Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103547**

ID профиля: **846817**

Вариант 24

Вариант 24

Чистовик

(1)

№ 1

Обозначим первый член прогрессии за a_1, разность за d; $d>0$ по усл. Тогда $S=\frac{2a_1+8d}{2}\cdot 9=(a_1+4d)9=9a_1+36d$

$a_5a_{18}=(a_1+4d)(a_1+17d)=a_1^2+21a_1d+68d^2$; $a_{10}a_{13}=(a_1+9d)(a_1+12d)=$
$=a_1^2+21a_1d+108d^2$. По условию имеем

$$\begin{cases} a_1^2+21a_1d+68d^2>9a_1+36d-4 \Leftrightarrow a_1^2+a_1(21d-9)+68d^2-36d+4>0 \quad (1) \\ a_1^2+21a_1d+108d^2<9a_1+36d+60 \Leftrightarrow a_1^2+a_1(21d-9)+108d^2-36d-60<0 \quad (2) \end{cases}$$

~~(1) $a_1^2+a_1(21d-9)+68d^2-36d+4>0$~~

~~Тогда $a_1\in(-\infty;$~~

из (1) получаем, что $a_1^2+a_1(21d-9)>-68d^2+36d-4$

из (2) получаем, что $a_1^2+a_1(21d-9)<-108d^2+36d+60$

Тогда $-108d^2+36d+60>-68d^2+36d-4$

$$64>40d^2 \Leftrightarrow d^2<\frac{64}{40}$$

А т.к. $d>0$ и $d\in\mathbb{Z}$, т.к. если a_1 и a_2 целые, то $d=a_2-a_1$ тоже целое, то $d=1$

Тогда $a_1^2+12a_1>-36$ и $a_1^2+12a_1<-12$

$a_1^2+12a_1+36>0$ $\qquad$ $a_1^2+12a_1+12<0$

$(a_1+6)^2>0$ $\qquad$ $a_1\in(-6-\sqrt{24};-6+\sqrt{24})$, а т.к.

Верно при $a_1\neq-6$ $\qquad$ $a_1\in\mathbb{Z}$, то $a_1\in\{-10;-9;\ldots-2.\}$

Учитывая, что $a_1\neq6$ получаем, что $a\in\{-10;-9;-8;-7;-5;-4;-3;-2\}$

А т.к. при таких a и $d=1$ системы верны, то все они подходят.

Ответ: $-10;-9;-8;-7;-5;-4;-3;-2$.

В 24

Чистовик ②

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 10 \quad (1) \\ a^2+b^2 \leq \min(-6a-2b, 10) \quad (2) \end{cases}$$

Так как если $a^2+b^2 \leq$ меньшего из двух чисел, то оно меньше или равно большему, поэтому (2) равносильно системе $\begin{cases} a^2+b^2 \leq -6a-2b \iff (a+3)^2+(b+1)^2 \leq 10 \quad (3) \\ a^2+b^2 \leq 10 \quad (4) \end{cases}$

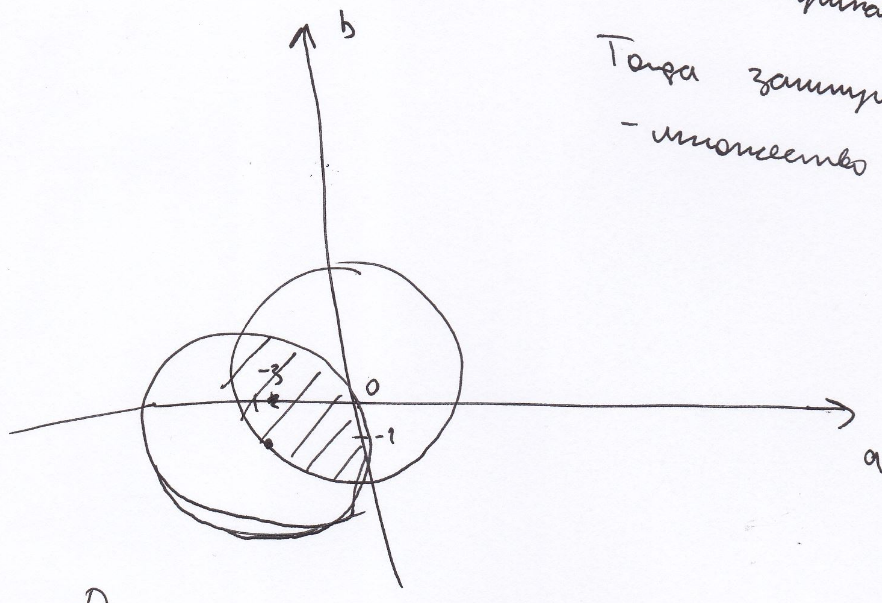
В координатах $b\uparrow \to a$

(3) задаёт ~~окружн~~ круг с центром в т. A $(-3;1)$ и радиусом $\sqrt{10}$;

(4) задаёт круг с центром в т. B $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{10}$.

Так как $\rho(A;B) = \sqrt{10}$, то т. A принадлежит (4). как и $B \in (3)$ Получаем:

Тогда заштрихованное множество - множество решений (2).



Далее в координатах $(x;y)$:

А т.к. (1) - круг с центром в т. C $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{10}$,

