Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103630**

ID профиля: **333649**

Вариант 24

ЧЕРНОВИК

$S = \frac{(2b+8d)\,4{,}5}{2}$

$x_5 a_{18} > S-4$

$\sqrt{4+\left(R+\sqrt{R^2-4}\right)^2}$

$=$

$1+2+3+4+5+6+7+8$

$17 \cdot 4 = 68$

$36-90$

10

-54

$a_{10} a_{13} < S+60$

$108 - 96 = 12$

$-58 \quad 7 \cdot -6$

$4+R^2+2$

$(b+4)(b+17) > 9b+32$

$(b+9)(b+12) < 9b+96$

$-(b^2+21bd+68d^2) < 4-9b-36d$

$b^2+21b+68 > 9b+32$

$b^2+21b+108 < 96$

$\cancel{4928}$

$2\sqrt{2}$

105

$\frac{(-14+8)\,9}{2} =$

57

$40d^2 <$

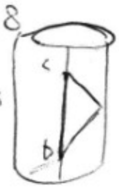
$-7 \quad -6 \quad -5$

$AB = 4$

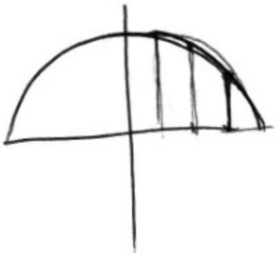
$AC = CB = 7$

$AD = DB = 8$

$b^2+21b+108 < 9b+36+60$



$150 = 25 \cdot 6$



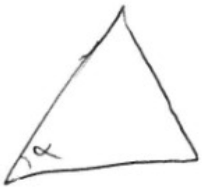
$\cancel{b^2+12b+48}$

$-7 \; -6 \; -5$

$\frac{\sqrt{15}\cdot\sqrt{20}}{8} = \frac{5\sqrt{6}}{4}$

10

$(b+6)^2 - 4 < 0 \quad b ?$



$AK^2 = 4+$

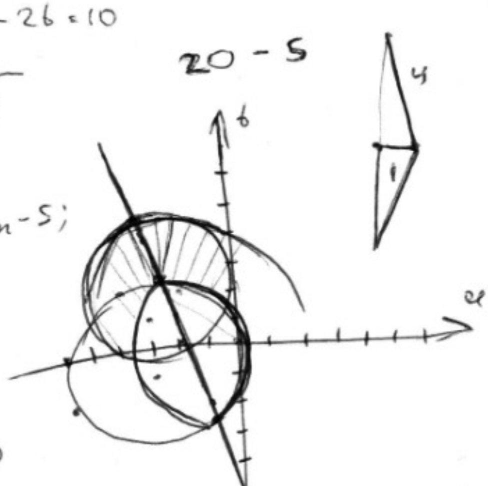
$b = -5-3a^4$

$-6a-2b = 10$

$20-5$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 10$

$\sqrt{10-5}$



$a^2+b^2 \leqslant \min(-6a-2b,\,10)$

$S = ?$

$\frac{1}{3}x = -3x-5;$

$x = -9x-15$

$10x = -15$

x^2+b^2

$x = -1{,}5$

$y = 0{,}5$

$-6a-2b = 10$

$-3a-b = 5;$

$b = -3a-5$

$4+R^2+2R\sqrt{}$

ЧИСТОВИК №1 ВАРИАНТ 24

пусть n-ый член прогрессии — $b+(n-1)d$; $a_1 = b$.

