Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103483**

ID профиля: **381810**

Вариант 24

№1

Пусть a - первый член ар прог
b - шаг прогрессии

Тогда:

$S = a_1 + a_2 + .. + a_9 = a + (a+b) + (a+2b) + .. + (a+8b) = 9\cdot a + 36b$

$$\begin{cases} a_5 \cdot a_{18} > S - 4 \\ a_{10} \cdot a_{13} < S + 60 \end{cases} \to \text{это} \quad \begin{matrix} (a+4b)(a+17b) > 9a + \cancel{36}\, 36\cdot b - 4 \\ (a+9b)(a+12b) < 9a + 36\cdot b + 60 \end{matrix}$$

раскроем: $\begin{cases} a^2 + 21\cdot b\cdot a + 68b^2 - 9a - 36b + 4 > 0 \\ a^2 + 21b + 108\cdot b^2 - 9a - 36b - 60 < 0 \quad |\cdot(-1) \end{cases} \Big| +$

получаем: $-40b^2 + 64 > 0$ или $b^2 < \frac{64}{40}$ откуда $b \in (-\sqrt{1{,}6}; +\sqrt{1{,}6})$

По условию ар. прог. возрастает, и все члены - целые Z

$\Rightarrow b > 0$ и $b \in Z$ $\Rightarrow$ т.к $\sqrt{1{,}6} < 2$ но $\sqrt{1{,}6} > 1$, то

единственное $b = 1$

Подставим в ту же систему:

$$\begin{cases} ①\ a^2 + 12a + 36 > 0 \to a \neq -6 \quad ((a+6)^2 \geq 0 \text{ равенство при } a = -6) \\ ②\ a^2 + 12a + 12 < 0 \to (a - (-6-\sqrt{24}))(a - (-6+\sqrt{24})) < 0 \end{cases}$$

$a_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ $\quad a_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$

① $a \neq -6$

② $a \in (-6-\sqrt{24}; -6+\sqrt{24})$

т.к. $a \in Z$ по условию (иначе члены будут не Z)

то из ② $a = \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2\}$ ↗ это целые числа, удовлетворяющие нер-ву

исключаем $\{-6\}$ из-за ①

Ответ: $a = \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$

Чистовик Математика 11 класс

№2 #1

Дано:

$AB = 4$

$AC = CB = 7$

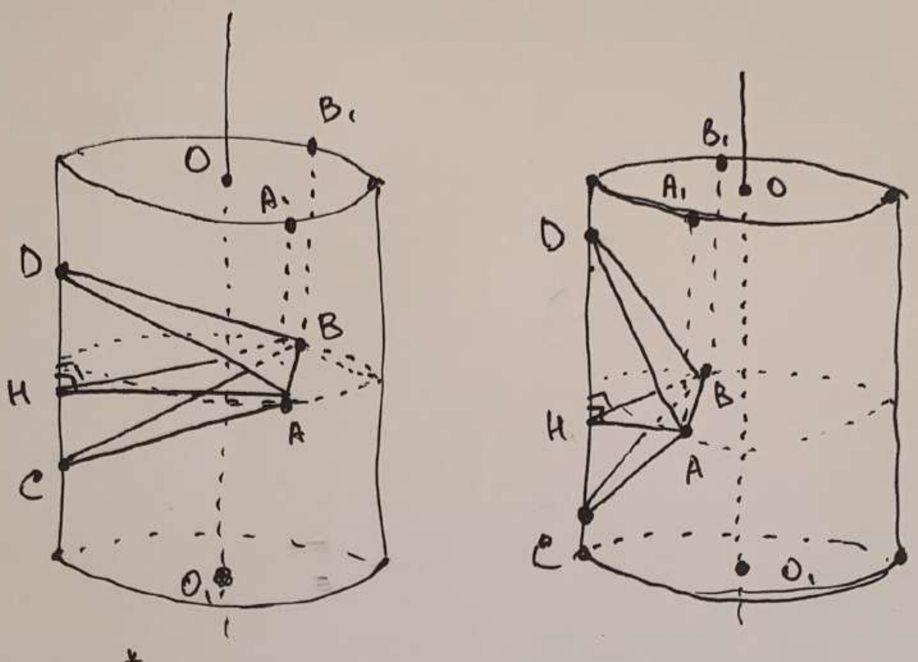
$AB = DB = 8$

тетраэдр - вписан в цилиндр

$CD \parallel OO_1$

R - мин

CD - ?



