Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103527**

ID профиля: **360435**

Вариант 24

№1

Чистовик

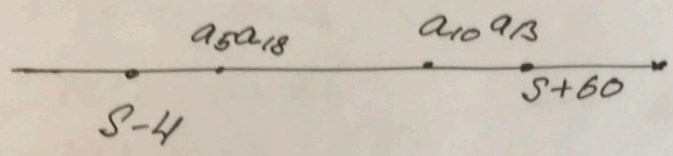
1

$\underbrace{a_1 < a_2 < \ldots\ a_9}_{\Sigma = S} \quad a_{10} \ldots$

$a_5 a_{18} > S-4$ (1)

$a_{10} a_{13} < S+60$ (2)

Решение



Отметим на числовой оси $S+60$ и $S-4$. Заметим, что a_5a_{18} может правее $S-4$, а $a_{10}a_{13}$ левее $S+60$ $\Rightarrow$ расстояние м/у a_5a_{18} и $a_{10}a_{13}$ < 64

Выразим a_5a_{18} и $a_{10}a_{13}$ через a_1 и d, где d – шаг прогрессии.

$$(a_1+4d)(a_1+17d)+64 > (a_1+9d)(a_1+12d)$$

$$\cancel{a_1^2}+\cancel{21a_1d}+68d^2+64 > \cancel{a_1^2}+\cancel{21a_1d}+108d^2$$

$$64 > 40d^2$$

$$d^2 < \frac{64}{40}$$

Т.к все числа прогрессии целые, то a_1 – целое и d – целое, при этом $d>0$ т.к прогрессия возраст $\Rightarrow$

$\Rightarrow d=1$

Выразим $S = \frac{a_1+a_1+8d}{2}\cdot 9 = (a_1+4d)\cdot 9$

Подставляю в (1): $(a_1+4)(a_1+17) > 9a_1+36-4$

$a_1^2+21a_1+68>9a_1+32$ Условие ②

$a_1^2+12a_1+36>0$

$(a_1+6)^2>0$ – верно при всех a_1 кроме $a_1=-6$

Подставим S в ②:

$(a_1+9)(a_1+12)<9a_1+36+60$

$a_1^2+21a_1+108<9a_1+96$

$a_1^2+12a_1+12<0$

$D=144-48=96$

$a_1\in\left(\frac{-12-\sqrt{96}}{2};\frac{-12+\sqrt{96}}{2}\right)$

$a_1\in\left(\frac{-12-4\sqrt{6}}{2};\frac{-12+4\sqrt{6}}{2}\right)$

$a_1\in(-6-2\sqrt{6};-6+2\sqrt{6})$

$4<2\sqrt{6}<5$

$16<24<5$

Т.к. $a_1\in Z$, то $a\in[-10;-2]$

Накладывая условие о том, что $a_1\ne-6$, получим

$a\in[-10;-6)\cup(-6;-2]$ и $a_1\in Z$

~~Ответ~~ ~~$[-10;-6)\cup(-6;-2]$~~ ~~$[-10;-6)\cup(-6;-2]$~~

Ответ: $-2, -3, -4, -5, -7, -8, -9, -10$

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b,10) & (2)\end{cases}$$

S_M – ? Шестовик (3)

Рассмотрим координатную плоскость ~~от~~ (a,b)

~~Подробнее~~ Запишем (2)-е нер-во в таком виде:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-6a-2b<10\\ a^2+b^2\le -6a-2b\end{cases} \quad (3)\\ \begin{cases}10\le -6a-2b\\ a^2+b^2\le 10\end{cases} \quad (4)\end{array}\right.$$

$\to$ ~~все~~ $b\le -3a-5$ – прямая

$\to$ ~~сфера~~ круг в начале координат с $R=\sqrt{10}$

Посмотрим теперь на подсистему (3): график 1-го нер-ва – прямая $b>-3a-5$

$a^2+b^2+6a+2b\le 0 \qquad a^2+6a+9+b^2+2b+1\le 10$

$$(a+3)^2+(b+1)^2\le 10$$

График 2-го нер-ва круг с радиусом 10 и координатами центра $(-3;-1)$

Построим теперь график (2)-го нер-ва

21103527 (U360435 M1303700)

Рисунок (4)

Имеем 2 одинаковых круга радиуса $\sqrt{10}$ симметрично отраженных ~~от~~ относительно прямой $b=-3a-5$

По т. Пифагора круг O_2 проходит через O_1, т.к. $\sqrt{(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{10} = R$