т.к. прогрессия состоит из целых чисел, то $d \in Z$, $b \in Z$;

$S = \frac{(2b+8d)9}{2} = 9b+36d$.

$$\begin{cases} a_5 a_{18} > S-4 \\ a_{10} a_{13} < S+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b+4d)(b+17d) > 9b+36d-4; \\ (b+9d)(b+12d) < 9b+36d+60; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2+21bd+68d^2 > 9b+36d-4; \\ b^2+21bd+108d^2 < 9b+36d+60; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(b^2+21bd+68d^2) < 4-9b-36d; \\ b^2+21bd+108d^2 < 9b+36d+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2+21bd+108d^2 < 9b+36d+60 \\ 40d^2 < 64; \end{cases}$$

допустимые значения d^2:

-1; 0; 1.

d не может быть равно -1, т.к. прогрессия возрастающая.

d не может быть равно 0, т.к. в противном случае прогрессия принимает постоянные значения

следовательно, $d=1$.

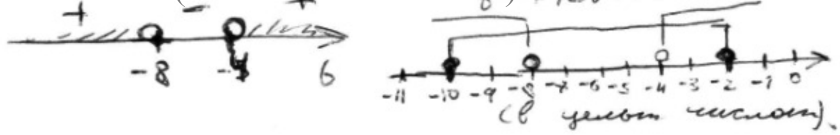
$$\begin{cases} b^2+21b+68 > \cancel{-4+9b+36} \ 9b+32 \\ b^2+21b+108 < 9b+\cancel{36+60} \ 96 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2+12b+32 > 0; \\ b^2+12b+\cancel{48} \ 12 < 0 \end{cases}$$

Ответ: $-10, -9, -3, -2$.

$b^2+12b+32 = (b+6)^2-4$;

$b^2+12b+12 = (b+6)^2-24$.

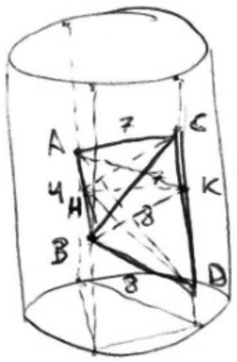


(в целых числах).

ЧИСТОВИК ВАРИАНТ 24

№2

$ACD = BCD$ по 3-м сторонам; ~~[crossed out]~~ $AB \parallel$ основанию, т.к. тетраэдр высекает ~~[crossed out]~~ получим плоскость ABK, перпендикулярную основаниям цилиндра.

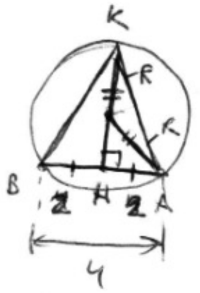


т.к. $CD \parallel$ образующей, оси цилиндра, то $\angle CKB = \angle CAK = 90°$;

$CD = x$;

радиус цилиндра $= r$;

$AK = BK = \sqrt{2^2 + (R + \sqrt{R^2 - 2^2})^2}$; (по теореме Пифагора)



~~$\sqrt{BK}$ ...~~

$BK^2 = 4 + R^2 + 2R\sqrt{R^2-4} + R^2 - 4$;

$BK^2 = 2R^2 + 2R\sqrt{R^2-4}$;

наименьшее возможное значение $R = 2$; (из $\sqrt{R^2-4}$, $R^2 - 4 \geq 0$.

тогда $BK^2 = 8$;

$CK^2 = BK^2 + BC^2 = -8 + 49 = 41$;

$KD^2 = BD^2 - BK^2 = 64 - 8 = 56$;

$CD = \sqrt{41} + \sqrt{56}$.

Ответ: $CD = \sqrt{41} + \sqrt{56}$.