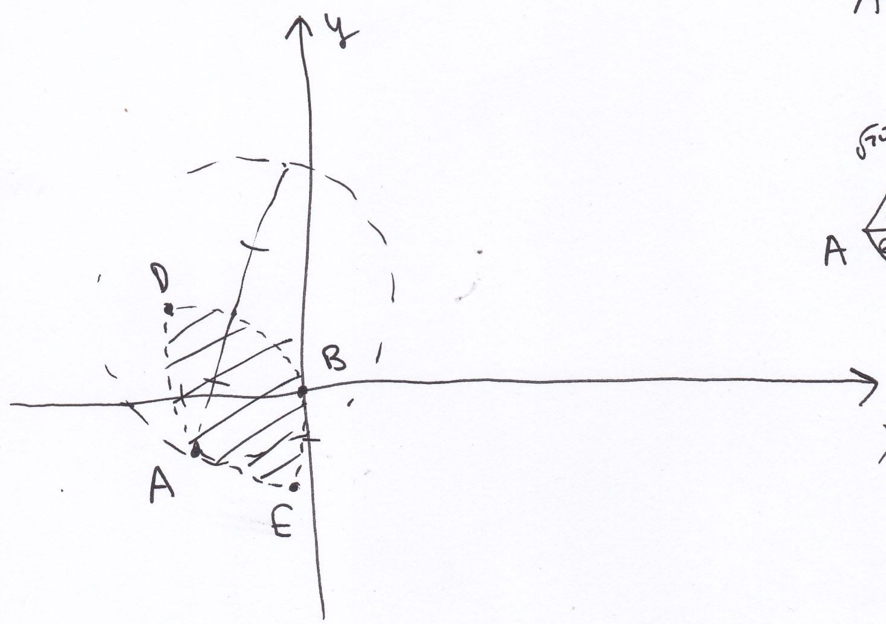
то их ((1) и (2)) пересечение - множество кругов радиуса $\sqrt{10}$ с центром в точке, ~~координаты которой~~ лежащей в заштрихованной области.

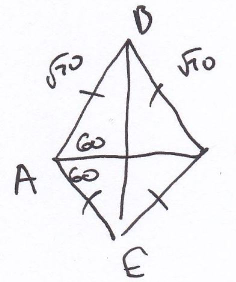
В24

Чистовик

3

$AD = DB = AB = BE = AB = \sqrt{10}$

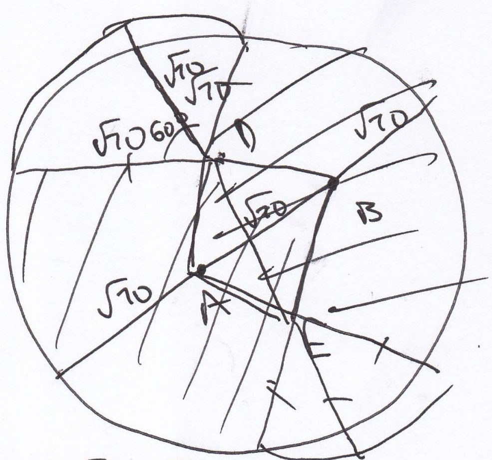




$DE = AD\sqrt{3} = \sqrt{30}$

$S = \frac{AB \cdot DE}{2} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{30}}{2} = 5\sqrt{3}$

А т.к. расстояние от A до любой точки $\breve{DE} = \sqrt{10}$, а самой удалённой от точки A точкой окружности, с центром на $\breve{DE}$, будет точка, лежащая на пересечении прямой, проходящей через т. A и центр построенной окружности с построенной окружностью, а это расстояние будет равно $2\sqrt{10}$. То же верно и для т. B и $\breve{ED}$, поэтому площадь M будет равна площади следующей фигуры:



Т.е. $\frac{1}{3} S_{окр}$ с $R = 2\sqrt{10}$ +

($\frac{1}{3}$ т.к. $\angle DAE = \angle DBE = \frac{2\pi}{3}$)

$+ \frac{1}{3} S_{окр}$ с $R = 2\sqrt{10}$ $- S_{ромба}$ ADBE $+ \frac{2}{6} S_{окр}$ с $R = \sqrt{10}$

($\frac{1}{6}$, т.к. $\angle$сектора $= 60°$) =

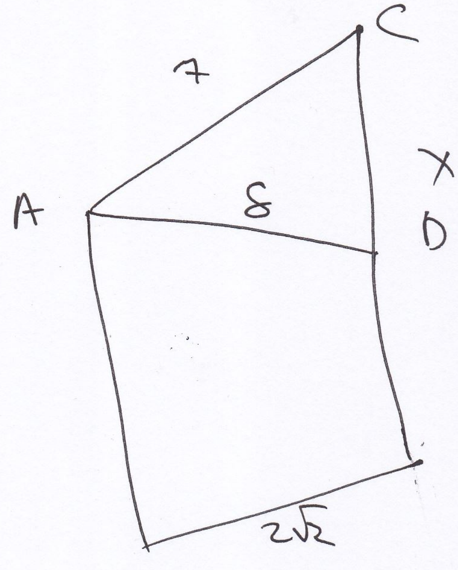
$= \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10 - 5\sqrt{3} = 30\pi - 5\sqrt{3}$

Ответ: $30\pi - 5\sqrt{3}$.

B24

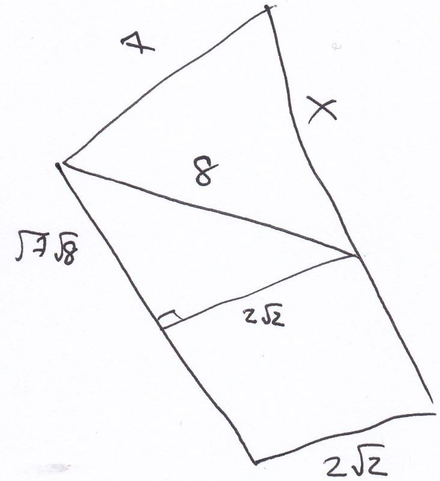
Чистовик (4)

Т.к. ABC и ABD - равноб, то их высоты попадут в середину AB. Тогда $CD \perp AB$, а т.к. $CD \parallel$ оси цилиндра, то длина проекции AB на основание равна длине $AB=4$. Тогда радиус цилиндра будет наименьшим, если AB - диаметр. Тогда $R=2$. Тогда, т.к. $AD=DB$, то и длины их проекций на основание будут равны, тогда они равны $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



