Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103857**

ID профиля: **847544**

Вариант 24

В-24; часть I   Чистовик

1. $a_5 \cdot a_{18} > S-4$ $a_5 = a_1+4d$ $a_{10} = a_1+9d$

$a_{10} \cdot a_{13} < S+60$ $a_{18} = a_1+17d$ $a_{13} = a_1+12d$

$(a_1+4d)(a_1+17d) > S-4$

$a_1^2+17a_1d+4a_1d+68d^2 > S-4$

$a_1^2+21a_1d+68d^2+4 > S$

$(a_1+9d)(a_1+12d) < S+60$

$a_1^2+12a_1d+9a_1d+108d^2 < S+60$

$a_1^2+12a_1d+9a_1d+108d^2-60 < S$

$$\begin{cases} a_1^2+21a_1d+68d^2+4 > S \\ a_1^2+21a_1d+108d^2-60 < S \end{cases} \Rightarrow$$

$\cancel{a_1^2}+\cancel{21a_1}d+108d^2-60 < \cancel{a_1^2}+\cancel{21a_1}d+68d^2+4$

$40d^2-64 < 0$

$d^2 = \frac{64}{40}$ прогрессия возрастает $\Rightarrow d > 0$

все члены прогрессии целые $\Rightarrow$

d – целое число $\Rightarrow$

$0 < d < \frac{64}{2\,\cancel{0}\,\cancel{10}} \Rightarrow \underline{d=1}$

Черновик   Продолжение задания 1   2

$$S_9 = \frac{2a_1 + n - 1}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + 8}{2} \cdot 9 = (a_1+4)9$$

$$\begin{cases} (a_1+4)(a_1+17)+4 > (a_1+4)9 \\ (a_1+9)(a_1+12)-60 < (a_1+4)9 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1^2+21a_1+68+4-9a_1-36 > 0 \\ a_1^2+21a_1+108-60-9a_1-36 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+12a_1+36>0 & (a_1+6)^2>0 \\ a_1^2+12a_1+12<0 & (a_1-(-6+2\sqrt6))(a_1-(-6-2\sqrt6))<0 \end{cases}$$

$D = 144-48 = 96 = (4\sqrt6)^2$ $a_1 = \frac{-12 \pm 4\sqrt6}{2} = -6 \pm 2\sqrt6$

$$\begin{cases} a_1 \neq -6 \\ a \in (-6-2\sqrt6; -6+2\sqrt6) \end{cases}$$

$\sqrt4 < \sqrt6 < \sqrt9$

-11 $-6-2\sqrt6$ -10 -2 $-6+2\sqrt6$ -1

$2<\sqrt6<3 \mid \cdot(-2)$

$-6 < -2\sqrt6 < -4 \mid -6$

$-12 < -6-2\sqrt6 < -10$

$(-6-2\sqrt6)^2 \vee (-11)^2$ $\Rightarrow -6-2\sqrt6 > -11$

$36+24\sqrt6+24 \vee 121$

$24\sqrt6 \vee 61$

$3456 > 3721 \Rightarrow$

$2<\sqrt6<3 \mid \cdot 2$

$4 < 2\sqrt6 < 6 \mid -6$

$-2 < -6+2\sqrt6 < 0$

$-6+2\sqrt6 \quad -1 \quad \mid +6$

$2\sqrt6 \quad 5$

$24 < 25$

$a_1 = \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2\}$

Ответ: $a_1 = \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2\}$

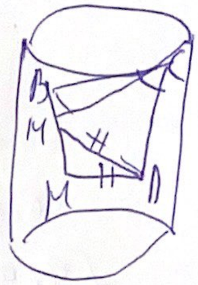
чистовик

Дано:

2. $AD = BD = 8$

$AC = BC = 7$

$AB = 4$



Найти:

r наим - ?

CD - ?