*примеры разного расположения тетраэдров

1) проведем высоты из A и B на CD AH и BH' соответ.

рассмотрим треугольники ADC и BDC, они равны по трем сторонам ($AC = CB$, $AD = BD$ по условию, CD - общая)

т.к. CD - общая, то из равенства $\triangle$ $DH = DH' \Rightarrow H = H'$.

2) Прямая $CD \perp$ основанию цилиндра, т.к она $\parallel OO_1$, а $OO_1 \perp$ основанием

$AH \perp CD$ и $BH \perp CD \Rightarrow$ плоскость $AHD \perp CD$

$\Rightarrow$ плоскость ~~AHDB~~ $AHD \parallel$ основанием

3) ~~проведем на основание~~ проведем на основание цилиндра с O проекцию A_1B_1 отрезка AB. $A_1B_1 = AB$, т.к плоскости $\parallel$

~~AB~~ A_1B_1 - хорда окружности с центром O и радиусом R_{min}

тогда следует, что $A_1B_1 \leq$ диаметра, или $A_1B_1 \leq 2R_{min}$

чтобы R был min $\quad 2R_{min} = A_1B_1$ или $2R_{min} = AB = 4$

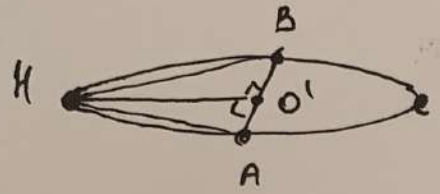
$\Rightarrow R_{min} = 2$

③ Чистовик Математика 11 класс

№2 #2

4) т.к теперь мы знаем, что AB - диаметр, а ABH ∥ основанию цилиндра

то $\angle BHA = 90^\circ$



$O'A = O'B = OH = R_{min}$

по Th Пиф $AH = HB = \sqrt{2} \cdot 2$ $\left(\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2} \cdot 2\right)$

(т.к. $AO' = O'B = O'H$, а $\angle BHA = 90^\circ$, то $\angle HO'B = HO'A = 90^\circ$)

тогда по Th Пифагора найдём CD

CD - это DH + HC

где $DH = \sqrt{AD^2 - AH^2}$

$HC = \sqrt{AC^2 - AH^2}$

$DH = \sqrt{8^2 - 2 \cdot 4} = \sqrt{56}$

$HC = \sqrt{7^2 - 2 \cdot 4} = \sqrt{41}$

$CD = \sqrt{56} + \sqrt{41}$

т.к. AB - диаметр, то случай только один

(например уже другой хорды случая два, как на рисунках в начале)

Ответ: $CD = \sqrt{56} + \sqrt{41}$

(4) Чистовик Математика 11 класс

№3

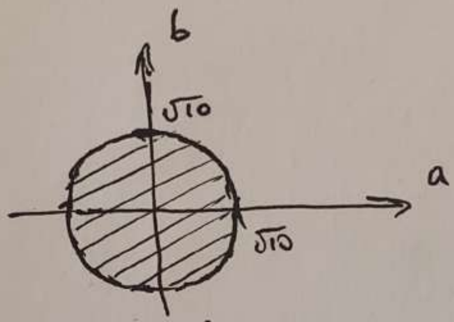
$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 10 & \text{— сфера } R=\sqrt{10} \quad (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b,\ 10) & (2) \end{cases}$$

(1) сфера $R=\sqrt{10}$ с центром в $(a; b)$

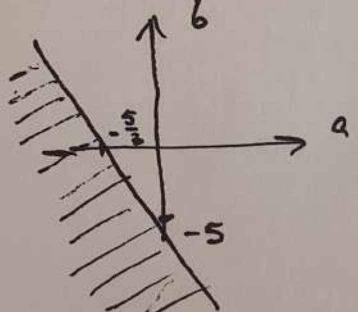
(2) разберем два случая

$$\left[\begin{array}{l} 1)\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 10 \\ 10 \le -6a-2b \end{cases} \\ 2)\ \begin{cases} a^2+b^2 \le -6a-2b \\ 10 \ge -6a-2b \end{cases} \end{array}\right.$$

