Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103464**

ID профиля: **266677**

Вариант 24

Чистовик

Задача №1.

$$S=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n=\frac{2a_1+d(9-1)}{2}\cdot 9=9a_1+36d$$

$d>0$ т.к. по усл. прогрес. возраст.

$a_5\cdot a_{18}>S-4$

$(a_1+4d)(a_1+17d)>9a_1+36d-4$

$a_1^2+21a_1d+68d^2>9a_1+36d-4$

$a_{10}a_{13}<S+60$

$(a_1+9d)(a_1+12d)<9a_1+36d+60$

$a_1^2+21a_1d+108d^2<9a_1+36d+60$

Сложим 2 неравенства, а затем подставим получив. знач.

$$\cancel{a_1^2}+\cancel{21a_1d}+68d^2+\cancel{9a_1}+\cancel{36d}+60>\cancel{9a_1}+\cancel{36d}-4+\cancel{a_1^2}+\cancel{21a_1d}+108d^2$$

$40d^2<64$

$d^2<\frac{8}{5}$ т.к. прогрессия сост. из цел. чисел, то $d\in\mathbb{Z}$

$d=0$ не может быть

$d=1$

$1<\frac{8}{5}$

Подставим:

$a_1^2+21a_1+68>9a_1+36-4$

$a_1^2+12a_1+36>0$

$$a_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{144-4\cdot 36}}{2}=\frac{-12\pm\sqrt{0}}{2}=-6$$

$D=0$ зн. $a_1\in(-\infty;-6)\cup(-6;+\infty)$

$a_1^2+21a_1+108<9a_1+36+60$

$a_1^2+12a_1+12<0$

$$a_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{144-48}}{2}=-6\pm\sqrt{24}=-6\pm2\sqrt{6}$$

$a_1\in(-6-2\sqrt{6};-6+2\sqrt{6})$

Посмотрим какие знач. подойдут. ($a_1\in\mathbb{Z}$)

$-11<-6-2\sqrt{6}<-10$ $\quad -2<-6+2\sqrt{6}<-1$

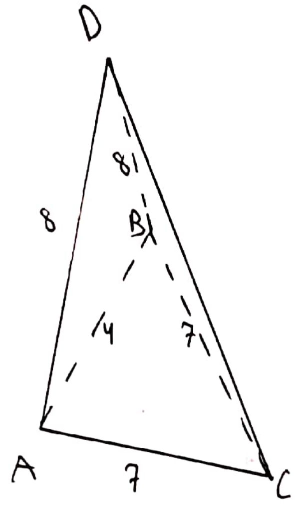
$a_1\in\{-10;-9;-8;-7;-5;-4;-3;-2\}$.

Ответ: $a_1\in\{-10;-9;-8;-7;-5;-4;-3;-2\}$.

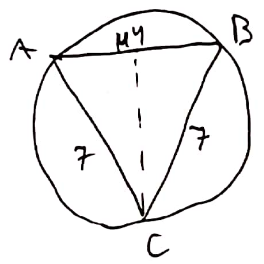
Чистовик

Задача №2.

~~Т.к.~~ $CD \parallel$ бок. пов. ~~тетр.~~ цилиндра и ~~в~~ все верш. на бок. поверхн.



Рассмотрим возможные радиусы



$ABC \parallel$ осн. цилиндра

$CH = \sqrt{49-4} = 3\sqrt{5}$

$S = \frac{7 \cdot 7 \cdot 4}{4r} = \frac{49}{r}$ $\qquad S = \frac{3\sqrt{5} \cdot 4}{2} = 6\sqrt{5}$

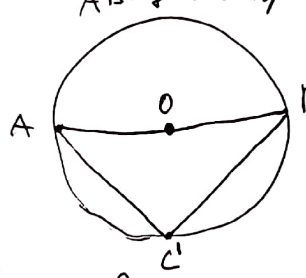
$6\sqrt{5} = \frac{49}{r}$ $\qquad r = \frac{49}{6\sqrt{5}}$ $\qquad 13 < 6\sqrt{5} < 14$

$3 < r < 4$

Рассмотрим случай $ABC \nparallel$ осн. цилинд.