Черновик

$a_1;\ d$ $\qquad d>0$



$$S=\frac{2a_1+8d}{2}\cdot 9=(a_1+4d)\,9$$

$$a_5 a_{18}=(a_1+4d)(a_1+17d)>(a_1+4d)9-4$$

$$-108d^2+36d+60>-68d^2+36d-4$$

$$64>40d^2$$

$$d^2<\frac{64}{40}$$

$$d<\frac{8}{\sqrt{40}}=\frac{4}{\sqrt{10}}$$

$d=1$

$a_1^2+12a_1+36>0$

$a_1^2+12a_1+12<0$

$a_1=$

$$D=(21d-9)^2-4(68d^2-36d+4)$$

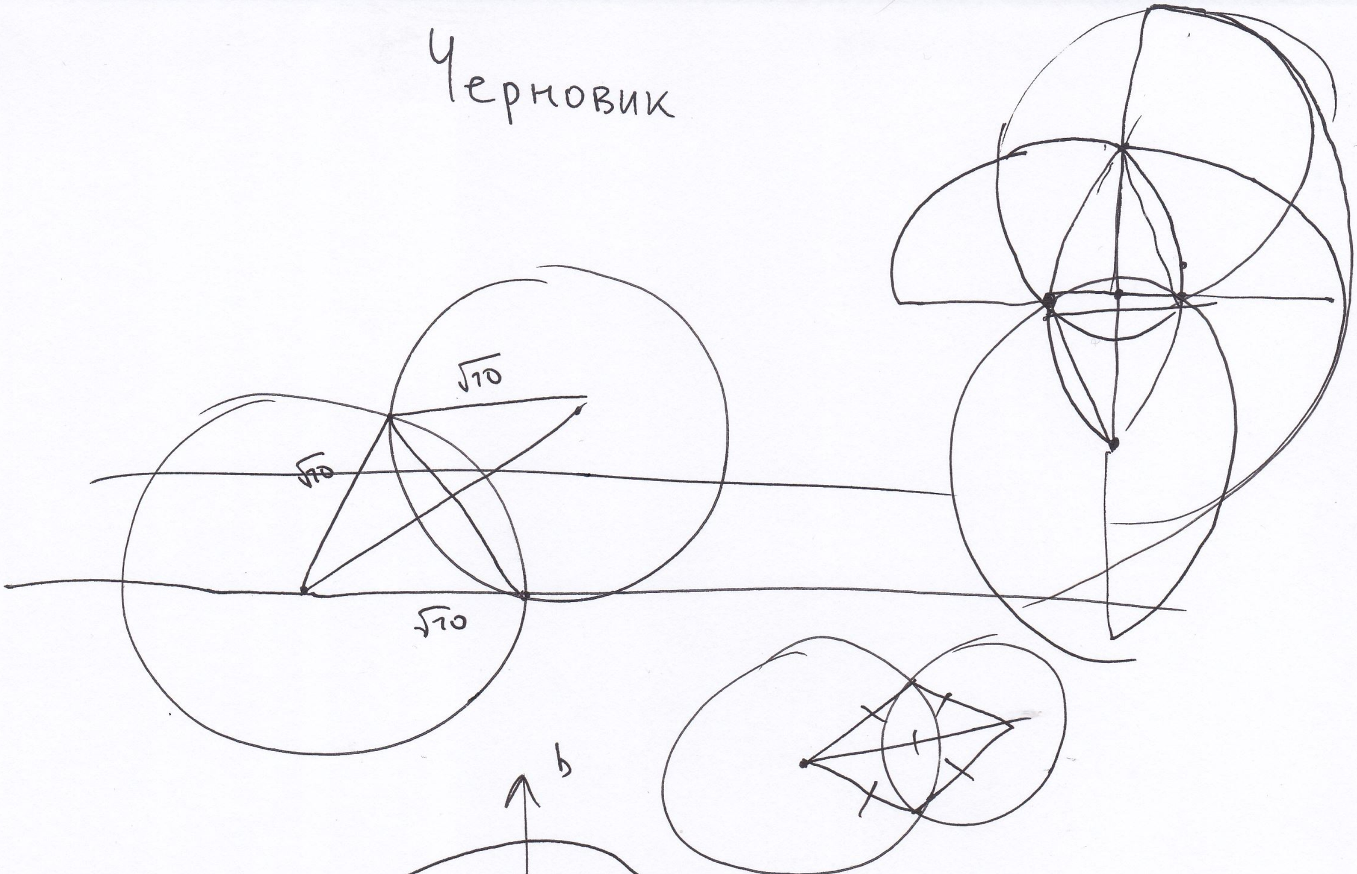
$$a_1=-6\pm\sqrt{24}$$

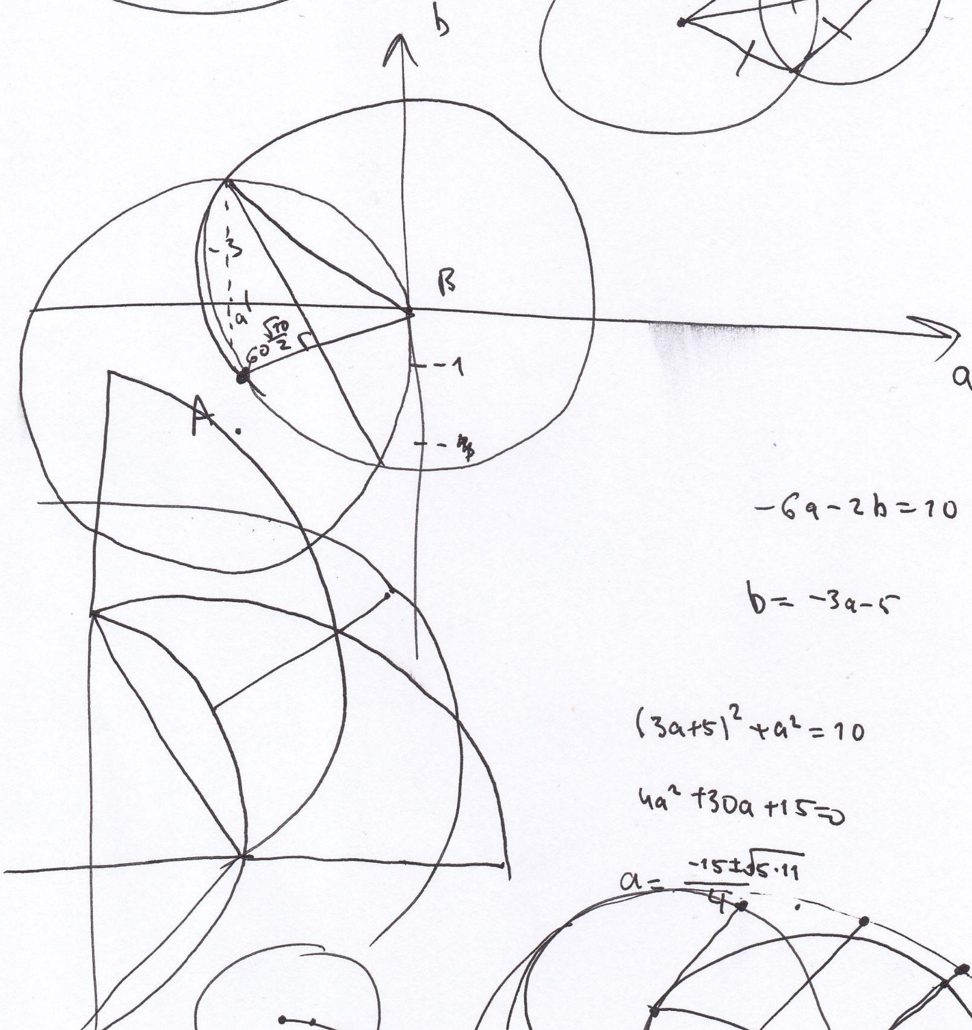
$$\frac{D}{4}=36-12=24$$

$$\frac{80\pi}{3}+\frac{10\pi}{3}=30\pi$$

1

Черновик





$-6a-2b=10$

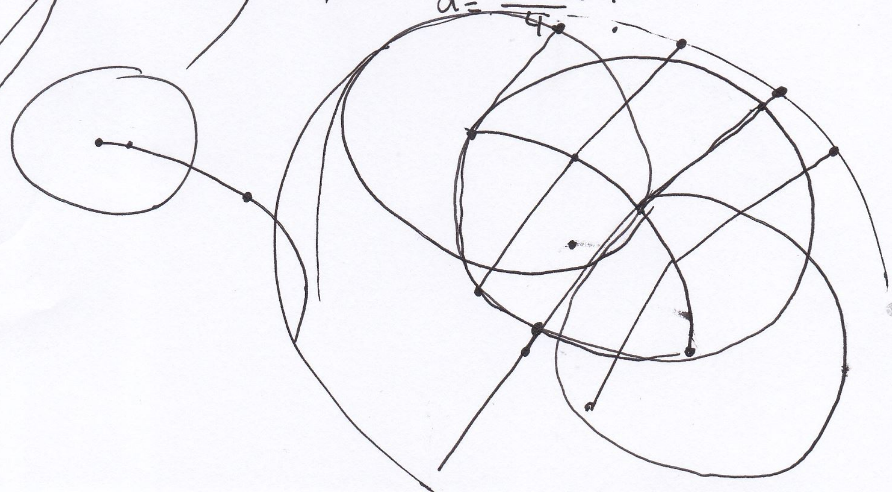