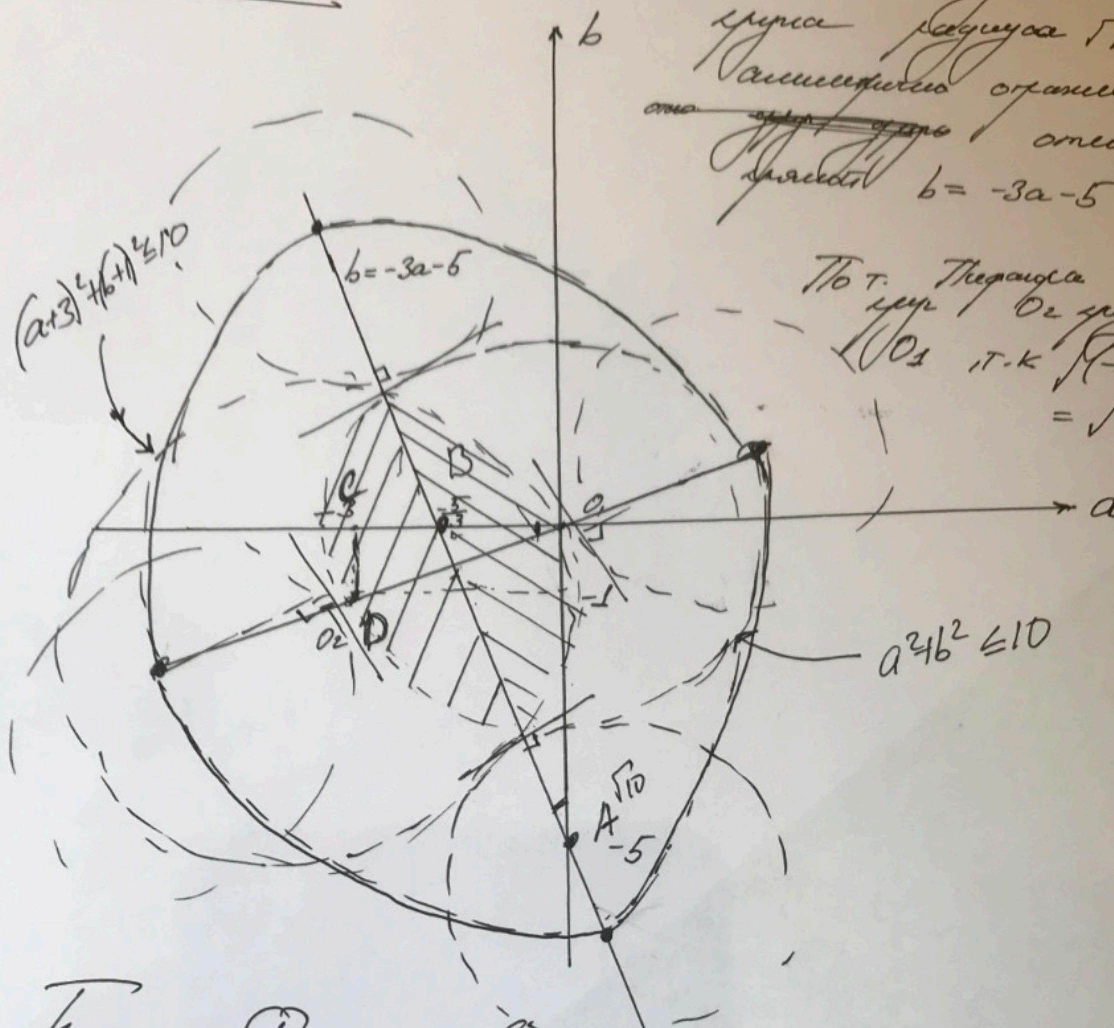


График 1-го нер-ва — круг с радиусом $\sqrt{10}$ и координатами (x, y). Рассмотрим положения окружностей при том, что все возможные круги с координатами (x, y) и радиусом $\sqrt{10}$ касаются заштрихованной части.

Полученная фигура из координат (x, y) — эллипс с радиусами $R_1 = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{10}+\sqrt{10}}{2} = 1{,}5\sqrt{10}$ и $R_2 =$ ~~$\sqrt{10}+\sqrt{10}$~~ $\sqrt{10} + \sqrt{(\sqrt{10})^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \sqrt{10} + \sqrt{10 - \frac{10}{4}} = \sqrt{10} + \sqrt{7{,}5}$

21103527 (U360435 M1303700)

Листовка (5)

$\Rightarrow S_M = \pi \cdot R_1 \cdot R_2 = \pi \cdot 1{,}5 \cdot \sqrt{10} \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{7{,}5}) =$

$= 10 \cdot 1{,}5 \cdot \pi + \pi \cdot 1{,}5 \cdot \sqrt{75} =$

$= 15\pi + 7{,}5\pi\sqrt{3} = \pi(15 + 7{,}5\sqrt{3})$

Отв: $\pi(15 + 7{,}5\sqrt{3})$

Докажем симметричность кругов O_1 и O_2 от-но прямой $b = -3a - 5$ следует из того, круги равны, каждый проходит через центр другого, а также $O_1O_2 \perp b = -3a - 5$, т.к $\triangle O_1BA \sim \triangle CDO_1$