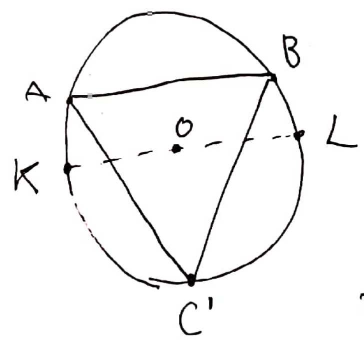
Тогда радиус наименьший, когда AB - диаметр ~~иначе~~ ~~радиус диаметр~~

AB - диаметр



$r = \frac{AB}{2}$

вид сверху



Т.к. диаметр больше ~~или равен любой~~ хорды

то $KL > AB$

зн. $r > \frac{AB}{2}$

$r = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$

В этом случае радиус меньше чем когда $ABC \parallel$ осн. цил.

~~$2 < 3$~~

Чистовик

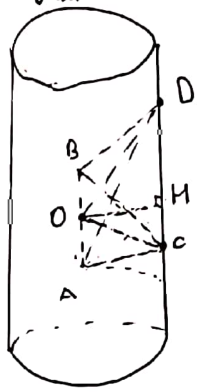
Задача №2 (продолжение)

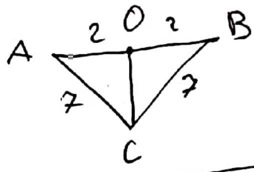
$r=2$ наим. радиус

По неравенству треуг. $CD \in (1;15)$

Посмотрим чему может быть равно CD для min радиуса

1 случай C ниже M



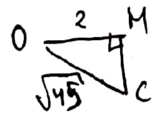


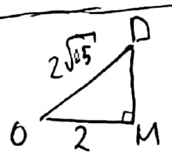
$CO = \sqrt{49-4} = 3\sqrt{5}$

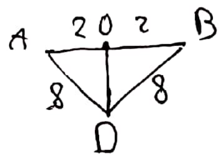
$OM = r_{min}$

$OM \parallel$ оси. цил.

$MC = \sqrt{41}$







$DO = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

$DM = \sqrt{60-4} = \sqrt{56}$

$CD = \sqrt{56} + \sqrt{41}$

$7 < \sqrt{56} < 8$ $\quad$ $6 < \sqrt{41} < 7$

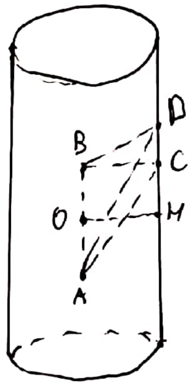
$CD < 15$

~~Ответ: $CD = \sqrt{5}$~~

2 случай C выше M

Тогда $CD = DM - CM = \sqrt{56} - \sqrt{41}$

$CD > 1$



Ответ: $CD = \sqrt{56} + \sqrt{41}$; $CD = \sqrt{56} - \sqrt{41}$.

чистовик

Задача № 3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 10 \\ a^2+b^2 \leq \min(-6a-2b, 10) \end{cases}$$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 10$ круг с ц. $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{10}$