$b=-3a-5$

$(3a+5)^2+a^2=10$

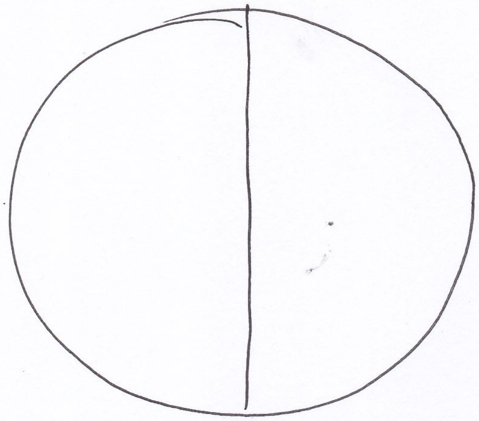
$4a^2+30a+15=0$

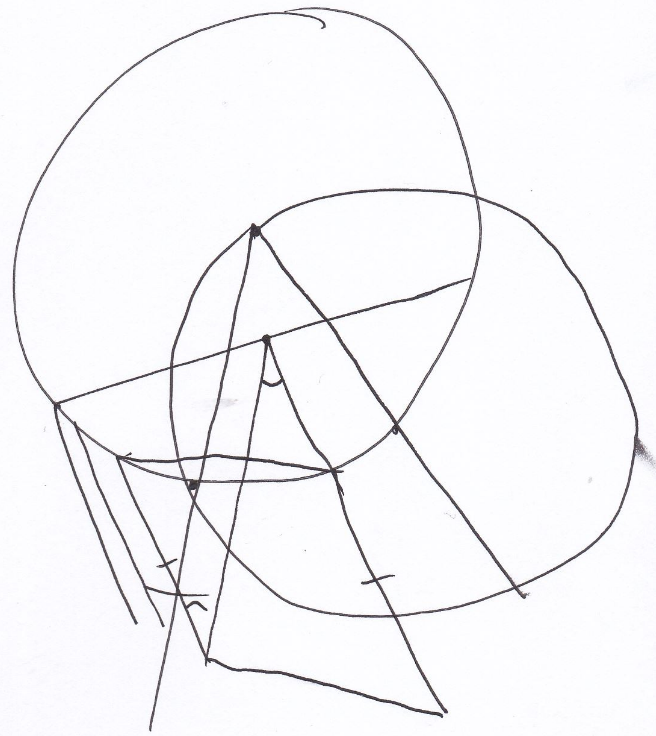
$15^2-15\cdot4=15\cdot11$

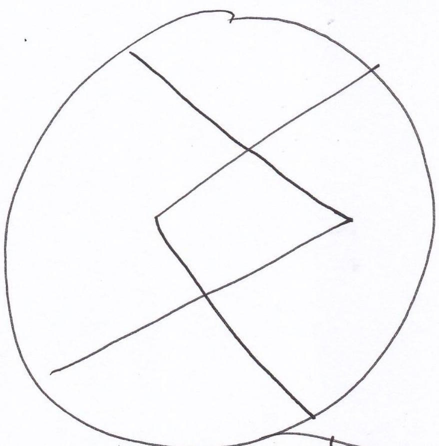
$a=\frac{-15\pm\sqrt{15\cdot11}}{4}$

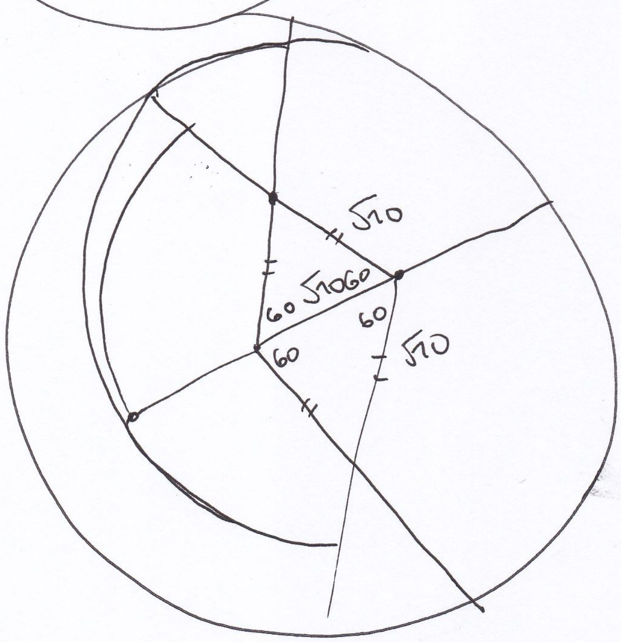


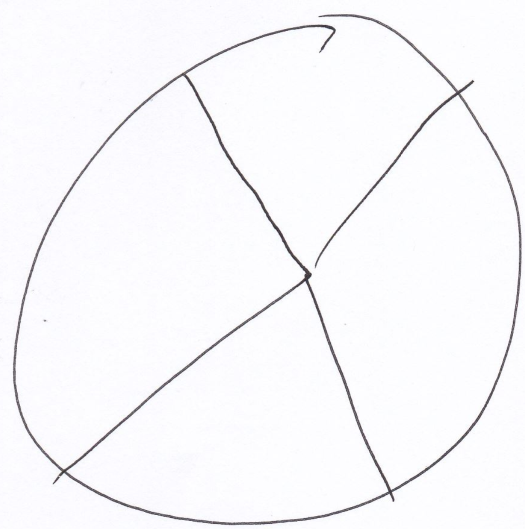
Черновик



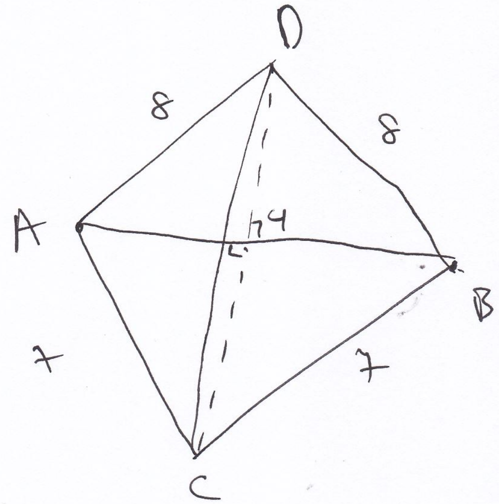


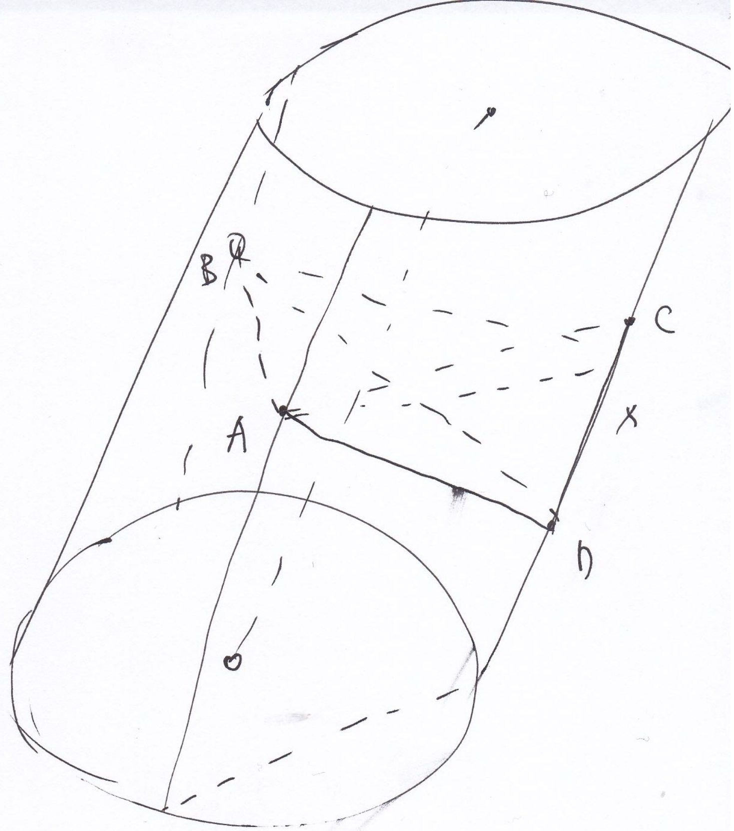






Черновик





$$a^2+b^2 \le \min(-6a-2b; 10)$$

$\Updownarrow$

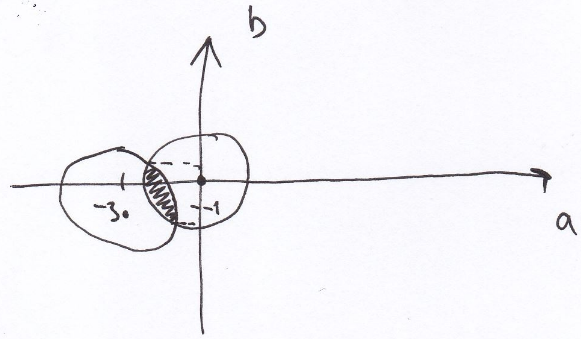
$$\begin{cases} a^2+b^2 \le -6a-2b \\ a^2+b^2 \le 10 \end{cases}$$