$\frac{O_1C}{CD} = \frac{O_1A}{BO_1} = 3 \Rightarrow \angle DO_1C = \angle BAO_1$, а т.к $\angle BAO_1 + \angle ABO_1 = 90$, то и $\angle BO_1B + \angle O_1BA = 90 \Rightarrow$ угол м/у O_1O_2 и прямой $b = -3a - 5$ прямой $\Rightarrow$ симметричны окр-ти относительно прямой $b = -3a - 5$

$a_1 \quad a_1+d \quad a_1+2d \ \ldots \quad a_1+8d$ [illegible]

$a_5 a_{18} > S-4$

$$(a_1+4d)(a_1+17d) > 9a_1+36d$$

$$a_1^2+21a_1d+68d^2 > 9a_1+36d-4$$

$$a_1^2+(21d-9)a_1+68d^2-36d+4>0$$

$D<0$ – [illegible] всегда

$$(a_1+9d)(a_1+12d) < 9a_1+36d+60$$

$$a_1^2+21a_1d+108d^2 < 9a_1+36d+60$$

$$a_1^2+a_1(21d-9)+108d^2-36d-60<0$$

$$D=441d^2-378d+81+240-432d^2+144d=$$

$$=9d^2-234d+321>0$$

$a_5 a_{18} > S-4$

$a_{10} a_{13} < S+60$

Игровые

$a_5 a_{18} + 64 > a_{10} a_{13}$

$(a_1+4d)(a_1+17d) + 64 > (a_1+9d)(a_1+12d)$

$+68d^2$

$a_1^2 + 21d a_1 + 64 > a_1^2 + 21a_1 d + 108 d^2$

$68d^2 + 64 > 108d^2$

$64 > 40d^2$

$d^2 < \frac{64}{40} \Rightarrow \boxed{d=1}$

a

16·6

$$\underbrace{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \ldots \ldots \quad a_9}_{S}$$

Чуриков 2 3

$a_5 a_{18} > S-4$

$a_{10} a_{13} < S+60$

$(a_1+4d)(a_1+17d) > S-4$

$(a_1+9d)(a_1+12d) < S+60$

$S = \frac{a_1+a_9}{2} \cdot 9 = \frac{a_1+a_1+8d}{2} \cdot 9 = (a_1+4d) \cdot 9$