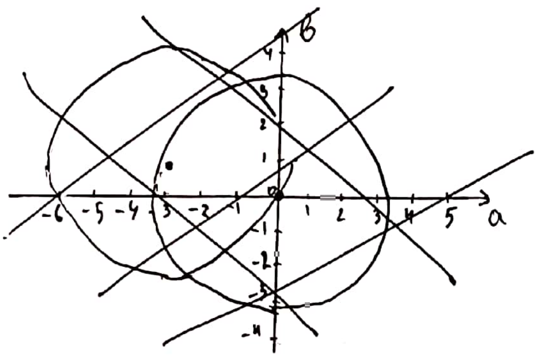
$a^2+b^2 \leq \min(-6a-2b; 10)$

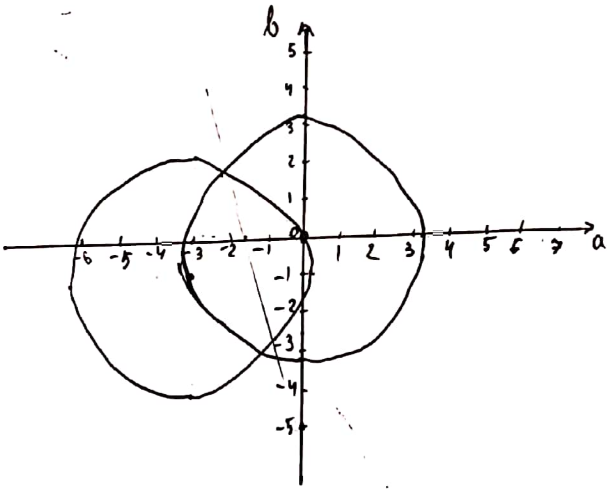
1сл. $a^2+b^2 \leq -6a-2b$

$(a+3)^2-9+(b+1)^2-1 \leq 0$

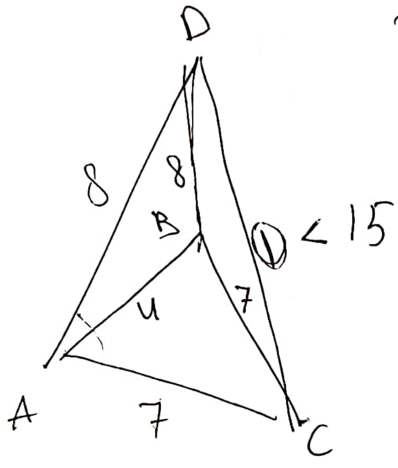
$(a+3)^2+(b+1)^2 \leq 10$

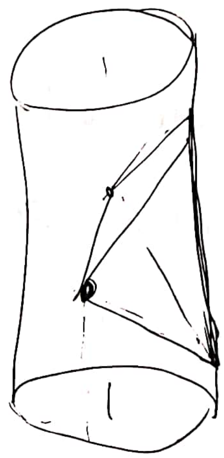
2сл. $a^2+b^2 \leq 10$

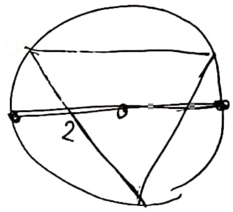




черновик.







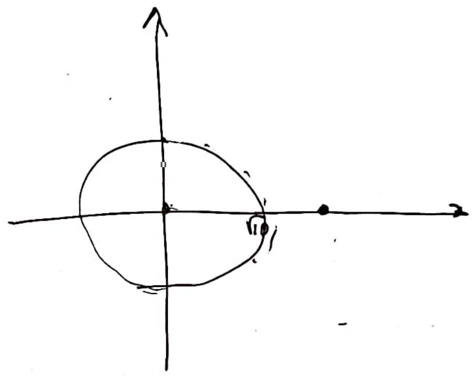
4

49 - 48

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 5 \\ \hline 180 \end{array}$$

$\sqrt{180}$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$



$49 \,|\, 13$; 39; 3

$3\frac{10}{13}$

$49 \,|\, 17$; 42; 3

$a^2+b^2 \le 10$

0 $\sqrt{10}$ $\sqrt{10}$

$a^2+b^2+6a+2b \le 0$ 3

$(a+3)^2-9+(b+1)^2-1 \le 0$

$b=0$ $a=0$

$a=-\frac{10}{6}$ $b=-5$

$d>0$ Черновик

$(a_1+4d)(a_1+17d) > \frac{2a_1+d\cdot(\cancel{9-1})^{8}}{2}\cdot 9$

$\begin{array}{r} ^2\ 17 \\ \times 4 \\ \hline 68 \end{array}$

$a_1^2+21a_1d+68d^2 > 9a_1+36d-4$

$(a_1+9d)(a_1+12d) < 9a_1+36d+60$

$2>-3$

$a_1^2+21a_1d+$

$\begin{array}{r} ^1\ 12 \\ \times 9 \\ \hline 108 \end{array}$

$5>-4$

$10d^2 < 16$ d

$5d^2<8$ $1{,}6$

$d^2 < \frac{8}{5}$

$5 > \sqrt{24}$

2

$-6-4{,}8$

$-10{,}8$ $-6+4{,}8$ $0{,}8-2$

$-2{,}8$

96

$-10{,}8$ $-2{,}8$ $-1{,}2$

$-10\ \ -9\ \ -8\ \ -7\ \ -5\ \ -4\ \ -3\ \ -2$

32

$\begin{array}{r|l} 96 & 4 \\ -8 & 24 \\ \hline 16 & \\ -16 & \\ \hline 0 & \end{array}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103464**

ID профиля: **266677**

Вариант 24

Чистовик

Задача №4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=33 \\ НОК(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$$

Т.к. НОД $=33$, то числа a, b, c делятся на $3\cdot 11$, то есть содержат множит. 3 и 11.

$\exists$ $a=3^{x_1}\cdot 11^{y_1}$ $b=3^{x_2}\cdot 11^{y_2}$ $c=3^{x_3}\cdot 11^{y_3}$

Чтобы выполнялась система должны быть

$x=1$ $x=19$ $y=1$ $y=15$

оставшиеся ~~х и~~ у $x\in[1;19]$ $y\in[1;15]$

Рассмотрим возможные комбин. степеней троек для a, b, c.

	x_1	x_2	x_3
1)	1	19	1;19
2)	1	1;19	19
3)	1;19	1	19
4)	19	1	1;19
5)	1;19	19	1
6)	19	1;19	1

т.к. вместо 1;19 может быть 19 степеней то всего комбинаций

$6\cdot 19=114$ но мы не учли повторы

~~т.к.~~ всего 6 повторов

$114-6=108$ комбин.