$\cancel{a^2}+6a+9+2b+1 \le 10-a^2-b^2$

$(a+3)^2+(b+1)^2 \le 10$

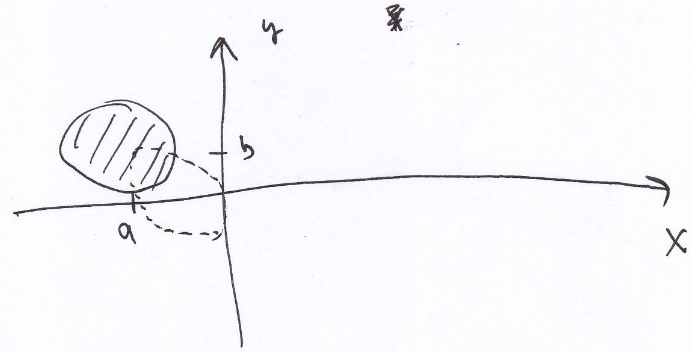
$a^2+b^2 \le 10$

$6a+2b \le 0$



$\Rightarrow a<0$

$|b|<\sqrt{10}$



$64-8=56$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103547**

ID профиля: **846817**

Вариант 24

В 24

Чистовик (1)

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=33=3^1\cdot 11^1 \\ НОК(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$$

Так как $НОД^{x,y,z}(x)\cdot НОК^{x,y,z}(x) = x\cdot y\cdot z$, то $a\cdot b\cdot c = 3^{20}\cdot 11^{16}$.

