Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103446**

ID профиля: **874232**

Вариант 24

Чистовик

① Отметим (·) E на прямой CD, основание высот из A и B в $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$. Получается, что высоты падают в одну точку (из равенства $\triangle$-ов ACD и BCD). CD перпендикулярно основанию цилиндра и CD перпендикулярно плоскости AEB $\Rightarrow$ плоскость AEB параллельна основанию цилиндра. $\Rightarrow$ радиус цилиндра $=$-ен радиусу описаной около $AEB = R$

② Так как AB - хорда в этой окружности $\Rightarrow 2R \geq AB \Rightarrow$ минимальный радиус достигается, когда AB - диаметр $\Rightarrow \triangle AEB$ равнобедренный и прямоугольный $\Rightarrow AE = BE = 2\sqrt{2} \Rightarrow CE = \sqrt{7^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{41}$

$$DE = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

③ Первое: $\triangle BCD$ - остроугольный, т.е $E \in CD$ $\Rightarrow CD = \sqrt{41} + 2\sqrt{14}$

Второе: $\triangle BCD$ - тупоугольный, т.е $E \notin CD$ $\Rightarrow CD = 2\sqrt{14} - \sqrt{41}$

Ответ: $2\sqrt{14} \pm \sqrt{41}$

Чистовик

① Пусть разность между числами d, тогда

$a_1+a_2+\ldots+a_9 = S = \frac{a_1+a_1+8d}{2} = 9(a_1+4d)$

② Из условия

$a_5\cdot a_{18} = (a_1+4d)(a_1+17d) > S-4$

$a_{10}\cdot a_{13} = (a_1+9d)(a_1+12d) < S+60$

③ Рассмотрим первое условие

$a_1^2+17a_1d+4a_1d+68d^2 > 9a_1+36d-4$

$a_1^2+21a_1d+68d^2-9a_1-36d+4>0$

$a_1^2+(21d-9)a_1+68d^2-36d+4>0$

Аналогично из второго условия вытекает

$a_1^2+(21d-9)a_1+109d^2-36d-60<0$

$-a_1^2-a_1(21d-9)-109d^2+36d+60>0$

Сложим условие и получим

$64-40d^2>0$

Т.к. d - целое, то $d=1$

④ Подставим в первое уравнение $a_1^2+12a_1+36>0$

$(a_1+6)^2>0$ $a_1\neq 6$

Подставим во второе уравнение

$a_1^2+12a_1+12<0$

$D=144-48=96$

$a_1\in(-6-\sqrt{12}; -6+\sqrt{12})$

⑤ Т.к. a - целое, $3<\sqrt{12}<4$, то $a\in\{~~\ldots~~;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;~~\ldots~~\}$

Ответ ~~…~~, -9, -8; ~~…~~; -7; ~~…~~, -5, -4, -3, ~~…~~; -6

Чистовик

① Второе неравенство:

1) пусть $-6a-2b\geq 10$:

$$a^2+b^2\leq 10$$

это круг с центром в (·) (0; 0) и $R=\sqrt{10}$

2) с учётом условие от круга отрезается небольшой кусок ниже прямой $-6a-2b=10$

3) если $-6a-2b<10$:

$$a^2+b^2\leq -6a-2b$$

$$a^2+6a+9-9+b^2+2b+1-1\leq 0$$

$$(a+3)^2+(b+1)^2\leq 10$$

это тоже круг с центром в точке -3, -1 и радиусом $\sqrt{10}$.

4) с учётом условие от круга отрезается небольшой кусок выше прямой $-6-2b=10$

② Радиусы равны поэтому эти два куска образуют область — пересечение двух окружностей $R=\sqrt{10}$ и с центрами в 0,0 и -3, -1.