Аналогичную таблицу можно составить для степеней 11 и получить

$6\cdot 15-6=84$

	y_1	y_2	y_3
1)	1	15	1;15
2)	1	1;15	15
3)	1;15	1	15
4)	15	1	1;15
5)	15	1;15	1
6)	1;15	15	1

В соответствие каждой тройке x идёт тройка y

Поэтому всего троек $n(a;b;c)=84\cdot 108=9072$

Ответ: 9072.

~~Черновик~~ Чистовик

Задача №5.

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$; $\log_{(x+1)^2}(29-x)$; $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

ОДЗ $x \neq 28$ $x<29$ $x \neq 0$ $x \neq -1$ $x \neq -42$ $x<-1$

$x \geq -49$

$x \in (-49; -42) \cup (-42; -1)$

$\cancel{2}\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \cancel{2}\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)$

$2\cdot\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)+1 = \frac{1}{2}\log_{-x-1}(29-x)$

Пусть $29-x=a$ $\frac{x}{7}+7=b$ $-x-1=c$

$\log_a b = \log_b c$

$2\log_a b + 1 = \frac{1}{2}\log_c a$

$1 = \log_b c \cdot \log_b a$

~~Чистовик~~ Черновик

Задача №4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 33 \\ НОК(a;b;c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \end{cases}$$

Т.к. $НОД(a;b;c) = 33$ то числа a, b, c делятся на $3 \cdot 11$, то есть содержат множители 3 и 11

~~Также~~ чтобы выполнялась система

~~$a = 3^{x_1} \cdot 11^{x_2}$~~ ~~$b = 3^{y_1} \cdot 11^{y_2}$~~ $c = 3^{z_1} \cdot 11^{z_2}$

$a = 3^{x_1} \cdot 11^{y_1}$ $b = 3^{x_2} \cdot 4$

чтобы выполнялась система должны быть

$x = 1$, $x = 19$

$3 \; 3^{19}$ $11 \cdot 11$

$x = 1$ x_2 19

C C_3^2 $3 \cdot 6$ 3

$\cancel{x_1}$ $\cancel{x_2}$ x_3 15 A_n^k

x_1 1 x_2

$x_1 x_2$ x_1

x_1 x_2

x_1

$6 \cdot 19$

$19 \times 6 = 114$

108×84: 432, 864, 9072

3

$6 \cdot 14$

$14 \times 6 = 84$

Черновик.

3^{15}

$x \cdot y$

$3 \cdot 11$	$\underline{x\ y}$	$\underline{x\ y}$	4
3^{y}	11^{x}	x^{y}	y^{x}
3^{y}	x	11^{y}	
		$x\ y$	
11	3		
	$3 \cdot 11$		
	3	11	
		$3 \cdot 11$	
	11	3	
11		3	

y

x

y

b

$b = c^{\log}$

19

Черновик

16 12

a

3 3

3 3

3 · 11 3 · 11 3 · 11

3 · 11

3 11² 3 · 11 3 11 3 · 11²

3

15 19 15 14 14

3 11 3 · 11 · 3 11

11

3

3 · 11

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

11 12 13 14 15 16 17 18 19

19 15

3 · 11 19 3

1 1

3 11 ~~19 · 15~~ 19 · 15 3 3 31

3

9

3 11

3 11

11 3

3 11

3 11

Черновик

$\log_{a} b$ $\quad \log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)$

-48 $\quad 77 \quad \frac{1}{7}$

$29+48$ $\quad \log_a b = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$ $\quad a$

$\log_a b =$ $\quad \log_a^2 b = \log_a c$

$\dfrac{1}{\log_b a} =$ $\quad \log$

$\log_{29-x} \cdot \frac{x}{7}+7$

$\log_b a + \log_b c = 1$ $\quad 6$

$\log_a c$

$\dfrac{2\log_c b}{\log_c a} + 1 = \frac{1}{2} \cdot \log_a$ $\quad a^c \cdot c = \dfrac{1}{a}$ $\quad 2.$ $\quad 2 \quad 3$

