Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103261**

ID профиля: **144833**

Вариант 24

Чистовик.
Вариант 24.

Задача №1.

1) Пусть b – разность прогрессии $\Rightarrow$ $a_2 = a_1 + b$; ... $a_9 = a_1 + 8b$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $S = 9a_1 + 36b$ $\to$ $\underset{\overset{\parallel}{a_5}}{a_1 + 4b} = \frac{S}{9}$ $\Rightarrow$ $a_5 = \frac{S}{9}$.

2) $a_{18} = a_1 + 17b = \frac{S}{9} + 13b$; $a_{10} = a_1 + 9b = \frac{S}{9} + 5b$;

$a_{13} = a_1 + 12b = \frac{S}{9} + 8b$

3) $\begin{cases} a_5 a_{18} > S - 4 \\ a_{10} a_{13} < S + 60 \end{cases} \overset{\text{п.1и2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{S}{9}\left(\frac{S}{9} + 13b\right) > S - 4 \\ \left(\frac{S}{9} + 5b\right)\left(\frac{S}{9} + 8b\right) < S + 60 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{S^2}{81} + \frac{13}{9}Sb > S - 4 \\ \frac{S^2}{81} + \frac{13}{9}Sb + 40b < S + 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{S^2}{81} + \frac{13}{9}Sb > S - 4 \\ \frac{S^2}{81} + \frac{13}{9}Sb < S + 60 - 40b \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $S - 4 < S + 60 - 40b$

$-64 < -40b$

$8 > 5b \Rightarrow \boxed{b < \frac{8}{5}}$ т.к. по усл. $\Rightarrow$ $\boxed{b = 1}$
прогрессия возрастающая и состоит из целых чисел $\Rightarrow b \in \mathbb{Z}$ $b > 0$

4) Т.к. по п. 3 $b = 1$ $\Rightarrow$ $S = 9a_1 + 36$

$\begin{cases} (a_1+4)(a_1+17) > 9a_1 + 36 - 4 \\ (a_1+9)(a_1+12) < 9a_1 + 36 + 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + 32 \\ a_1^2 + 21a_1 + 108 < 9a_1 + 96 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \end{cases} \to \begin{cases} (a_1+6)^2 > 0 \\ (a_1 + 6 - \sqrt{24})(a_1 + 6 + \sqrt{24}) < 0 \end{cases} \to$

$\to a_1 \in (\underset{-11}{-6-\sqrt{24}}; \underset{-1}{-6+\sqrt{24}}) \setminus \{-6\} \underset{a_1 \in \mathbb{Z}}{\overset{\text{т.к.}}{\Rightarrow}} a_1 \in \{-10; -9; \ldots -7; -5; \ldots; -2\}$

$a_1 \in [-10; -6) \cup (-6; -2]$

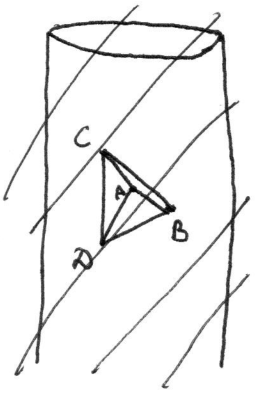
$a_1 \in \mathbb{Z}$.

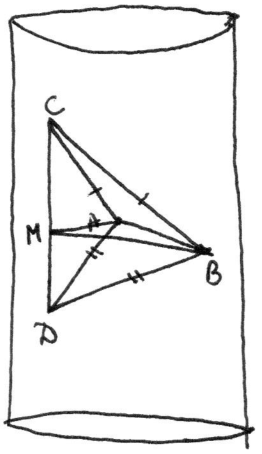
Ответ: $a_1 \in \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2; -1\}$

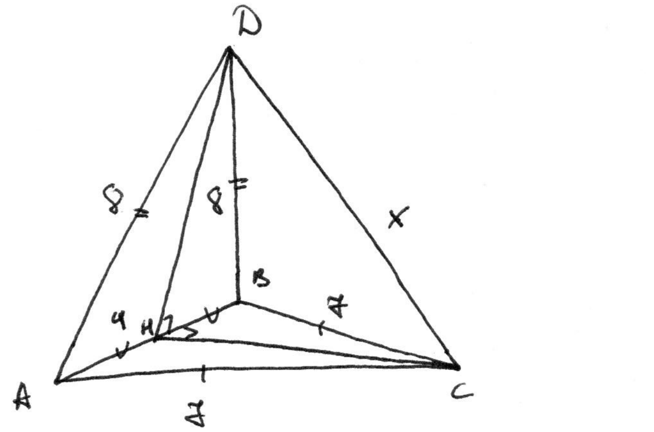
1

Задача №2.

Чистовик.
Вариант 24



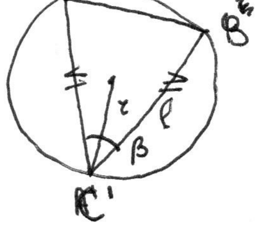




1) Т.к. все вершины ABCD лежат на боковой поверхности тетраэдра и CD пар-на оси цилиндра $\Rightarrow$ CD содержит одна из образующих цилиндра

2) Т.к. AB – общее основание р/б $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$ $\Rightarrow$ их высоты ~~в~~ пересекаются в одной точке H. Т.к. $AB \perp HD$ и $AB \perp HC \Rightarrow$ $\Rightarrow AB \perp (DHC) \Rightarrow AB \perp C_1D_1 \Rightarrow$ т.к. CD пар-на оси цилиндра, то
(одна из пр. пар-ных CD, которая пересекается с AB)
AB пар-на плоскостям, содержащим основания цилиндра.