ЧИСТОВИК

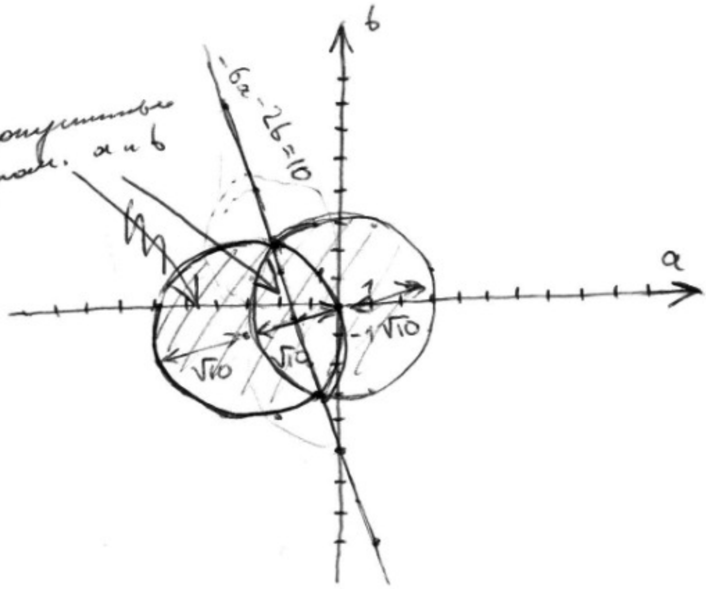
ВАРИАНТ 24

№3.

$(x-a^2)+(y-b)^2\le 10$; ур-ние окружности радиуса $\sqrt{10}$ с центром $(a;b)$.

$a^2+b^2\le \min(-6a-2b,\ 10)$:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a^2+b^2\le -6a-2b \\ -6a-2b\le 10\end{cases}\\ \begin{cases} a^2+b^2\le 10 \\ 10\le -6a-2b\end{cases}\end{array}\right.$$

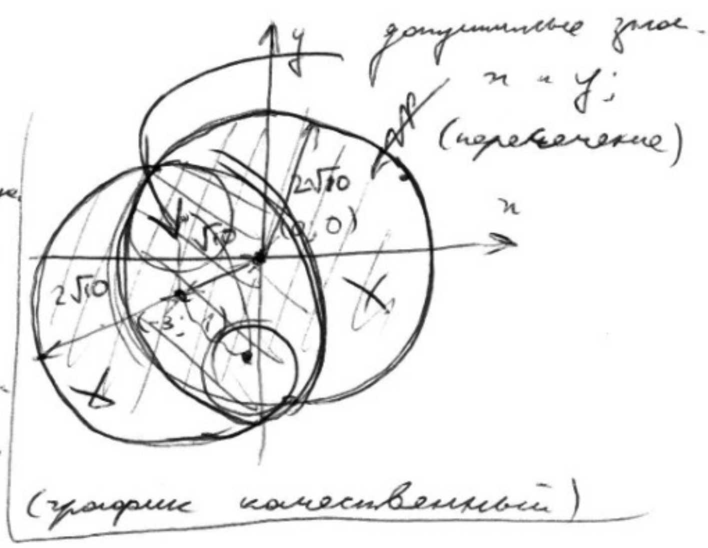


$a^2+b^2\le -6a-2b$:

$a^2+6a+9+b^2+2b+1\le 10$;

$(a^2+3)^2+(b+1)^2\le 10$

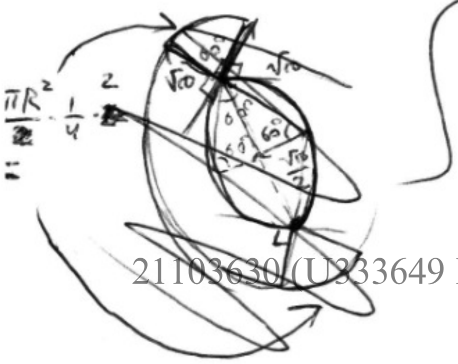
окружность, $R=\sqrt{10}$, центр — $(-3;-1)$

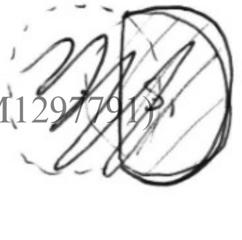


множество точек, удалённых на расстояние r от окружности радиуса R — окружность радиуса r+R с тем же центром; следовательно, раз центр (a; b) может лежать в пределах ~~двух пересекающихся~~ пересечения двух окружностей, x и y будут лежать в пределах пересечения окружностей с теми же центрами, но удвоенными радиусами (т.к. и там, и там $R=\sqrt{10}$), а также двух окр.