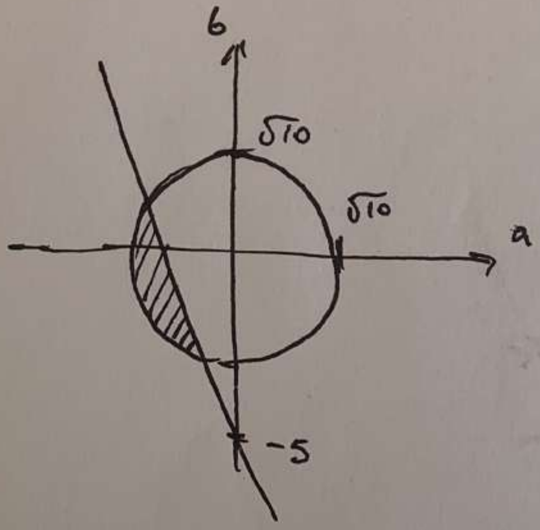
1) $a^2+b^2 \le 10$ это:



$b \le -3a-5$



совместим



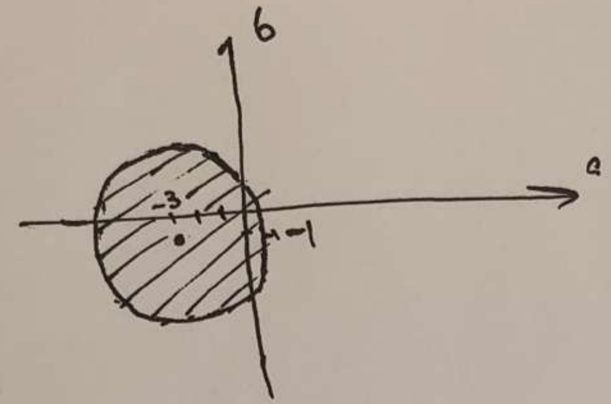
Чистовик математика 11 класс

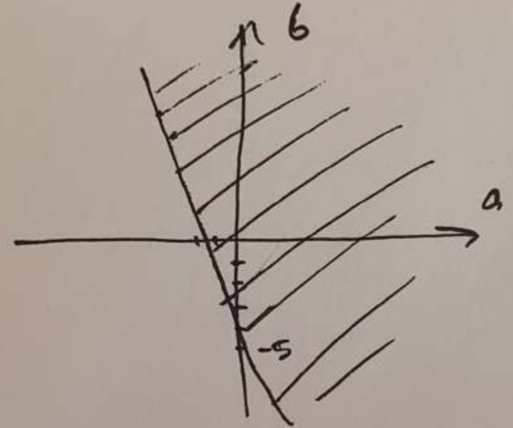
№3

2) $\begin{cases} a^2 + b^2 \le -6a - 2b \\ 10 \geq -6a - 2b \end{cases}$

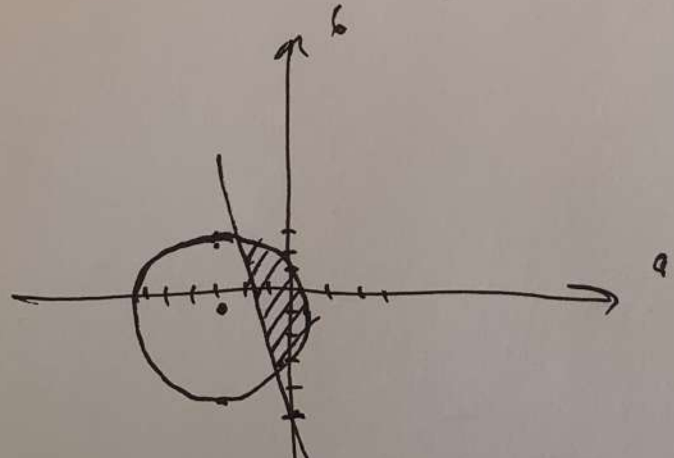
Это тоже самое, что и: $(a+3)^2 + (b+1)^2 \le 10$
$b \geq -3a - 5$

нарисуем:



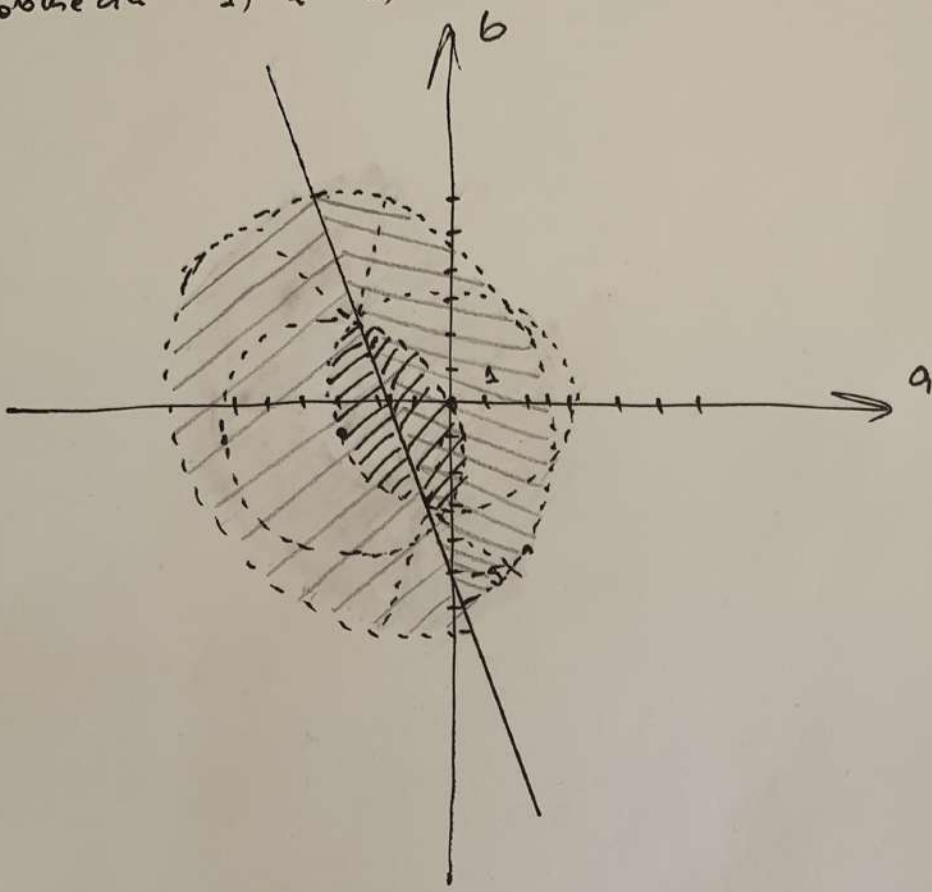


совместим



(6) Математика 11 класс Чистовик

№3 совместим 1) и 2)



т.к центр окружностей из (1) лежит на (а; б)

то ▨ - это те точки в которых может лежать центр.

Чтобы найти S - нужно провести ~~…~~ окружности из каждой точки на краю ▨ - это будет M

▨ - это M (карандашом, коорды)

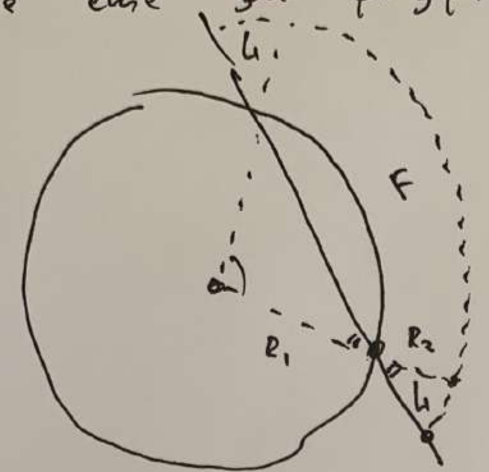
что такое множество окружность из точки на ~~краю~~ краю ▨ - это часть окружности с R = 2 бо ($R_1 + R_2$)

т.е. $F = \frac{\angle}{360} \cdot \pi \cdot (R_1 + R_2)^2 - \frac{\angle}{360} \cdot \pi \cdot R_1^2$

таких фигура две $\angle$ -? (найти через координаты считать не успеваю)

№3

такие еще ~~две~~ фигура



F - уже „наши"