$a_1^2 + 4a_1d + 17a_1d + 68d^2 > 9a_1 + 36d - 4$

$a_1^2 + a_1(21d - 9) + 68d^2 - 36d + 4 > 0$

$D = 441d^2 - 378d + 81 + 144d - 272d^2 - 16 =$

$= 169d^2 - \cancel{6}50d + 65 \geq 0$ $\cancel{138}$ -

$169d^2 - 650d + 65 \geq 0$

$13d^2 - 50d + 5 \geq 0$

$21 \cdot 21 = 441$

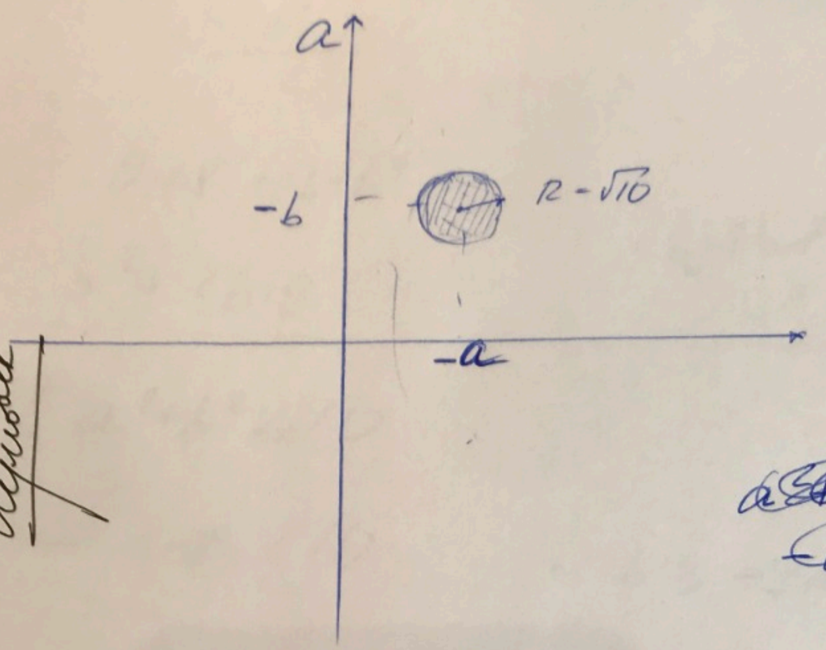
$42 \cdot 9 = 378$

$200 \cdot 13 = 2600$

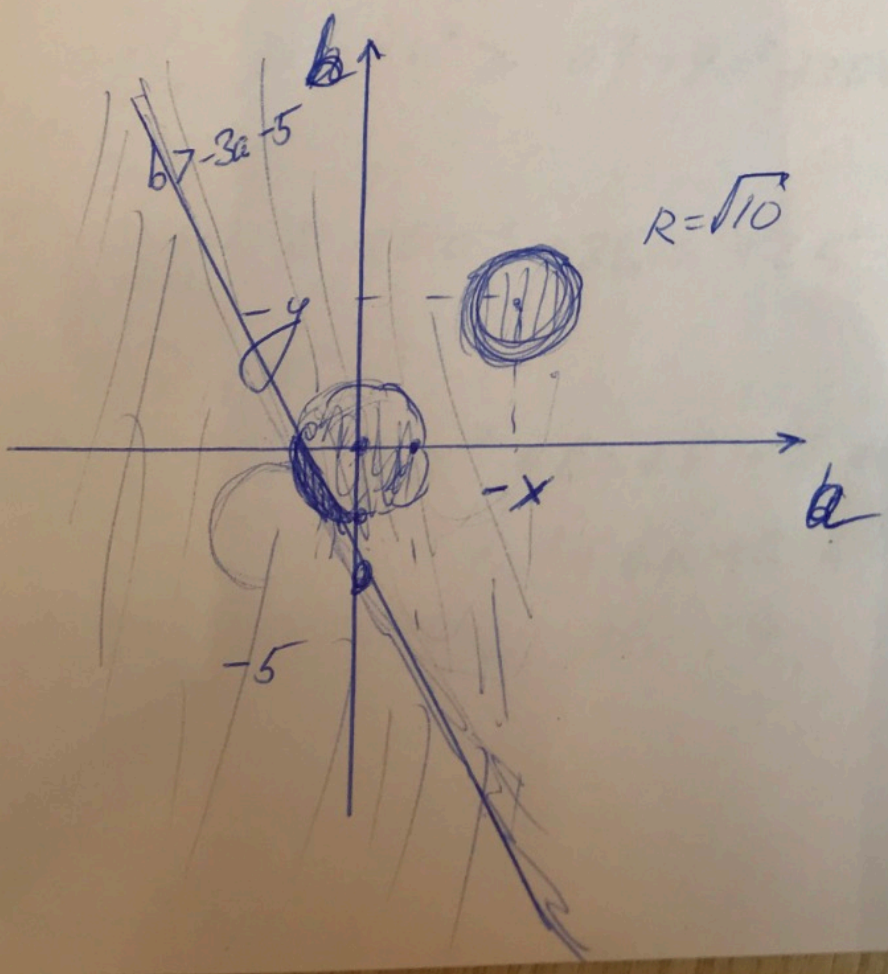
:6

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b,10) \end{cases}$$

M - фигура из x,y, что $\exists\ a,b$



$a^2+b^2 \le 10$



$a^2+b^2 \leq 6a-2b$

Игри

$a^2-6a+2b+b^2 \leq 0$

a^2 $D=36-4b-4b^2$

$\frac{6}{2}=3$

$9-18+2b+b^2$

b^2+2b+9

$-6a-2b \geq 10$

$b >$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \leq 10 \\ -6a-2b \leq 10 \end{cases} \longrightarrow b \geq -3a-5$$

$10 \geq a^2+b^2 \geq a^2+9a^2+30a+25$

$10 \geq 10a^2+30a+25$

$a^2 \neq$

$2a^2+6a+5-2 \leq 0$

$2a^2+6a+3 \leq 0$

$D= 36-24$

21103527 (U360435 M1303700)