$S_1=\pi R^2-\sqrt{R^2-\frac{1}{4}R^2}\cdot\frac{1}{4}R\cdot\frac{1}{2}-\pi R^2\cdot\frac{2\alpha}{2\pi}$

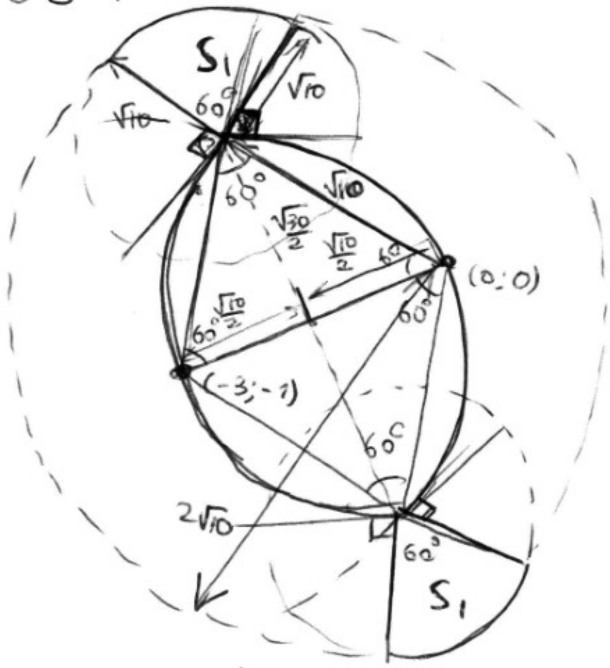
$=10\pi-\frac{5\sqrt{6}}{4}-10\pi\cdot\frac{\arccos\left(\frac{1}{4}\right)}{\pi}$





Ответ: $S=10\pi\left(1-\frac{\arccos\left(\frac{1}{4}\right)}{\pi}\right)-\frac{5\sqrt{6}}{4}$.

ЧИСТОВИК №3 ВАРИАНТ 24



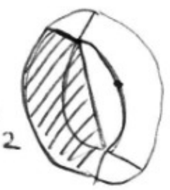
$S = 2S_1 + 2S_2;$

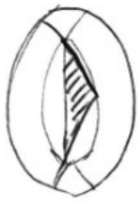
$S_1 = 2 \cdot \pi 10 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi 10}{3};$

$S_2 = \pi \cdot 4 \cdot 10 \cdot \frac{120^\circ}{360} - S_3;$

$S_3 = \frac{\sqrt{30}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{10\sqrt{3}}{4}.$

$S = \frac{\pi 20}{3} + \frac{\pi 80}{3} - 5\sqrt{3} = \frac{100\pi}{3} - 5\sqrt{3}.$


S_2


S_3

Ответ: $\frac{100\pi}{3} - 5\sqrt{3}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103630**

ID профиля: **333649**

Вариант 24

ЧИСТОВИК

№4. ВАРИАНТ 24

$\begin{cases} \text{НОД}(a, b, c) = 33 \\ \text{НОК}(a, b, c) = 3^{19}\cdot 11^{15}; \end{cases}$ — у каждого числа есть простые множители 11 и 3. — у чисел есть только простые множители 3 и 11; максимальная степень 11 — 15, 3 — 19;

~~[illegible]~~ a, b и c можно представить как $11^n\cdot 3^m$, причём $n, m \in N$, у одного числа $n = 15$, у другого или у того же самого $m = 19$, у других $n \leq 15$, $m \leq 19$.

~~Пусть одно из чисел — $3^{19}\cdot 11^{15}$; тогда степени 3 и 11 у других чисел могут принимать значения от 1 до 19 и от 1 до 15 соответственно~~

есть множители 3^{19}, 3^n, 3, 11^{15}, 11^m, 11; чтобы получить набор нужных чисел, нужно раздать множители по парам с разными основаниями.