③ Это и есть все возможные значения a и b

④ Первое неравенство:

1) круг с центром в a и b и таким же радиусом $\sqrt{10}$. Кроме того у нас есть все возможные центры таких окружностей, тогда, если нарисовать множество окружностей с центрами в этой области, то мы получим все возможные решение первого неравенства

2) Все множество этих окружностей образует эллипс найдем его полуоси a и b расстояние между центрами $=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

3) Малая полуось:

$2b = \sqrt{10} + 2\sqrt{10} = 3\sqrt{10}$ Чистовик

4

4) Большая полуось

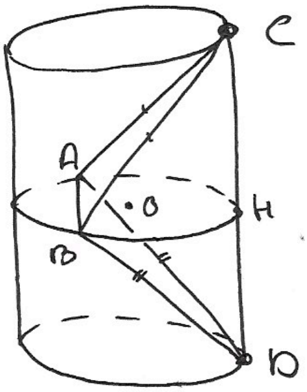
$2a = \sqrt{10}\cdot\sqrt{3} + 2\sqrt{10} = \sqrt{10}(2+\sqrt{3}) \Rightarrow a = \frac{\sqrt{10}(2+\sqrt{3})}{2}$

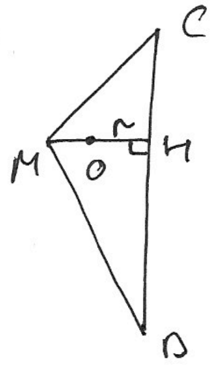
$b = \frac{\sqrt{10}}{2}$

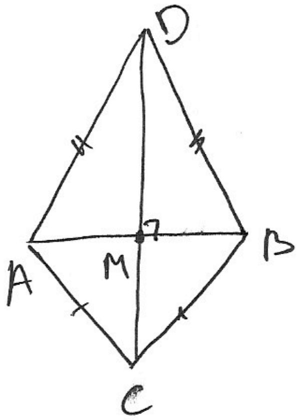
5) Тогда площадь полученного эллипса =

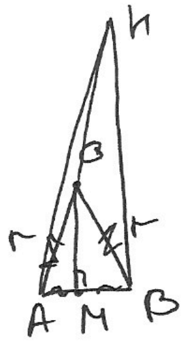
Ответ

Черновик









$\Downarrow$

$OM = \sqrt{r^2-4}$

$\Downarrow$

$CD = \sqrt{45 - MH^2} + \sqrt{60 - MH^2}$

$MH = OM + r$

$CD = \sqrt{45 - OM^2 - 2OMr + r^2} + \sqrt{60 - OM^2 - 2OMr - r^2}$

$CD = \sqrt{45 - r^2 + 4 - 2r\sqrt{r^2-4} - r^2} + \sqrt{60 - r^2 + 4 - 2\sqrt{r^2-4}\,r - r^2}$

$$\begin{cases} CD = \sqrt{49 - 2r^2 - 2r\sqrt{r^2-4}} + \sqrt{64 - 2r^2 - 2r\sqrt{r^2-4}} \\ CD = \sqrt{CH^2+15} + CH \end{cases}$$

$\Uparrow$

$r = \sqrt{\sqrt{49 - CH^2} - 4} = \sqrt{\sqrt{64 - HD^2} - 4}$

$CH = \sqrt{45 - (r^2 + 4 + r)^2}$

$CD = 45 - (r^2 + r - 4)^2 + \sqrt{45 - (r^2 \ldots}$

$49 - CH^2 = 64 - HD^2$

$HD^2 - CH^2 = 15$

$(HD - CH)(HD + CH) = 15$

$CD(CD - CH - CH) = 15$

$CD^2 - (2CH)CD - 15 = 0$

$CD_{12} = \dfrac{2CH \pm \sqrt{4CH^2 + 60}}{2}$

$CD_{12} = CH \pm \sqrt{CH^2+15}$

$CD = CH + \sqrt{CH^2+15}$

$\sqrt{49 - 2r^2 - 2r\sqrt{r^2-4}} + \sqrt{64 - 2r^2 - 2r\sqrt{r^2-4}} = \sqrt{45 - (r^2 + r - 4)^2 + 15} + \sqrt{45 - (r^2 \ldots)^2}$

$\sqrt{49 - 2r(r + \sqrt{r^2-4})} + \sqrt{64 - 2r(r + \sqrt{r^2-4})} = \sqrt{60 - r^4 + r^3 - 4r^2 + r^3 + r^2 - 4r - 4r^2 - 4r + 16}$