решение:

чтобы основание цилиндра имело наименьший радиус нужно чтобы

$\angle MCD$ и $\angle CDM$ - наим

$MC = \sqrt{AC^2 - AM^2}$ по т. Пифагора . т.к DM и CM - высоты р/б Δ

$MC = \sqrt{49-4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$DM = \sqrt{DA^2 - AM^2} = \sqrt{64-4} = \sqrt{6} = 2\sqrt{15}$

=> чтобы $\angle C$ и $\angle D$ наим. => $\angle C$ - наиб.

$$\cos\angle M = \frac{DM^2 + CM^2 - CD^2}{2\cdot DM \cdot CM} = \frac{60+45-x^2}{2\cdot 2\sqrt{15}\cdot 3\sqrt{5}} \Rightarrow$$

наиб$\angle$ => $>90°$ =>

=> $\cos\angle < 0$

$$\begin{cases} CD > CM + MD \\ CD < 3\sqrt{5} + 2\sqrt{15} \\ 3\sqrt{5} + CD > 2\sqrt{15} \\ 2\sqrt{15} + CD > 3\sqrt{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 3\sqrt{5} + 2\sqrt{15} \\ x > 2\sqrt{15} - 3\sqrt{5} \\ x > 3\sqrt{5} - 2\sqrt{15} \\ (2\sqrt{15})^2 (3\sqrt{5})^2 \end{cases}$$

$60 > 45 \Rightarrow$

$x < 3\sqrt{5} + 2\sqrt{15}$

$x > 2\sqrt{15} - 3\sqrt{5}$

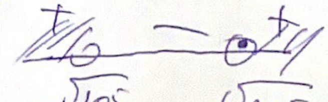
$x > \sqrt{105}$

$$\frac{105 - x^2}{12\sqrt{75}} < 0$$

$105 - x^2 < 0$

$x^2 > 105$

$x > \pm 105$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103857**

ID профиля: **847544**

Вариант 24

4: 1 чистовик

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=33 \\ \text{НОК}(a,b,c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$$

$\text{НОД} = (\frac{a}{33}; \frac{b}{33}; \frac{c}{33}) = 1 \Rightarrow \frac{a}{33}\cdot\frac{b}{33}\cdot\frac{c}{33} = \frac{3^{19}\cdot 11^{15}}{33}$

$\frac{a}{33}\cdot\frac{b}{33}\cdot\frac{c}{33} = 3^{18}\cdot 11^{14}$

1) Предположим, что одно из чисел $\frac{a}{33}$ $\frac{b}{33}$ $\frac{c}{33} = 1$

Тогда кол-во таких случаев : $3\cdot 19\cdot 15 = 855$

2) Если ни одно из чисел $\neq 1$, то возможны 2 случ:

одно из чисел делится на 3(11), а 2 др. на 11(3)

или 1 из 3 чис. делится на 3, а др на 11, а третье на 3 и 11 $\Rightarrow$ кол-во случаев

$3\cdot 14 + 3\cdot 18 + 6\cdot 12\cdot 13 = 1422$

$855 + 1422 = 2277$

ответ: 2277

чистовик

2

5) $\log_{\sqrt{28-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(28-x)$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$ $\quad x - ?$

ОДЗ:

$\exists\ a = \log_{\sqrt{28-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$b = \log_{(x+1)^2}(28-x)$

$c = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

$$\begin{cases} \frac{x}{7}+7>0 \\ \sqrt{28-x}>0 \\ \sqrt{28-x}\neq 1 \\ 28-x>0 \\ (x+1)^2>0 \\ (x+1)^2\neq 1 \\ \sqrt{\frac{x}{7}+7}>0 \\ \sqrt{\frac{x}{7}+7}\neq 1 \\ -x-1>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>-49 \\ 28-x>0 \\ 28-x\neq 1 \\ x<28 \\ x\neq -1 \\ x\neq 0 \\ x\neq -2 \\ x<-1 \\ \frac{x}{7}+7>0 \\ \frac{x}{7}+7\neq 1 \end{cases}$$

$x>-49$

$x<28$

$x\neq 27$

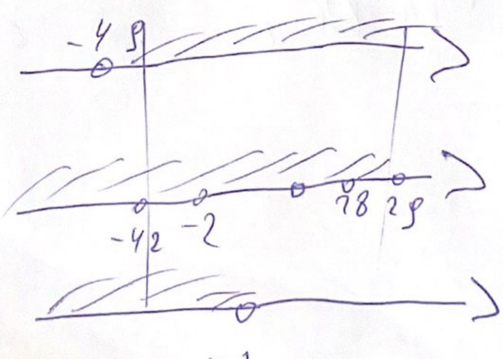
$x<28$

$x\neq -1; 0; -2$

$x<-1$

$x>-49$

$x\neq -42$



$x\in(-49; -42)\cup(-42; -2)\cup(-2; -1)$

Чистовик (3)