$9\cdot 4\cdot 1$

для $n \in [2; 18]$, $m \in [2; 14]$:

кол-во перестановок множителей: ~~[illegible]~~

кол-во вариантов разных значений n и m: $17\cdot 13$.

всего: $17\cdot 13\cdot 36 = \cancel{7989}$ 7956

для $n = 1$ или 19, $m \in [2; 14]$

кол-во перестановок: ~~[illegible]~~ $\frac{9\cdot 4\cdot 1}{2} = 18$

кол-во вариантов m: 13.

т.к. рассматривается 2 значения, всего $2\cdot 18\cdot 13 = 234$.

аналогично для $m = 1$ или 15, $n \in [2; 18]$: всего $2\cdot 18\cdot 17 = 306$.

при $n = 1$, $m = 1$: $\frac{9\cdot 4}{4}$ вариантов

при $n = 19$, $m = 15$: $\frac{9\cdot 4}{4}$ варианта.

при $n = 1$, $m = 15$; $n = 19$, $n = 1$: $\frac{9\cdot 4}{4}\cdot 2$ варианта.

сумма: $\frac{9\cdot 4}{4}\cdot 4 + 2(234 + 306) + 7956 =$ ~~[illegible]~~ 9072

Ответ: 9072.

ЧИСТОВИК ВАРИАНТ 24

№5

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$ $\log_{(x+1)^2}(29-x)$ $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$;

имеет смысл при:

$x<29$;
$\frac{x}{7}>-7$;
$x<-1$;
$x\neq 28$
$x=0$
$x=-2$
$x\neq -42$

$x\in(-49;-1)$;
$x\neq -42; -2$.

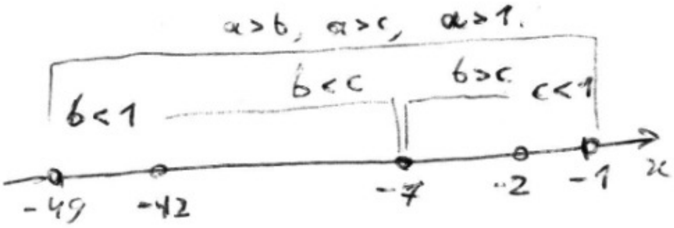
$29-x=a$; $a>1$.
$\frac{x}{7}+7=b$;
$-x-1=c$;

$a=c$:
$29-x=-x-1$; нет реш;
$a>c$.

$a=b$:
$\frac{x}{7}+7=29-x$;
$x+49=29\cdot7-7x$;
$8x=22\cdot7$;
$x=\frac{11\cdot7}{4}$; вне области допустимых знач;
$a>b$ на рассм. области.

$2\log_a b$; $\frac{1}{2}\log_c a$; $2\log_b c$;

$a>b$, $a>c$, $a>1$.



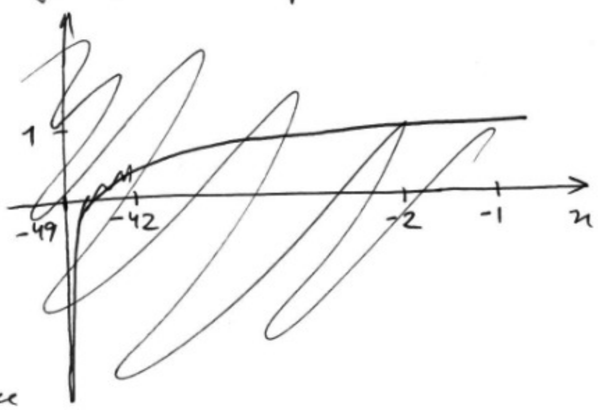
$\frac{x}{7}+7=-x-1$; $x=-7$.
при $x<-7$ $b<c$,
при $x\geq-7$ $b\geq c$.