$+ \ldots$

$\sqrt{\cancel{20} - r^4 + 2r^3 - 7r^2 - 8r} + \sqrt{45 - r^4 + 2r^3 - 7r^2 - 8r} =$ Иррациональн

$=$

$49 - 2r^2 - 2r\sqrt{r^2-4} = 0$

$-2r^2 - (2\sqrt{r^2-4})r + 49 = 0$

$r_{12} = \dfrac{2\sqrt{r^2-4} \pm \sqrt{4(r^2-4) + 8\cdot 49}}{-4}$

$\dfrac{\pm\sqrt{r^2-4+98}}{2} - \dfrac{\sqrt{r^2-4}}{2}$

$[-10; -2]$

-10

$\overbrace{9a_1 + (d_1 + 2d_1 + 3d_1 + 4d_1 + 5d_1 + 6d_1 + 7d_1 + 8d_1)}$ 3 6 10 15 21 28 36

$S = \boxed{9a_1 + 36d}$

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$$\begin{cases} (a_1 + 4d)(a_1 + 17d) > 9a_1 + 36d - 4 \\ (a_1 + 9d)(a_1 + 12d) < 9a_1 + 36d + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17da_1 + 4da_1 + 68d^2 > 9a_1 + 36d - 4 \\ a_1^2 + 12da_1 + 9da_1 + 108d^2 < 9a_1 + 36d + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 21da + 68d^2 - 9a - 36d + 4 > 0 \\ a^2 + 21da + 108d^2 - 9a - 36d - 60 < 0 \end{cases}$$