А т.к. $a,b,c \in \mathbb{N}$, то $a=3^d\cdot 11^e$; $b=3^f\cdot 11^g$; $c=3^x\cdot 11^y$

При этом, т.к. $НОД(a;b;c)=3\cdot 11$, то ~~однозначно~~ хотя бы одно из чисел $d,f,x = 1$ и среди e,g,y хотя бы одно $=1$. ~~Будем считать, что $(a;b;c)$~~. Выберем одну из степеней 3 и 11, которые будут равны 1. Это можно сделать $3\cdot 3=9$ способами. Останется 3^k и 3^m; 11^p и 11^t, причём $k+m=19$ и $p+t=15$. А т.к. $k,m,p,t\geq 0$ и целые, то выбрать k и m можно 20 способами, p и t - 16. Всего получаем $20\cdot 16$ способов. Тогда троек будет $9\cdot 20\cdot 16$, но так как тройки, в которых степени у двух троек или у двух 11 равны 1, мы посчитали дважды, а их $3\cdot 3\cdot 16$ (две степени у $3=1$) $+ 3\cdot 3\cdot 20$ (две степени у $11=1$) $- 3\cdot 3$ (и 2 степени у 3, и две у 11 равны 1) $= 3\cdot 106$, а значит различных упорядоченных троек будет $9\cdot 20\cdot 16 - 3\cdot 106 = 3(60\cdot 16-106) = 2562$

Ответ: 2562

В24

Чистовик ②

№5. ОДЗ: $\frac{x}{7}+7>0$ $\frac{x}{7}+7\neq1$

$29-x>0$ $29-x\neq1$

$-x-1>0$

$x\neq0$

$x\neq-2$

Тогда на ОДЗ $\log_{(x+1)^2}(29-x)=\log_{(-x-1)}\sqrt{29-x}$

В таком случае $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)\cdot$

$\cdot\log_{(x+1)^2}(29-x)=\log_{(-x-1)}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=$

$=\cancel{4}2\left(\log_{(-x-1)}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)\right)=2$, а раз

два из этих чисел равны, а третье больше их на 1, то обозначим равные числа за а. Тогда

$a^2(a+1)=2$

$a^3+a^2-2=0$

$(a-1)(a^2+2a+2)=0$

$D<0$

$\Downarrow$

$a=1$, т.е. если какие-то два числа равны, то они обязаны быть равны 1. Приравняем каждое из этих чисел к 1 и посмотрим, когда ещё какое-то равно 1:

1) $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1 \Rightarrow \frac{x}{7}+7=\sqrt{29-x}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases}\frac{x}{7}+7\geq0\\ \frac{x^2}{49}+2x+49=29-x\end{cases}$

B24

Чистовик ③

$x^2+49\cdot 3x+20\cdot 49=0$

$x=-\frac{49\cdot 3\pm 7\cdot 19}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x=-140 \text{ не уд. ОДЗ} \\ x=-7 \end{array}\right.$

Если $x=-7$, то $\log_{(x+1)^2}(29-x)=1$ и $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=2$, тогда такой x подходит.

2) $\log_{(x+1)^2}(29-x)=1 \Rightarrow 29-x=(x+1)^2$

$x^2+3x-28=0$

$\left[\begin{array}{l} x=\cancel{-4}\,7; \\ x=4 \end{array}\right.$

Случай $x=-7$ уже рассмотрен, если $x=4$, то

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_5\left(\frac{53}{7}\right)\neq 1 \neq 2$, такой x не подходит.

3) $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=1 \Rightarrow -x-1=\sqrt{\frac{x}{7}+7}$

$\Updownarrow$ на ОДЗ

$\begin{cases} -x-1\geqslant 0 \\ x^2+2x+1=\frac{x}{7}+7 \Rightarrow 7x^2+13x-42=0 \end{cases}$

Учитывая $x<-1$, получим

$x=\frac{-13-\sqrt{1345}}{14}$

Тогда $\log_{(x+1)^2}(29-x)=\log_{\left(\frac{1-\sqrt{1345}}{14}\right)^2}\left(29+\frac{13+\sqrt{1345}}{14}\right)=\log_{\left(\frac{1346-2\sqrt{1345}}{14^2}\right)}\left(29+\frac{13+\sqrt{1345}}{14}\right)\neq 1$ тогда

и $\log_{\sqrt{29-\frac{x}{7}}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1$, если этот x подходит.

Тогда $\frac{x}{7}+7=\sqrt{29-\frac{x}{7}}$; $\frac{-13-\sqrt{1345}}{98}+7=\sqrt{29+\frac{13+\sqrt{1345}}{98}}$ Проверим это: (исп ч