L - это сектор окружности с $R = R_2$

$$L = \frac{\left(\frac{180-\alpha}{2}\right)}{360} \cdot \pi \cdot R_2^2$$

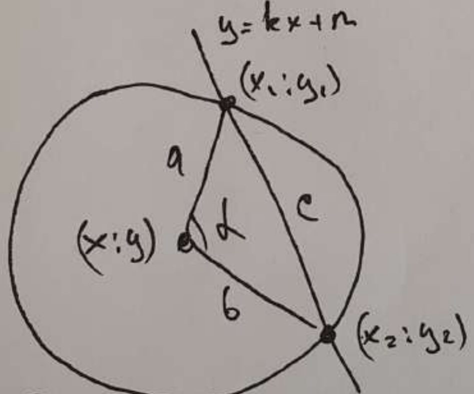
т.к сектора L - два то $2L = \frac{180-\alpha}{360} \cdot \pi \cdot R_2^2$

$$M = F + F' + 2L + 2L'$$

где F - это окружности с центром (0;0) ↳ (случай a, б 1))

F' - это окружности с центром (3;-1) ↳ для a, б случай 2)

поиск α:



на счет нет времени.

у нас есть ур-ие окружности и прямой

=> мы можем найти их пиз, т.е. $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$

тогда нам известна по Th Пиф $\rho((x_1;y_1);(x_2;y_2)) = c$ $\left(c = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right)$

по Th cos $\cos\alpha = \frac{c^2 - a^2 - б^2}{2aб}$, где $a = б = R$

$\alpha = \arccos ↗$

Ответ: $M = F + F' + 2L + 2L'$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103483**

ID профиля: **381810**

Вариант 24

① лист Чистовик Математика 11 класс

№4 #1

$a, b, c \in N$

$$\begin{cases} ① \text{ НОД}(a;b;c) = 33 \\ ② \text{ НОК}(a;b;c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \end{cases}$$

из ① $a, b, c \,\vdots\, 33$

из ② $3^{19} \cdot 11^{15} \,\vdots\, a, b, c$

т.к. $\text{НОК}(a,b,c) = 3^{19} \cdot 11^{15}$, то $a, b, c \leq 3^{19} \cdot 11^{15}$

Что такое НОК?

НОК - это число, состоящее из наибольших простых множителей, т.к это условие делимости.

Пример: $n = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_4^{\alpha_4}$

$m = x_1^{\alpha_5} \cdot x_3^{\alpha_3}$

$\text{НОК}(n;m) = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_3^{\alpha_3} \cdot x_4^{\alpha_4}$

т.к. $\alpha_1 > \alpha_5$, нужно в НОКе учитывать α_1, чтобы

$\text{НОК} \,\vdots\, x_1^{\alpha_1}$

Отсюда следует, что ~~наибольшее~~ какое-то из чисел a, b, c содержит в себе 3^{19} и 11^{15}

~~(Рассмотрим НОД(a,b,c) = 33)~~

Также из НОК следует, что a, b, c состоят из $3^{\alpha} \cdot 11^{\beta}$

где $\alpha \in [0; 19]$

$\beta \in [0; 15]$

Рассмотрим $\text{НОД}(a,b,c) = 33$

из него следует, что $a, b, c \,\vdots\, 33$ или $\begin{cases} a, b, c \,\vdots\, 3 \\ a, b, c \,\vdots\, 11 \end{cases}$

$\Rightarrow$ в составе a, b, c есть как минимум одна тройка и 11

(если разложить на простые множители)

② лист   Чистовик Математика 11

л4 №2

Опять же если рассмотреть, что такое НОД, то это – выбор наименьших элементов среди чисел при их разложении на простые множители

Вернемся к примеру:

$n = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_3^{0} \cdot x_4^{\alpha_4}$

$m = x_1^{\alpha_5} \cdot x_2^{0} \cdot x_3^{\alpha_3} \cdot x_4^{0}$

НОД$(m,n) = x_1^{\alpha_5}$ т.к. $\alpha_5 < \alpha_1;\ 0 < \alpha_2;\ 0 < \alpha_3;\ 0 < \alpha_4$

А на берем наим, т.к это условие делимости m, n на НОД.

Отсюда следует, что в разложении a, b, c на простые множители, найдутся множители 3^1 и ~~11~~ 11^1, чтобы НОД$(a,b,c) = 3^1 \cdot 11^1$

Тогда с этими данными перейдем к комбинаторной части!