$\cancel{108}\ 40d^2 - 64 < 0$

$40d^2 < 64$

$d^2 < \dfrac{32}{20}$

$d^2 < \dfrac{16}{10}$

$\boxed{d^2 < \dfrac{8}{5}}$

Черновик

$S = \frac{a_1 + a_n}{n}$ $\quad a_n = a_1 + dn$

$a_1 \quad a_1 + d \quad a_1 + 2d \quad a_1 + 3d$

$3a_1 + 3d \qquad na_1 + nd$

$n(a_1 + d)$

$\frac{a_1 + a_1 + 2d}{3} \qquad 2a_1 + 2d_1$

$4a_1 + 6d_1$

$\frac{2a_1 + d(n-1)}{2}$

$\sqrt{\sqrt{49 - CH^2} - 4} = \sqrt{\sqrt{64 - HD^2} - 4}$

$\sqrt{49 - CH^2} - 4 = \sqrt{64 - HD^2} - 4$

$49 - CH^2 = 64 - HD^2$

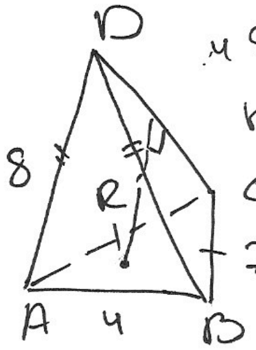
$HD^2 - CH^2 = 15$

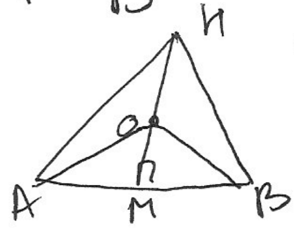
$(HD - CH)(HD + CH) = 15$

$C(HD - CH)$

$CD(HD - CH) = 15$

$r = \sqrt{\sqrt{49 - CH^2} - 4}$

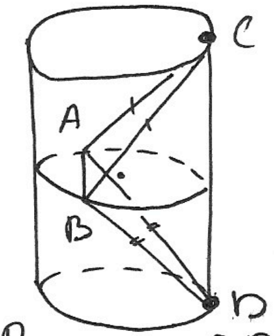




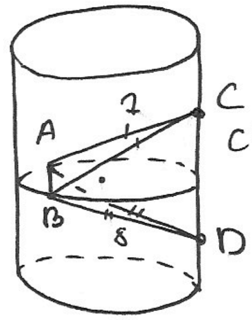
$\sqrt{49 - CH^2}$

$CD(CD - CH - CH) = 15$

$CD^2 - 2CHCD = 15$



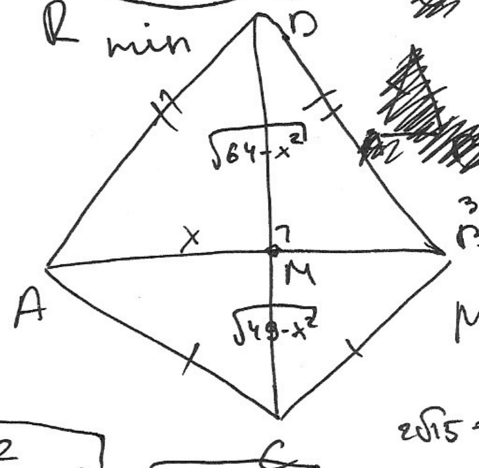
4



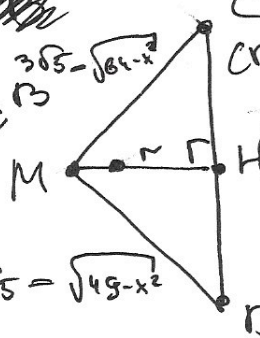
$CD^2 - 2CH \cdot CD - 15 = 0$

$CD_{12} = \frac{-2CH \pm \sqrt{4CH^2 + 60}}{2}$

R min



$3\sqrt{5} = \sqrt{64 - x^2}$



$CD = \pm\sqrt{CH^2 + 15} - CH$

$HD = \sqrt{C}$

$2\sqrt{15} = \sqrt{49 - x^2}$

$CH = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - MH^2} + \sqrt{(2\sqrt{15})^2 - MH^2}$

$CH = \sqrt{45 - MH^2} + \sqrt{60 - MH^2}$

т.к. $x = 2$

$\sqrt{49 - x^2} = \sqrt{49 - 4} = 3\sqrt{5}$

$\sqrt{64 - x^2} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103446**

ID профиля: **874232**

Вариант 24

Чистовик вариант 24

№4

① Пусть $a = 3^{\alpha_1} \cdot 11^{\alpha_2}$

$b = 3^{\beta_1} \cdot 11^{\beta_2}$

$c = 3^{\gamma_1} \cdot 11^{\gamma_2}$, тогда из условие на НОД равносильно $\min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 1$

$\min(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 1$

а условие на НОК $\max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 19$

$\max(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 15$

② Рассмотрим, как можно распределить степени 3:

1) пусть все степени различны, тогда у нас есть $3 \cdot 2 \cdot 17$ вариантов, выбрать степень равную 1, выбрать степень равную 19 и оставшуюся в промежутке между 1 и 19

2) пусть какие-то степень повторяется, таких вариантов всего $2 \cdot 3$, т.к выберем повторяющиеся степени, затем место в котором ее нет.

Всего получается $6 \cdot 18$ вариантов.

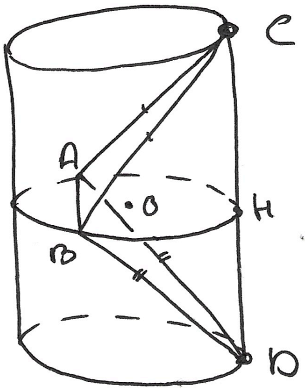
③ Аналогично распределений степеней для цифры 3: $6 \cdot 14$

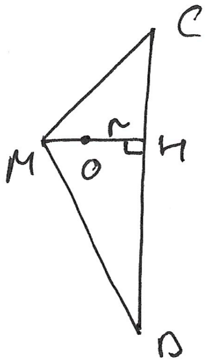
④ Значит всего вариантов $6 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 18 = 9072$

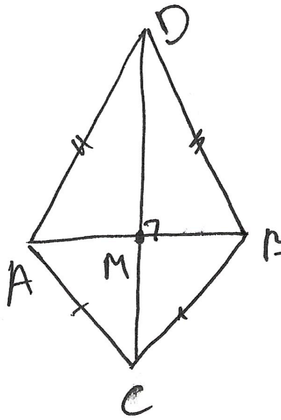
Ответ 9072

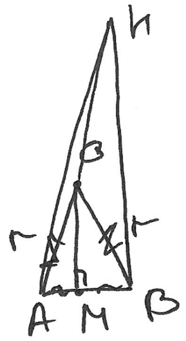
21103446 (U874232 M1295138)