$-6a-2b < 10$

Черн

$\boxed{b > -3a-5}$

$a^2 + b^2$

$10 < -6a-2b$

$b \Rightarrow b < \frac{-6a-10}{2} = -3a-5$

$\cancel{b = -3a-5}$

При $-6a-2b < 10 \to b > -3a-$

$a^2+b^2 \leq -6a-2b$

$a^2+b^2+6a+2b \leq 0$

$a^2+6a+b^2+2b \leq 0$

$D = 36-4b^2-8b$

$-4b^2-8b+36 \geq 0$

$D = 64+$

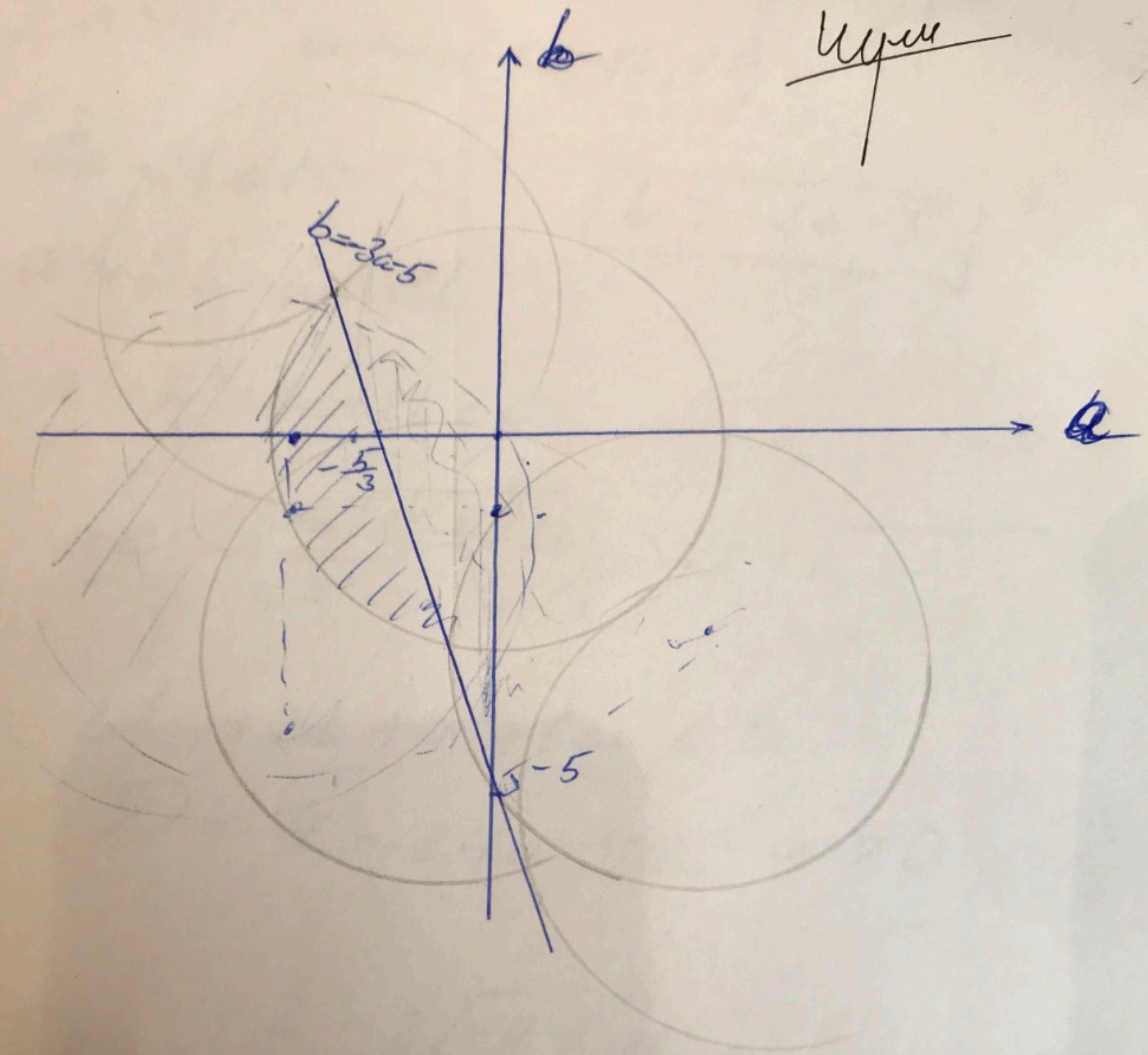
21103527 (U360435 M1303700)

$$a^2+b^2 \leq -6a-2b$$

$$a^2+6a+9 + b^2+2b+1 \leq 37$$

$$(a+3)^2 + (b+1)^2 \leq 10$$

21103527 (U360435 M1303700)



b
a
b=-3a-5
$-\frac{5}{3}$
-5

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 10\\ a^2+b^2 \leq \min(-6a-2b, 10)\end{cases}$$

Игры

$-6a-2b<10$

$\boxed{b>-3a-5}$

$a^2+b^2<-6a-2b$

$a^2+b^2+6a+2b<0$

$a \in \frac{-6 \pm \sqrt{36-4b^2-8b}}{2}$; $-6+\sqrt{}$

$b^2+2b+a^2+6a<0$

$D=4-24a-4a^2 \to >0$

$b \in \frac{-2-2\sqrt{-a^2-6a+1}}{2}$; $\frac{-2+2\sqrt{-a^2-6a+1}}{2}$

$-1-\sqrt{-a^2-6a+1}$; $-1+\sqrt{-a^2-6a+1}$

$-1-\sqrt{a^2-6a+1} > -3a-5$

21103527 (U360435 M1303700)

$a^2+b^2 \le -6a-2b$

шери

$a^2+6a+b^2+2b \le 0$

-3

$b^2+2b+27$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103527**

ID профиля: **360435**

Вариант 24

№1 $33 = 3 \cdot 11$ [illegible] (1)

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 33 \\ НОК(a,b,c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \end{cases}$$

– Заметим, что каждое из чисел a, b, c содержит в своем разложении 3 и 11 и только 3 и 11

– Заметим также, что у какого-то числа минимальная степень 3-ки $= 1$, аналогично у какого-то минимальная степень 11 $= 1$ (иначе НОД > 33).

