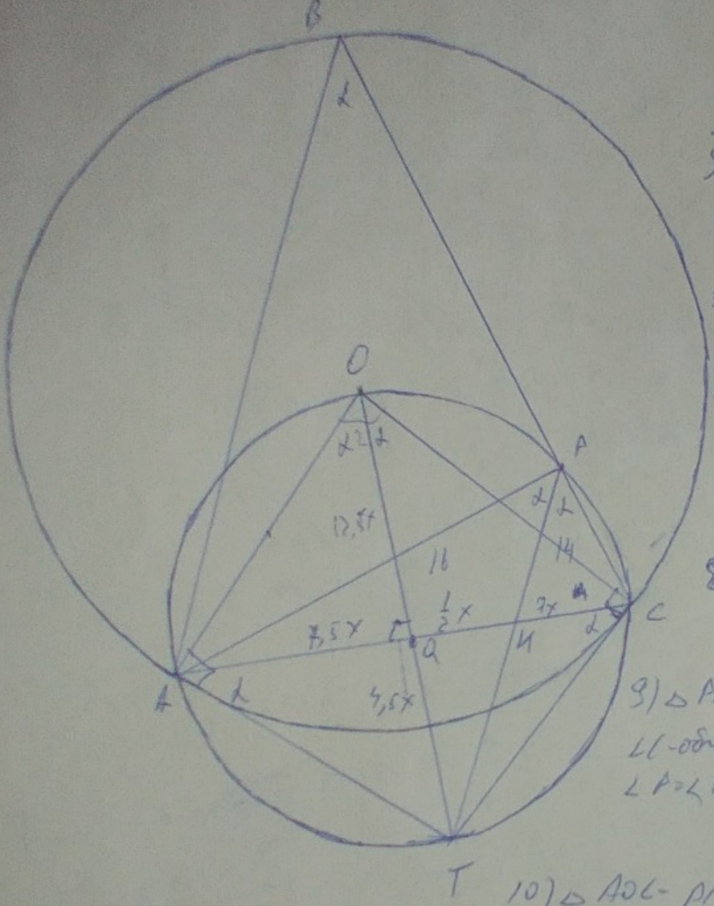
$\Rightarrow$ л.ч. $\searrow\ \uparrow$; пр.ч. – const

значит ур имеет не более 1 корня

черновик
II часть 24 вариант

№3

0) $AC \cap OT = Q$



1) $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \angle$ т.к. впис и центр.

2) $\measuredangle AOCT$
$\angle A + \angle C = 180°$ $\Rightarrow$ вокруг $AOCT$ можно ○

3) $\angle ACT = \frac{1}{2} \cup AC = \alpha$ т.к. кас и хорд ω

4) $\angle ACT = \frac{1}{2} \cup AT = \angle APT = \alpha$

5) $\angle APT = \angle AOT = \alpha \Rightarrow$ OT - бис $\angle AOC$

6) $\angle TOC = 2\alpha - \alpha = \frac{1}{2} \cup TC = \angle TPC = \alpha$

7) $\angle HPC = \alpha = \angle ABC \Rightarrow AB \parallel KP$

8) $\frac{S_{APH}}{S_{PHC}} = \frac{AH}{HC} = \frac{8}{7}$ т.к. h общая
$AH = 8x$; $HC = 7x$ $AC = 15x$

9) $\triangle PHC \sim \triangle ABC$ (I)
$\angle C$ - общ
$\angle P = \angle B = \alpha$
$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{PHC}} = k^2 = \left(\frac{15x}{14x}\right)^2 = \frac{15^2}{14^2}$

$S_{ABC} = \frac{15^2}{7 \cdot x} \cdot x^2 = \frac{30 \cdot 15}{7} = \frac{450}{7}$

10) $\triangle AOC$ - р/б
OQ - медиана $\Rightarrow AQ = QC = 7,5x \Rightarrow QH = \frac{1}{2}x$

11) $AH \cdot HC = PH \cdot HT$ - теорема о ∩ хордах.