Черновик









$$OM = \sqrt{r^2 - 4}$$

$$CD = \sqrt{45 - MH^2} + \sqrt{60 - MH^2}$$

$$MH = OM + r$$

$$CD = \sqrt{45 - OM^2 - 2OMr - r^2} + \sqrt{60 - OM^2 - 2OMr - r^2}$$

$$CD = \sqrt{45 - r^2 + 4 - 2r\sqrt{r^2-4} - r^2} + \sqrt{60 - r^2 + 4 - 2\sqrt{r^2-4}\,r - r^2}$$

$$\begin{cases} CD = \sqrt{49 - 2r^2 - 2r\sqrt{r^2-4}} + \sqrt{64 - 2r^2 - 2r\sqrt{r^2-4}} \\ CD = \sqrt{CH^2+15} + CH \end{cases}$$

$$r = \sqrt{\sqrt{49 - CH^2} - 4} = \sqrt{\sqrt{64 - HD^2} - 4}$$

$$CH = \sqrt{45 - (r^2 - 4 + r)^2}$$

$$CD = 45 - (r^2 + r - 4)^2 + \sqrt{45 - (r^2 \ldots}$$

$$49 - CH^2 = 64 - HD^2$$

$$HD^2 - CH^2 = 15$$

$$(HD - CH)(HD + CH) = 15$$

$$CD(CD - CH - CH) = 15$$

$$CD^2 - (2CH)CD - 15 = 0$$

$$CD_{12} = \frac{2CH \pm \sqrt{4CH^2 + 60}}{2}$$

$$CD_{12} = CH \pm \sqrt{CH^2 + 15}$$

$$CD = CH + \sqrt{CH^2 + 15}$$

$$\sqrt{49 - 2r^2 - 2r\sqrt{r^2-4}} + \sqrt{64 - 2r^2 - 2r\sqrt{r^2-4}} = \sqrt{45 - (r^2 + r - 4)^2 + 15} + \sqrt{45 - (r^2 - 4 + r)^2}$$

$$\sqrt{49 - 2r(r + \sqrt{r^2-4})} + \sqrt{64 - 2r(r + \sqrt{r^2-4})} = \sqrt{60 - r^4 + r^3 - 4r^2 + r^3 + r^2 - 4r - 4r^2 - 4r + 16}$$

$$+ \ldots$$

$\sqrt{\cancel{28}-r^4+2r^3-7r^2-8r}+\sqrt{45-r^4+2r^3-7r^2-8r}=$ Черновик

$=$

$49-2r^2-2r\sqrt{r^2-4}=0$

$-2r^2-(2\sqrt{r^2-4})r+49=0$

$r_{12}=\frac{2\sqrt{r^2-4}\pm\sqrt{4(r^2-4)+8\cdot 49}}{-4}$

$\frac{\pm\sqrt{r^2-4+98}}{2}-\frac{\sqrt{r^2-4}}{2}$

$[-10;-2]$

-10

$9a_1+(d_1+\overset{3}{2d_1}+\overset{6}{3d_1}+\overset{10}{4d_1}+\overset{15}{5d_1}+\overset{21}{6d_1}+\overset{28}{7d_1}+\overset{36}{8d_1})$

$S=\boxed{9a_1+36d}$ $\qquad a_n=a_1+d(n-1)$

$\begin{cases}(a_1+4d)(a_1+17d)>9a_1+36d-4\\(a_1+9d)(a_1+12d)<9a_1+36d+60\end{cases}$

$\begin{cases}a_1^2+17da_1+4da_1+68d^2>9a_1+36d-4\\a_1^2+12da_1+9da_1+108d^2<9a_1+36d+60\end{cases}$

$\begin{cases}a^2+21da+68d^2-9a-36d+4>0\\a^2+21da+108d^2-9a-36d-60<0\end{cases}$

$\cancel{108}\ 40d^2-64<0$

$40d^2<64$

$d^2<\frac{32}{20}$

$d^2<\frac{16}{10}$

$\boxed{d^2<\frac{8}{5}}$

Черновик