$a = 2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$b = \frac{1}{2}\log_{(-x-1)}(29-x) = \frac{1}{2\log_{29-x}(-x-1)}$

$c = 2\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = \frac{2\cdot\log_{29-x}(-x-1)}{\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)}$

$] \ \log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = t$

$a = 2t$

$b = \frac{1}{2k}$

$c = \frac{2}{t}$

$1^\circ)\ a = b$

$c = a+1$

$2t = \frac{1}{2k}$

$\frac{2k}{t} = 2t+1$

$4tk = 1$

$t = \frac{1}{4k}$

$\frac{2k}{\frac{1}{4k}} = \frac{1}{4k}+1$

$8k^2 = \frac{1}{2k}+1$

$16k^3 = 1+2k$

$16k^3-2k-1=0$

$] \ k = \frac{1}{2}$

$\frac{16}{8} - 2\cdot\frac{1}{2} - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{array}{l|l} 16k^3-2k-1 & k-\frac{1}{2} \\ \hline 16k^3-8k^2 & 16k^2+8k+2 \\ \hline 8k^2-2k & \\ 8k^2-4k & \\ \hline 2k-1 & \end{array}$$

$16k^2+8k+2$

$D = 64-4\cdot 2\cdot 16 < 0$

$\varnothing$

чистовик (4)

$k=\frac{1}{2} \Rightarrow t=\frac{1}{4\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow a=1$

$b=1$

$c=2$

$a=\log_{\sqrt{28-x}}\left(\frac{x}{2}+7\right)=1$; $b=\log_{(x+1)^2}(28-x)=1$; $c=\log_{\sqrt{\frac{x}{2}+7}}(-x-1)$

$\frac{x}{2}+7=\sqrt{28-x}$

$2\sqrt{28-x}=x+14$, $x+14\geq 0$

$4(28-x)=x^2+28x+196$

$x^2+32x+84=0$

$D=1024-336=688$ ...

$28-x=(x+1)^2$

$28-x=x^2+2x+1$

$x^2+3x-27=0$

$-x-1=\frac{x}{2}+7$

$-2x-2=x+14$

$3x=-16$

$x=-7$ при $x=-7$

2° $\begin{cases} b=c \\ a=b+1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{2k}=2k \\ 2t=\frac{1}{2k}+1 \end{cases}$

$4k^2=1$

$8k^2=\frac{1}{2k}+1 \mid \cdot 2k$

$16k^2=1+2k$

$16k^2-2k-1=0$

$k=\frac{1}{2} \Rightarrow t=4\cdot\frac{1}{4}=1$

$a=2 \quad b=1 \quad c=1$

$\log_{\sqrt{28-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=2$ чистовик $\log_{(x+1)^2}(28-x)=1$ 5

$\frac{x}{7}+7=28-x$

$x+49=203-7x$

$8x=154$

$x=19,25$

$\notin$ ОДЗ

$28-x=(x+1)^2$

$x=4 \quad x=-7$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=1$

$\sqrt{\frac{x}{7}+7}=-x-1$

$\frac{x}{7}+7=x^2+2x+1$

$7x^2+14x+7-x-49=0$

$7x^2+13x-42=0$

$D=169+28\cdot42=1345$

$x=19,25 \notin$ ОДЗ

3° $\begin{cases} a=c \\ b=a+1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2t=\frac{2k}{7} \\ \frac{1}{2k}=2t+1 \end{cases}$ $2k=2t^2$ $k=t^2$

$\frac{1}{2t^2}=2t+1$

$1=4t^3+2t^2$

$4t^3+2t^2-1=0$

$\cancel{4\cdot\frac{1}{8}+\dots}$

$4t^3+2t^2-1 \;|\; t-\frac{1}{2}$

$4t^3-2t^2 \qquad 4t^2+4t+2$

$4t^2-1$

$-4t^2-2t$

$-2t-1$

$\cancel{2t-1}$

0

$t=\frac{1}{2}$

$4t^2+4t+2=0$ $2t^2+2t+1=0$

$D=4-4\cdot2<0$

$\varnothing$

черновик ⑥

$\log_{\sqrt{28-x}}\left(\frac{x}{2}+2\right)=1$

$\frac{x}{2}+2=\sqrt{28-x}$

$x_1=-140 \notin$ ОДЗ

$\underline{x_2=-2}$

$\log_{(x+1)^2}(28-x)=2$

$28-x=(x+1)^4$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{2}+2}}(-x-1)$