~~пусть $2\log_a b=\frac{1}{2}\log_c a$, $2\log_b c=2\log_a b+1$~~ тогда:

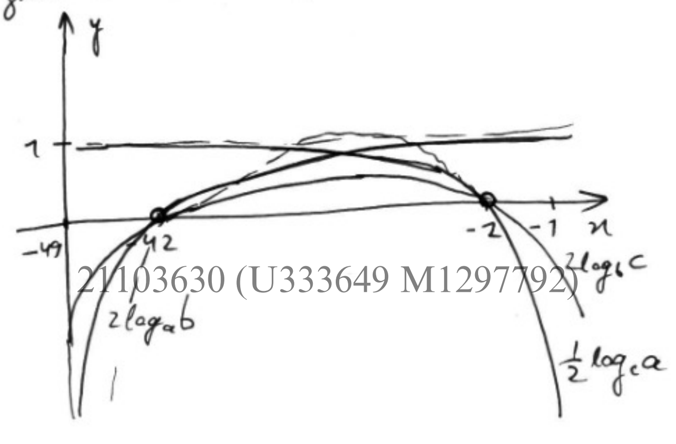
~~$2\log_a b=\frac{1}{2\log_a c}$;~~

~~$4\log_a b\log_a c=1$;~~

~~$\log_b c=\frac{1}{\log_b a}+0,5$~~



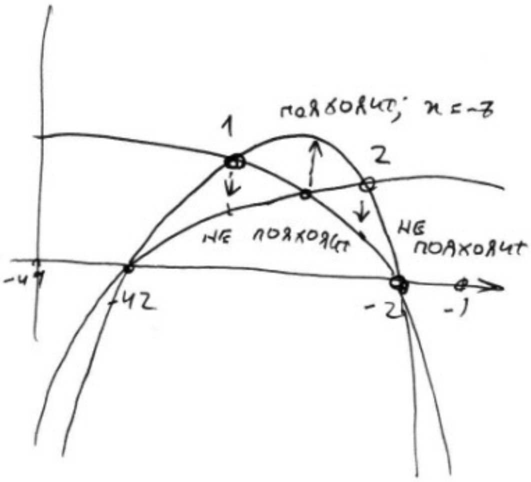
примерный график и возможные пересечения, исходя из оценки значений a, b и c:



может быть либо 1, либо 3 пересечения;
при $x=-7$:
$\log_{\sqrt{29+7}}\left(-\frac{7}{7}+7\right)=1$; $\log_{(-6)^2}(29+7)=1$;
$\log_{\sqrt{-\frac{7}{7}+7}}(7-1)=2$. подходит;

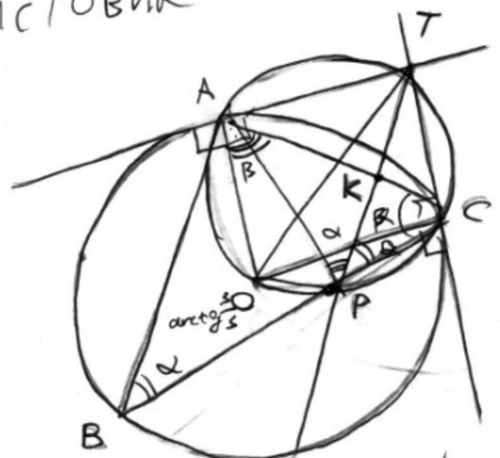
21103630 (U333649 M1297792)

т.к значение $2\log_6 c$ больше, его график в точке пересечения остальных выше. значит, могут быть ещё 2 значения x, при которых одно число равно другому, но игрек в данном случае будет меньше.



Ответ: -7.

ЧИСТОВИК №6 ВАРИАНТ 24



т.к $\angle OAT = 90°$; $\angle OCT = 90°$, O - общая, $AO = OC$
AOC вписан в окружность, T тоже вписан в окружность, TO - диаметр, т.к. лежит против прямого угла.

~~∠APK~~

$\angle APC = \angle AOC$, т.к. опираются на одну дугу.