Заметим, что если есть тройка (a,b,c) то есть тройка (b,a,c)

=> найдя тройку a,b,c, мы знаем, что ~~[illegible]~~ существует еще $3 \cdot 2 - 1$ $(=5)$ троек.

$a = 3^{\alpha_1} \cdot 11^{\alpha_2}$

$b = 3^{\alpha_3} \cdot 11^{\alpha_4}$

$c = 3^{\alpha_5} \cdot 11^{\alpha_6}$

Из НОК и НОД, рассматривая множитель 3 мы знаем что в $\alpha_1; \alpha_3$ и α_5 есть числа равные 1 и 19

Предположим это $\alpha_1 = 1$ $\alpha_3 = 19$ тогда для α_5 остается от 1 до 19 случаев.

Учитывая перестановки (например $\alpha_3 = 1$ $\alpha_5 = 19$ $\alpha_1 \in [1:19]$)

Всего есть $\underbrace{(3 \cdot 2)}_{\text{кол-во перестановок}} \cdot \underbrace{19}_{\text{разные } \alpha}$ вариантов, но не будем забывать про повторы

например $\alpha_1 = 1$ $\alpha_3 = 1$ $\alpha_5 = 19$ считается два раза при $\alpha_1 = const = 1$ и при $\alpha_3 = const = 1$

тогда всего $6 \cdot 19 - \frac{2 \cdot (2 \cdot 3)}{2}$ → кол-во перестановок

т.к. повтора для двух $\alpha = \{1 : 19\}$

исключаем не все, а только половину, чтобы убрать только повторения

~~Б~~ Для 11 аналогично: ~~[illegible]~~ $6 \cdot 15 - 6$

Всего комбинаций из 3 и 11: $(6 \cdot 19 - 6) \cdot (6 \cdot 15 - 6) = 18 \cdot 14 \cdot 6^2 = 9072$

Ответ: 9072

③ лист   Чистовик математика 11

№5 #1

Числа $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$; $\log_{(x+1)^2}(29-x)$; $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

Пусть: $a=\sqrt{29-x}$

$b=\sqrt{\frac{x}{7}+7}$

$c=-x-1$

Тогда числа: $\log_a b^2$; $\log_{c^2} a^2$; $\log_b c$

ОДЗ: $\begin{cases} 29-x>0 & x<29 \\ \frac{x}{7}+7>0 & x>-49 \\ -x-1>0 & x<-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x\in(-49;-1) \\ x\neq \{-42\} \end{array}$

Тогда есть три случая:

① $2\log_a b=\log_c a=\log_b c-1$

② $2\log_a b=\log_c a-1=\log_c c$

③ $2\log_a b-1=\log_c a=\log_b c$

① $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$29-x\nearrow$ при $x\nearrow$

$\frac{x}{7}+7\nearrow$ при $x\nearrow$

$(x+1)^2\nearrow$ при $x\nearrow$

но $(x+1)^2$ растет быстрее чем $29-x$

$\Rightarrow \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)\nearrow$ при $x\nearrow$ (т.к. $\sqrt{29-x}$ растет медленнее чем $\frac{x}{7}+7$)

$\log_{(x+1)^2}(29-x)\searrow$ при $x\nearrow$

(5) лист

Чистовик Математика 11

№5 #2

(1) $\log_{\sqrt{23-x}}(\frac{x}{7}+7) = \log_{(x+1)^2}(23-x)$

имеет решение только одно

т.к. это ↗ и ↘ функции,

его можно подобрать $x=-7$

при $x=-7$ $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = \log_{\sqrt{6}} 6 = 2$, он равен, это ответ

(3) $\log_{(x+1)^2}(23-x) = \log_{(\frac{x}{7}+7)}(-x-1)$

Опять же ↘ он "убывает" ↘ он "возрастает"

=> где x - ?

$\log_{\sqrt{23-x}}(\frac{x}{7}+7) =$ тоже 1, т.е. это не решение

(2) будет являться ответом

где $\log_{\sqrt{23-x}}(\frac{x}{7}+7) = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = \log_{(x+1)^2}(23-x)-1$

$\ln(\frac{x}{7}+7)\cdot\ln\sqrt{\frac{x}{7}+7} = \ln(-x-1)\cdot\ln\sqrt{23-x}$

x - ?

Ответ: $x=-7$