– Заметим, что среди a, b, c у какого-то числа степень 3-ки наибольшая и равна 19, у какого-то аналогично степень 11-ти наибольшая и равна 15 (иначе НОК $< 3^{19} \cdot 11^{15}$, если меньше)

⇒ степени 3-ки в числах $= 1, 19$ и любое число от $[1$ до $19]$

⇒ 19 вариантов и ~~[illegible]~~ $19 \cdot 6 - 6 = \underline{108}$ - удовлетворяющих вариантов

$2 \cdot C_3^2$ - когда 2 степени совпадают 1 и 1 или 19 и 19

~~$19 \cdot 3 \cdot 6 = 57$~~

Аналогично

Степени 11-ти в числах $= 1, 15$ и любое число от $[1$ до $15]$

⇒ 15 вариантов и $15 \cdot 6 - 6 = \underline{84}$ удовлетворяющих вариантов

когда степени совпадают 1 и 1 или 15 и 15

$108 \cdot 84$

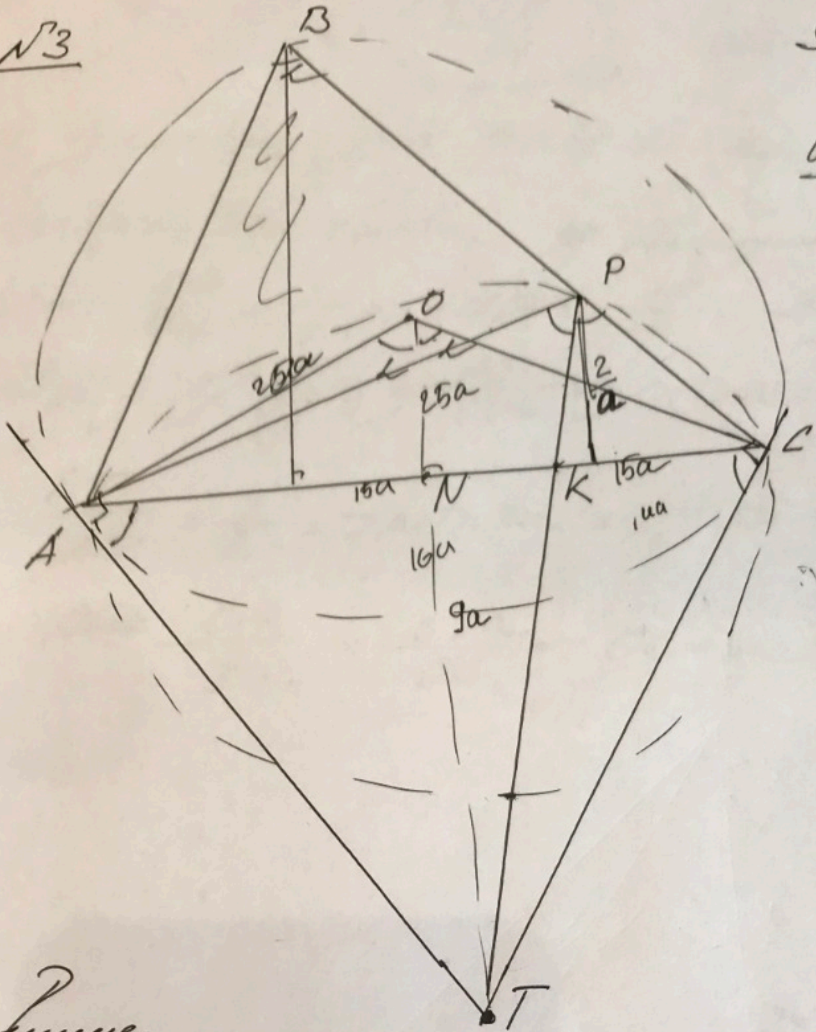
⇒ всего ~~[illegible]~~ = ~~[illegible]~~ вариантов

9072

№3

S_{ABC} – ?

Шифр ②



Решение

1) Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle AOC = 2\alpha$ – как центральный

В силу симметрии отн-но OT (т.к. $AT = CT$, $AO = OC$), то $\angle AOT = \angle TOC = \alpha$; $\angle TPC = \angle TOC = \alpha$ – как опираются на 1 дугу $\Rightarrow$ $\angle TPC = \angle ABC$ – как односторонние $\Rightarrow PT \parallel AB$ $\Rightarrow \triangle PKC \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{PKC}} = k^2$, где

k – коэф-т подобия. Заметим, что у $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ – общая высота $\Rightarrow \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{16}{14}$. Пусть $AK = 16a$,

тогда $KC = 14a$ $\Rightarrow S_{ABC} = 14 \cdot \left(\frac{16a + 14a}{14a}\right)^2 =$

21103527 (U360435 M1303701)

Задача 3

$= 14 \cdot \frac{30^2}{14^2} = \frac{900}{14}$ Ответ: $\frac{450}{7}$

2) $tg\angle = \frac{3}{5}$. Пусть $OT \cap AC = N$. В силу симметрии $AN = NC = 30a : 2 = 15a$. Рассмотрим $\triangle AON$.