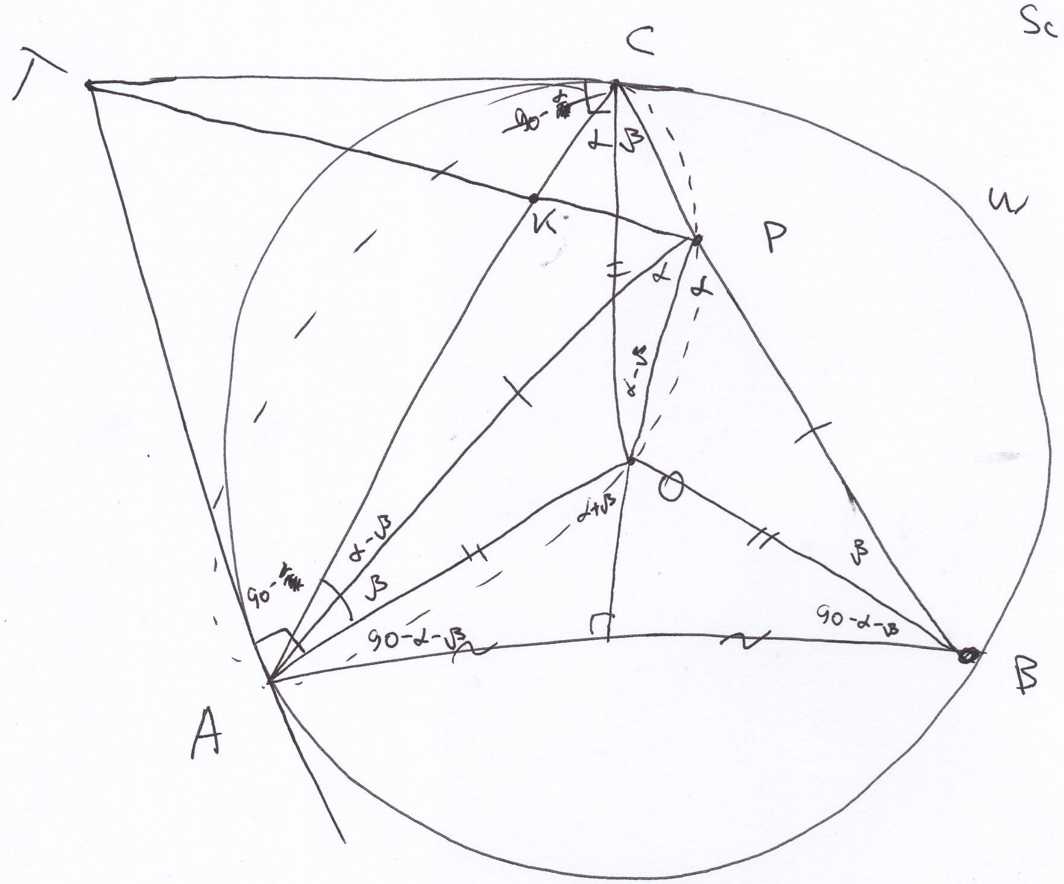
B24

Чистовик 4

№6.

$S_{APK}=16$

$S_{CPK}=74$



Обозначим $\angle ACO = \angle CAO$ за α. Из вписанности $CPOA$ $\angle APO = \alpha$

А т.к. $\angle BPO = \angle CAO = \alpha$. Обозначим $\angle PCO$ за β.

Тогда $\angle OAP = \beta = \angle OBC$. Тогда $\triangle APO = \triangle BPO \Rightarrow BP = AP$.

Предложение 5.: Обозначим $\frac{13+\sqrt{1345}}{98}$ за a. Тогда

если x подходит, то $-a+7=\sqrt{29+a}$

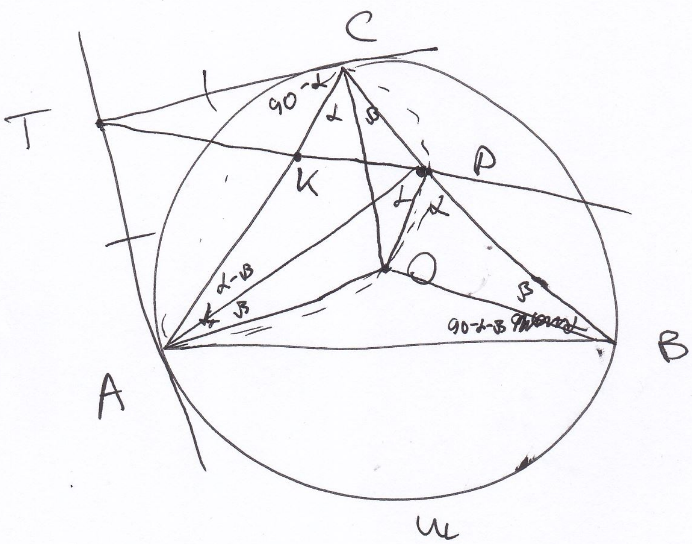
$$\begin{cases} 7-a \geq 0 \\ a^2-14a+49=29+a \end{cases}$$

$a^2-15a+20=0$

$a=\frac{15\pm\sqrt{145}}{2}$, не равен $\frac{13+\sqrt{1345}}{98}$, поэтому такой x не подходит.

Ответ: $x=-7$.

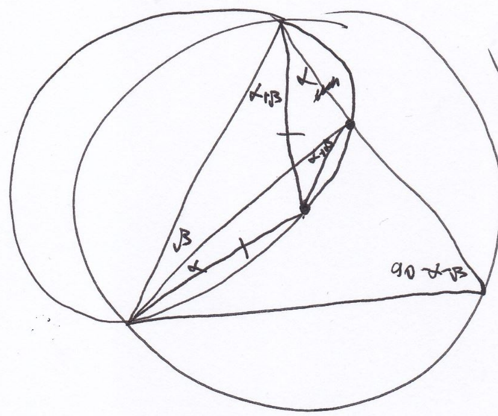
Черновик

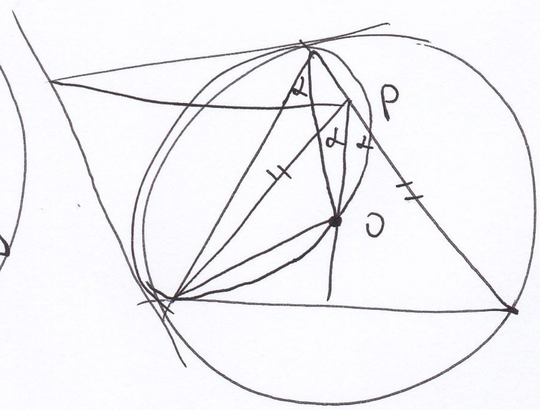


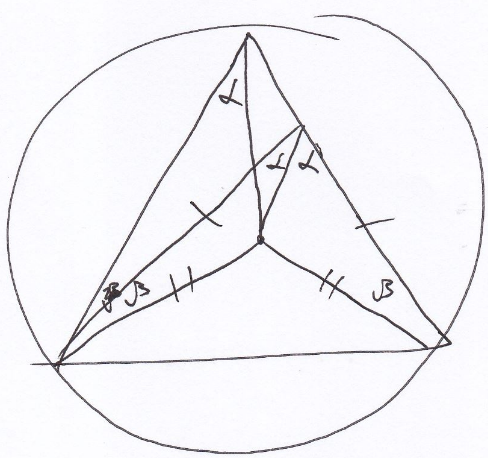
$$\frac{PC}{PB} - ?$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{APK} = 16 \\ S_{CPK} = 14 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$$