$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$, т.к. AOC - центральный угол, ABC - вписанный;

т.к $AT = TC$, их дуги равны, следовательно, равны опирающиеся на них $\angle APK$ и $\angle KPC$;

$S_{AKP} = 16$ $S_{CPK} = 14$.

$\angle PCA = \angle ACB$;

$\frac{S_{AKP}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{KC}$;

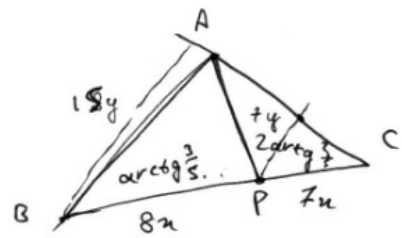
$\alpha = \angle ABC = \angle APK = \angle KPC$; $\angle C$ - общий;

$\triangle KPC \sim \triangle ABC$ по 2-м углам; $KP \parallel AB$;

$\frac{KC}{AK+CK} = k$; $k = \frac{14}{30}$; $S = \frac{S_{KPC}}{k^2} = \frac{14 \cdot 30^2}{14^2} = \frac{900}{14}$.

а) Ответ: $S_{ABC} = \frac{900}{14}$.

б)



$tg\,\alpha = \frac{3}{5}$;

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$.

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$.

ЧЕРНОВИК

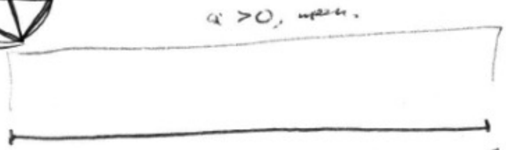
$\log_{\sqrt{29-7}})$

Д : 3, 11 $\qquad -7$

К : 3^{19}, 11^{15} $\qquad \log_6 6 \qquad \log_{6^2} 36$

$-7 \quad -14 \quad -21 \quad -28 \quad -35$

29



50

$\begin{array}{r} +29 \\ 35 \\ \hline 64 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +29 \\ 28 \\ \hline 57 \end{array}$

8, 2

$3^{19} \quad 3 \quad 3$

$11^{15} \quad 11 \quad 11$

$\log_a b$

$\sqrt{64}$, 2

36^2, 64

$\sqrt{2}$, 36.

$\frac{14}{30}$ =

$4\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}$

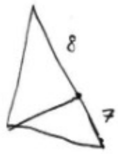
$\begin{array}{r} \times 17 \\ 13 \\ \hline 51 \\ 17 \\ \hline 221 \\ \times 7 \\ \hline 1989 \end{array}$

$x = 7$

$8 = -\frac{8x}{7}$

$x + 49 = -x$

$\frac{8x}{7} = -8$



$\frac{14 \cdot 15^2}{7^3}$

$\begin{array}{r} \times 13 \\ 6 \\ \hline 78 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times 221 \\ 36 \\ \hline 1326 \\ +663 \\ \hline 7956 \end{array}$ $\quad 7$

$\begin{array}{r} +25 \\ 9 \\ \hline 34 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times 17 \\ 6 \\ \hline 102 \end{array}$ $\quad 9+$

$30 \cdot \frac{30}{14}$

$\begin{array}{r} +7956 \\ 306 \\ \hline 8262 \\ +234 \\ \hline 8496 \\ +36 \\ \hline 8532 \end{array}$

$9 \cdot 4 \cdot 7 \qquad 18 \cdot 13$

$\begin{array}{r} \times 18 \\ 17 \\ \hline 126 \\ +18 \\ \hline 306 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times 18 \\ 13 \\ \hline 54 \\ +18 \\ \hline 234 \end{array}$

$\begin{array}{r} +234 \\ 306 \\ \hline 540 \end{array}$

$\frac{APC}{S_{ABC}} =$

21103630 (U333649,M1297792)

$\begin{array}{r} 1080 \\ +7956 \\ \hline 9036 \\ +36 \\ \hline 72 \end{array}$