$tg\angle = \frac{AN}{\cancel{AO}ON} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cancel{AO}ON = \frac{AN}{\frac{3}{5}} = \frac{15a}{\frac{3}{5}} = 25a$

~~Для $\triangle AOT$ $tgA = \frac{AT}{25a} \Rightarrow AT = 25a \cdot \frac{3}{5}$~~

$\frac{NT}{AN} = \frac{3}{5} \Rightarrow NT = 9a \Rightarrow OT = 34a$

$\frac{OC}{34a} = \frac{25a}{OC} \Rightarrow OC = a \cdot 5 \cdot \sqrt{34}$

$2 \log_a b$

$\frac{1}{2} \log_b a$

$2 \log_b c$

$a = 29 - x$

$b = \frac{x}{7} + 7$

$2 \log_a b = 2 \log_b c$ $\quad c = -x - 1$

$\log_a b = \log_b c$

$\log_{29-x} \left(\frac{x}{7} + 7\right) = \log_{\cancel{\frac{x}{7}+7}}$

$a \qquad c$

$29 - x > -x - 1$

$29 - x \qquad \varepsilon \qquad 30 \; g^{\circ} \; 78$

$\frac{x}{7} + 7$

$\frac{x}{7} + 7 \qquad -x - 1$

$8x \qquad -50$

$\frac{x}{7} + 7$

$b = \frac{1}{7}(x+1) = \frac{1}{7} - c$

$2\log_a \frac{1}{7}(c)$

$\frac{1}{2}\log_c a$

$2\log_{\frac{1}{7}} \cancel{(c)}^{c} =$

$2\log_{\frac{1}{7}}(x+1)^{-x-1}$

[illegible]

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

$\cancel{9x+49}\ \frac{1}{7}(x+49)$

$-x-1 > 0 \rightarrow x < -1$

$\frac{x}{7}+7 > 0.$

Черновик

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 2\log_{29-x}\frac{x}{7}+7$

$\log_{(x+1)^2}(29-x)$ $\quad \frac{1}{2}\log_{-x-1}29-x$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$ $\quad 2\log_{\frac{x}{7}+7}-x-1$

$\log_{-x-1}29-x = 4\log_{\frac{x}{7}+7}-x-1$ $\quad 4\log_{29-x}\frac{x}{7}+7$

$4\log_{6\frac{6}{7}}0$

$4\log_{0}30$

30 78 0 до $6\frac{6}{7}$

$\frac{14}{S}?$ $= \left(\frac{14}{30}\right)^2$ $S = \frac{14}{\frac{14^2}{30^2}} = \frac{30^2}{14}$