$-x-1=\sqrt{\frac{x}{2}+2}$

$\frac{x}{2}+2=(-x-1)^2$

$x+4=2(x^2+2x+1)$

$2x^2+4x+2 \cancel{x}-4=0$

$2x^2+3x-2=0$

$D=25$

не совпадает с 1 ур-нием =)

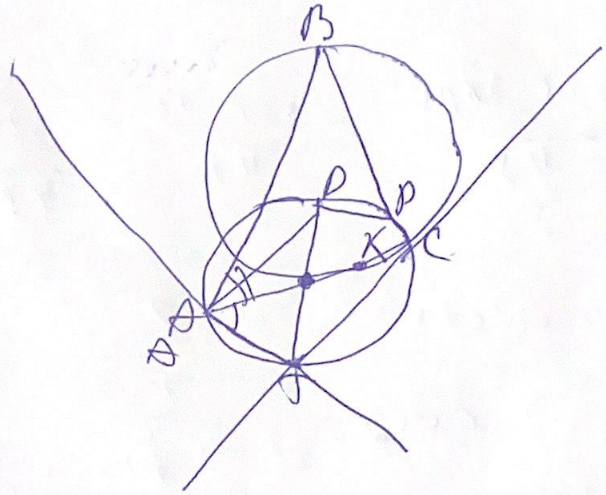
Ответ: при $x=-2$

6. Чистовик (Д)

$S_{APK}=16$

$S_{CPK}=14$

$S_{ABC}-?$



1) $AT=TC$

в 4-уг $AOCT$

$\angle A+\angle C=180^\circ \Rightarrow$

$\angle O+\angle T=360-180=180^\circ$

можно описать окр-ть. т.к. $A,O,C\in$ окр $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $T\in$ окр-ти $\Rightarrow$ OT – диаметр

$\angle AOC=\angle APC$, опираются на $\cup AC$

т.к. OT – диам $\Rightarrow$ $\triangle OPT$ – прям/уг

$\angle P=90^\circ$

$\exists\ \alpha+\beta=90$

$\angle APC=2\alpha$

$\cup TC=2\alpha \Rightarrow$

$\angle TPC=\alpha=\angle APT\Rightarrow$

PK – биссектр $\Rightarrow$ $\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{AK}{KC}$

$S_{APK}=\frac{1}{2}AP\cdot PK\cdot\sin\alpha$ $\qquad \dfrac{S_{APK}}{S_{CPK}}=\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{8}{7}$

$S_{CPK}=\frac{1}{2}PC\cdot PK\cdot\sin\alpha$

т.к. $\angle AOC=2\alpha$ – цент. $\angle$ $\Rightarrow$ $\qquad AP:PC=8:7\Rightarrow$

$\angle ABC=\alpha$ как вписн. $\qquad AK:KC=8:7$

$\left.\begin{array}{l}AK=8x\\KC=7x\end{array}\right\}AC=15x$

$\triangle ABC\sim\triangle KPC$ $\quad \angle B=\alpha$ $\quad \angle C$ – общ

$\angle P=\alpha$

⑧ чистовик

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = k^2 = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = \frac{(15x)^2}{(7x^2)} = \frac{225}{49}$$

$$S_{ABC} = \frac{225 \cdot S_{KPC}}{49} = \frac{225 \cdot 14}{49} = \frac{3150}{49} = \frac{450}{7}$$

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$ $\quad AC - ?$

$tg\,\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{9}{25}}} = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$S_{ABC} = \frac{3150}{49}$ $\quad S_{APK} = 16$ $\quad \cos\alpha > 0$

$\sin\alpha > 0$

$S_{CPK} = 14$

$S_{APK} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot OM$, $AC = 15x$

Из $\triangle OMC \to tg\,\alpha = \frac{3}{5} = \frac{MC}{OM} \Rightarrow$

$$\frac{\frac{15x}{2}}{OM} = \frac{3}{5} \Rightarrow OM = \frac{15 \cdot 5x}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{25x}{2}$$

$AM = 8x$

$S_{AOK} = \frac{1}{2} \cdot 8x \cdot \frac{25x}{2} = 16 \Rightarrow$

$\frac{200x^2}{4} = 16$

$50x^2 = 16$

$x^2 = \frac{16}{50} \Rightarrow x = \frac{4}{5\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$AC = \cancel{15}^{3} \cdot \frac{4}{\cancel{5}_1\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$