12) $\triangle AQT$ $\angle Q = 90°$
$QT = AQ \cdot tg\,\angle = \frac{3}{5} \cdot 7,5x = 4,5x$
по т. пифаг $AT = \sqrt{7,5^2 + 4,5^2}\,x = \sqrt{\left(\frac{75}{10}\right)^2 + \left(\frac{45}{10}\right)^2}\,x = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2}\,x = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{225 + 81} = \frac{x\sqrt{306}}{2} = \frac{3x\sqrt{34}}{2}$

13) $\triangle AOT$
$\angle A = 90° \Rightarrow$ по т о пр. геом $AQ^2 = OQ \cdot QT$
$\frac{15^2}{2^2} x^2 = \frac{9}{2} x \cdot QO$ $\quad QO = \frac{5 \cdot 25}{9 \cdot 2} x = 12,5x$

14) по т пифаг в $\triangle AOQ$ $AO = R = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2}\,x = \frac{5}{2} x \sqrt{9 + 25} = \frac{5}{2} x \cdot \sqrt{34}$

~~14) по т синусов в △ ABC~~

15) $\frac{S_{AHT}}{S_{PHC}} = \frac{8}{7} \Rightarrow S_{AHT} = 18 = \frac{8x \cdot 4,5x}{2}$ $\quad 4 = 4,5x^2$
$x = \frac{3\sqrt{95}}{2}$
$AC = 15x$

лист 2

Ответ: $S_{ABC} = \frac{450}{7}$ ед. кв. $AC = \frac{45\sqrt{95}}{2}$

21104150 (U855543 M1296184)

Олимпиада „Физтех" по математике. чистовик

II часть 24 вариант 11 класс.

№4

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=33 \\ НОК(a,b,c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$$

I заметим, что если $a \neq b \neq c$, то и (a,b,c) — р-е, то (b,a,c) ... — тоже решения. всего таких троек — 6 штук.

II Δ 3 числа и НОД

$\underline{33\cdot 3^{n}\cdot 11^{m}}$, $\underline{33\cdot 3^{t}}$, $\underline{33\cdot 11^{4}}$, очевидно, что все числа имеют делитель 33, и помимо него одно из чисел может иметь и 3 и 11, тогда два других либо 3, либо 11 т.к. иначе НОД станет больше. $n, m, t, k \in \mathbb{Z}$ $n, m, k, t \geq 0$

Δ 3 числа и НОК

$\underline{33\cdot 3^{n}\cdot 11^{m}}$, $\underline{33\cdot 3^{t}}$, $\underline{33\cdot 11^{4}}$ $НОК = 33\cdot 3^{18}\cdot 11^{14} \Rightarrow \begin{cases} n+t=18 \\ m+4=14 \end{cases}$

III $\begin{cases} n+t=18 \\ m+4=14 \end{cases}$ $\underline{\exists\, n \neq t;\ m \neq 4}$ $\Rightarrow \left.\begin{matrix} 0-18 \\ 1-17 \\ 9-9-X \\ 18-0 \end{matrix}\right]$ 18 пар n и t; 14 пар m и 4 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего $18\cdot 14$ вариантов сделать наши 3 числа $\Rightarrow \underline{6\cdot 14\cdot 18}$ — троек (a,b,c)

$\exists\, n=t \Rightarrow$ 14 пар m и 4 и 3 варианта перестановки a и b

$\underline{14\cdot 3}$ — вар

$\exists\, m=4 \Rightarrow$ 18 пар n и $t \Rightarrow \underline{18\cdot 3}$ — вар

$$\begin{array}{r} 6 \\ 28 \\ \times 18 \\ \hline 224 \\ 28 \\ \hline 504 \end{array}$$

IV всего вариантов $6\cdot 14\cdot 18 + 14\cdot 3 + 18\cdot 3 = 3(2\cdot 14\cdot 18 + 14 + 18) = 3\cdot 536 = 1500 + 108 =$
$= 1608$ вар

$28\cdot 18$ 32

Ответ: 1608 троек

лист ①

21104150 (U855543 M1296184)