$c^{\log_a b}$

$2^{\log_b c}$

$\frac{1}{2}^{\log_c a}$

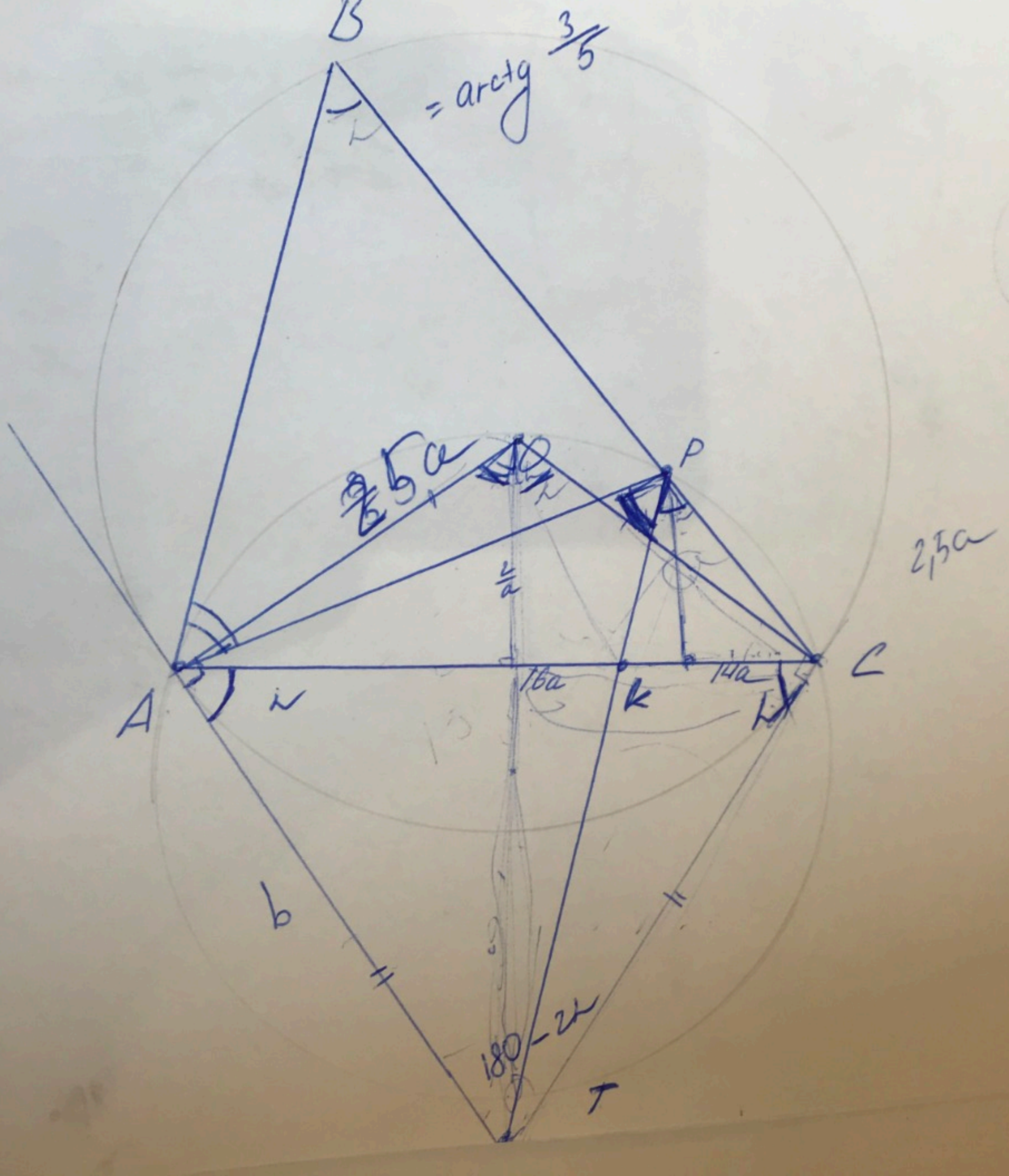
$a = 29 - x = \boxed{c + 30}$

$b = \frac{x}{7} + 7 = \frac{-1-c}{7} + 7 = \frac{1}{7}(-1 - c + 7) =$

$= \frac{1}{7}(6 - c)$

$c = -x - 1$

$2^{\log_{c+30} \frac{1}{7}(6-c)}$



$\boxed{S_{ABC} - ?}$

$R - (5a+b) =$ AC - ?

$\frac{(30)^2}{(14)}$ 14a

$\frac{16a \cdot h}{2} = 16$

$h = \frac{2}{a}$

$\frac{\frac{2}{a}}{R_1} = \frac{R_1}{2R_2}$

$\frac{4R_2}{a} = R_1^2$

~~Черновик~~

21103527 (U360435 M1303701)

НОД (a, b, c) = 33

НОК (a, b, c) = $3^{19} \cdot 11^{15}$

$d = 3 \cdot 11 \cdot a_1$

$a = 3^{a_1} \cdot 11^{a_2}$

$b = 3^{b_1} \cdot 11^{b_2}$

$c = 3^{c_1} \cdot 11^{c_2}$

Шилк

1

3^1 3^{19} 3

от [1 до 19]

3^{19} 11 3^1 11 3 11

10

$$\begin{array}{r} 108 \\ \times\ 84 \\ \hline 432 \\ 864\ \ \\ \hline 9072 \end{array}$$

90-6-6 =

15·6-6

$НОД(a, b, c) = 33$ $a = 33a_1$ $b = 33b_2$ $c = 33c_2$

$НОК(a, b, c) = 3^{19} \cdot 11^{15}$ a_1, b_2, c_3 – взаимно просты

$3^{19} \cdot 11^{15}$ – уходит 3^{18} содерж

11^{14}

[illegible]

$11^{14} \cdot 3$ $3 \cdot 3^{18}$

$19 \times 6 = 114$

108

$3 \cdot 11 \cdot 11^{14}$ $3 \cdot 11 \cdot 3^{18}$ $\cdot 3 \cdot 11$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) \le 2$ 0 $6\frac{6}{7}$

$\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

$\sqrt{30}$

$$\begin{cases} \sqrt{29-x} > 0 \neq 1 & x \neq 28 \\ \frac{x}{7}+7>0 & \sqrt{29} \quad 67 \quad x>-49 \\ \frac{x}{7}+7\neq 1 & \longrightarrow x\neq -42 \\ -x-1>0 & \longrightarrow x<-1 \\ 29-x>0 & \longrightarrow x<29 \\ x+1\neq 1 & \longrightarrow x\neq 0 \end{cases}$$

$\boxed{x \in (-49;-42) \cup (-42;-1)}$

$\log_{(x+1)^2}(29-x) = \frac{1}{2}\log_{(x+1)}(29-x)$

78

-48

1

$\log$ -49 -1 0 -48 78

$\frac{1}{2}$