$$\frac{CP}{AP} - ?$$







$PB \cdot BC = BC^2$

Черновик

$a\cdot b\cdot c = 3^{20}\cdot 11^{16} \Rightarrow a = 3^{\alpha}\cdot 11^{\beta}$ $\quad a, c$

$b = 3^{c}\cdot 11^{d}$

$3^{\alpha+\beta} = 3^{19}$

Посчитано 2 раза те, где два степени $=1$.

$3\cdot 3\cdot 16 + 3\cdot 3\cdot 20 - 9 = 3\cdot(48+60-2)$

$\boxed{\sqrt{29+\frac{13+\sqrt{1345}}{84}} \vee 7-\frac{13+\sqrt{1345}}{84}}$

960, 106, 854, 3, 256 2

$29+\frac{13+\sqrt{1345}}{84} \vee 49-\frac{13+\sqrt{1345}}{6}+\frac{(13+\sqrt{1345})^2}{84^2}$

42, 28, 336, 84

1176, 169, 1345

2

$abc=1$

$49^2-9-80\cdot 49=$

$a^2(a+1)=1$

$49(49\cdot 9-80) = 49\cdot 361 = (7\cdot 19)^2$

441 361

$a^3+a^2-1=0$

$\frac{-147\pm 133}{2}$

165

$a^2(a+1)=2$

35, 35, 175, 105, 1225

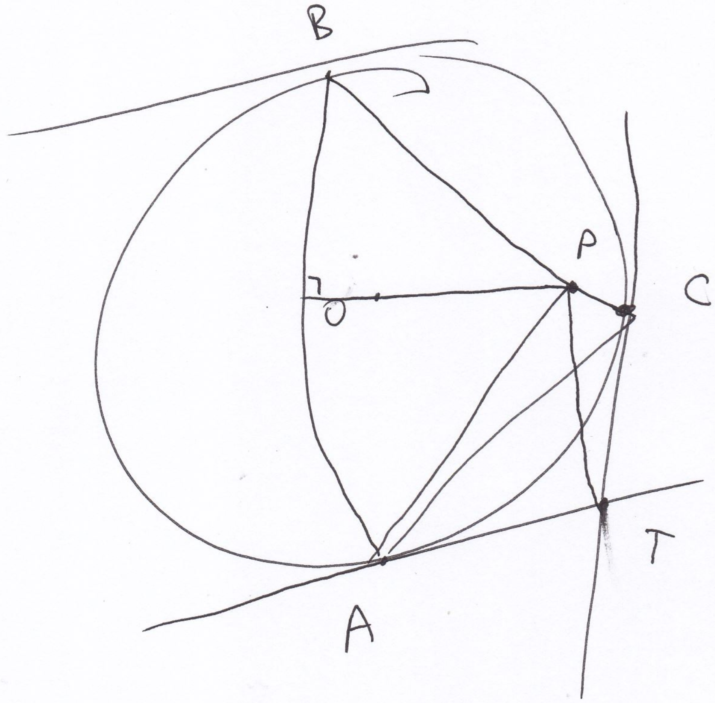
$13^2+28\cdot 42 = 1345$

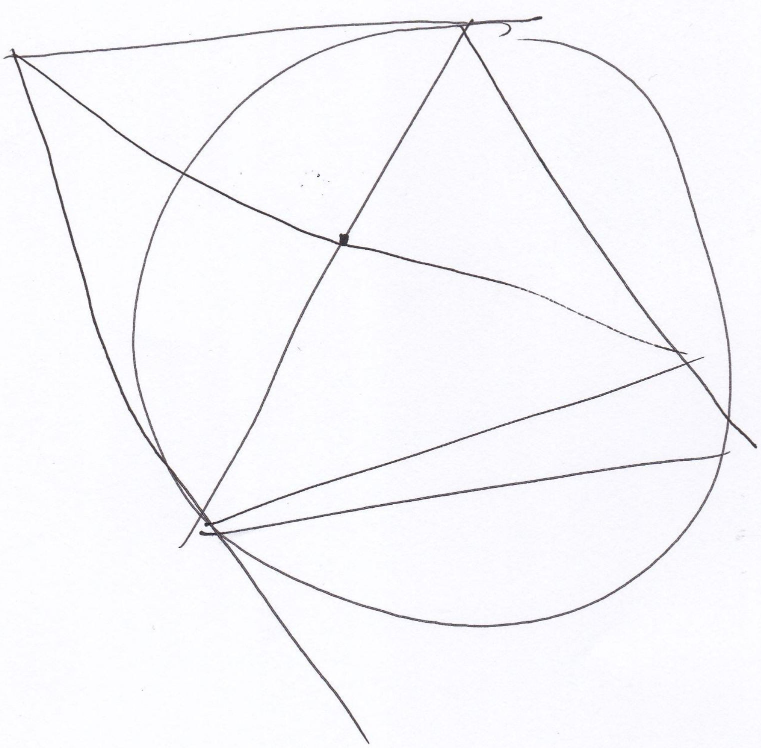
$x=\frac{-13\pm\sqrt{\ }}{14}$

$14^2=196$

$\frac{1346-2\sqrt{1345}}{14^2}$

Чертежи





$-a$

$[illegible] + 7 \vee \sqrt{29+a}$

$a^2 - 14a \vee 29 + a$

$a^2 - 15a - 29 \vee 0$

$a = \frac{15 + \sqrt{441}}{2}$

$225 + 4 \cdot 29 =$

$= 225 + 116 = 441$

$225 - 80 = 145$