$\log_2 4 \cdot \log_2 8 = 6$

$2\log_a b + 1 = \frac{1}{2}\log_c a$ $\quad a^{-1}$ $\quad 8 \quad 32 \quad 32 = 2^x$

$(29-x)(-x-1) = 1$ $\quad x =$

$2\log_a b = -\frac{3}{2}$ $\quad -29x - 29 + x^2 + x = 1$ $\quad 14 \cdot 14 = 56 \quad 14$ $\quad a \quad 32 = 2^x$

$x^2 - 28x - 30 = 0$ $\quad c = 0 \quad a^c = 1$

$x_{1,2} = -14 \pm \sqrt{196+30}$ $\quad -14 \pm \sqrt{226}$ $\quad c =$

$15 >$ $\quad c^a =$

-14

$-14 - \sqrt{226}$

Черновик

$\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$\log_{\underset{a}{\sqrt{29-x}}}(\overset{b}{\tfrac{x}{7}+7}) = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(\overset{c}{-x-1})$

$\log_a b = \log_b c$

$2\log_a b + 1 = \frac{1}{2}\log_c a$

$\log_a b = \log_b c$

$\log_a b - \frac{1}{\log_c b}$

$2\log_a b + 1 = \frac{1}{2}\log_c a$

$\underbrace{\log_b c - \frac{1}{\log_b a}}_{=1} = 0$

$\overset{=0}{\log_{\frac{x}{7}+7}(\cancel{x-1})} - \frac{1}{\log_{\frac{x}{7}+7}(29-x)}$

$\frac{x}{7}+7=-x-1$

$\frac{8}{7}x=-8$

$x=-7$

-49

$\log_{\frac{1}{7}}$

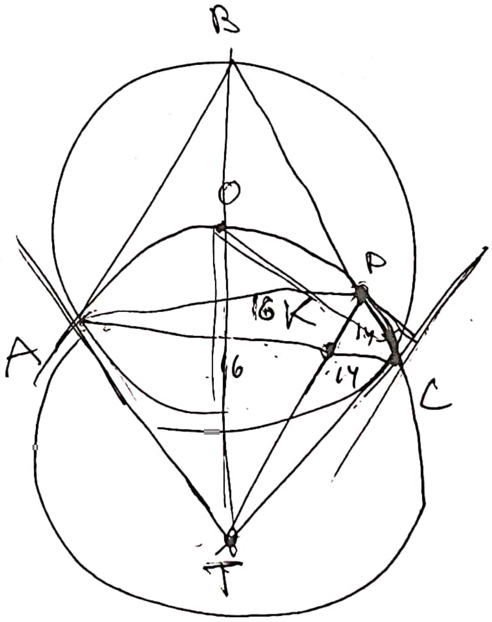
6 36

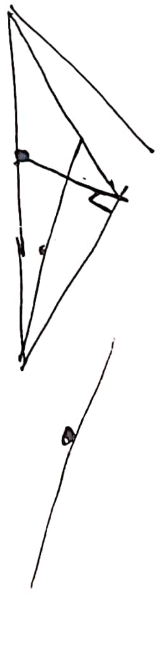
$1-\frac{1}{2}$ 2

-48

$29-x=\frac{x}{7}+7$ $\frac{x}{7}+7=-x-1$

$\frac{x}{7}+7=1$





Черновик

$\underline{3\cdot 11}$ $\quad 6 \quad 3^{19}\cdot 11^{15}$

$a \quad b \quad 8 \quad a \; 3^{x_1}\cdot 11^{x_2} \quad b\; 3^{y_1} 11^{y_2} \quad 3^{z_1}\cdot 11^{z_2}$

2

4

$\frac{x}{7}+7=1 \quad x=-42$

$\frac{x}{7}=-6$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) \qquad \cancel{\frac{x}{7}+7\geq 2} \quad a+\frac{1}{a}\geq 2$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$(29-x)^{\frac{1}{2}} \qquad 2\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\frac{1}{2}\log_{x+1}(29-x)$

$4=\frac{1}{\log_{29-x}(x+1)\cdot\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)}$

$4=\frac{1}{\log_a b\cdot\log_a c} \qquad x=28 \quad x<29$

$\log_a b\cdot\log_a c=\cancel{0{,}25}\ \frac{1}{4}$

$x>-49$

$2^{6}=2^{b}\cdot 2^{2}$

$29-x \qquad a^{b}\cdot a^{c}$

$(x+1)\left(\frac{x}{7}+7\right)=\sqrt[4]{29-x}$

2

$b\cdot c=a^{\frac{1}{4}}$