3) Спроектируем на основание цилиндра тетраэдр ABCD



— проекция

4) Опустим в $\triangle ACD$ и CBD высоты AM и BM соответственно на сторону CD (т.к. CD – общая, а $\triangle ACD = \triangle CBD$ по трём сторонам).
то высоты придут в одну точку
Т.к. $MA \perp CD$ и $MB \perp CD \Rightarrow CD \perp (AMB) \Rightarrow AMB \parallel$ пл-ти основания цилиндра $\Rightarrow AC' = BC' = MA = MB \overset{\text{пусть}}{=} l$.
(равны как высоты ко одной ст.)

5) Тогда по Т cos: $\triangle ABC'$

$$16 = 2l^2 - 2l^2 \cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{l^2-8}{l^2} \Rightarrow \sin\beta = \frac{4\sqrt{l^2-4}}{l^2}$$

2

Чистовик
Вариант 24

Задача №2.

б) По Т sin $\triangle ABC'$:

$2r = \frac{4}{\sin\beta}$, где r - радиус цилиндра

$$r = \frac{2}{\sin\beta} = \frac{2l^2}{4\sqrt{l^2-4}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2-4}} = \frac{\sqrt{l^2-4}}{2} + \frac{2}{\sqrt{l^2-4}}$$

$$r' = \left(\frac{\sqrt{l^2-4}}{2} + \frac{2}{\sqrt{l^2-4}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{2l}{2\sqrt{l^2-4}} + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2l}{(l^2-4)\sqrt{l^2-4}} =$$

$$= \frac{l}{2\sqrt{l^2-4}} - \frac{4l}{2(l^2-4)\sqrt{l^2-4}} = \frac{l}{2\sqrt{l^2-4}}\left(1 - \frac{4}{l^2-4}\right) = \frac{l(l^2-8)}{2\sqrt{l^2-4}\,(l^2-4)}$$

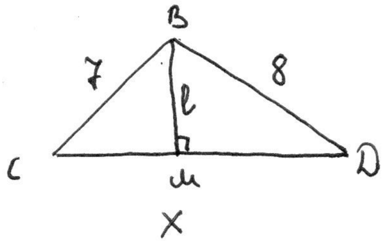
$r' = 0$

$\cancel{l = 0}$ $\vee$ $l^2 = 8 \Rightarrow l = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. (функция производной перешла от убывания к возрастанию $\Rightarrow l = \sqrt{8}$ - min)

т.к. $l > 0$

$\Rightarrow r$ - минимален при $l = 2\sqrt{2}$.

7) Рассмотрим $\triangle BCD$.



$BM = l = 2\sqrt{2} \Rightarrow$ по Т Пифагора

$MD = \sqrt{64-8} = \sqrt{56}$

$CM = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow CD = CM + MD = \sqrt{56} + \sqrt{41} = 2\sqrt{14} + \sqrt{41}$

Ответ: $CD = 2\sqrt{14} + \sqrt{41}$

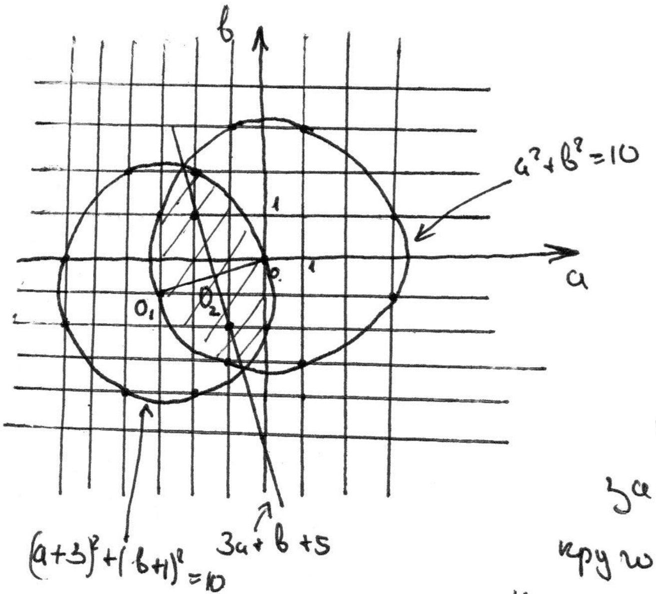
Чистовик.
Вариант 24

Задача № 3.

1) $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b;\ 10) \quad (2) \end{cases}$ → фигура M - объединения мн-ва кругов с центром $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{10}$

2) Рассмотрим нер-во (2):

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le -6a-2b \\ -6a-2b \le 10 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 10 \\ 10 \le -6a-2b \end{cases} \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a+3)^2+(b+1)^2 \le 10 \\ 3a+b+5 \ge 0 \end{cases} \quad (3) \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 10 \\ 3a+b+5 \le 0 \end{cases} \quad (4) \end{array}\right.$$



Решением совокупности (3) и (4) является изображённая на ~~рис~~ рисунке фигура — это мн-во значений $(a;b)$.

3) Также если на данном рисунке переобозначить оси $b \to y$, а $a \to x$, то заштрихованная область - мн-во центров кругов $(x-a)^2+(y-b)^2=10$ площадь совокупности которых мы ищем.

4) Искомая фигура - круг с центром в т. O_2 - середина OO_1 и радиусом $R = O_1O_2 + \sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{2} + \sqrt{10} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$ =>

=> площадь M $S = \pi \cdot R^2 = \pi \frac{9}{4} \cdot 10\pi = \frac{45}{2}\pi = 22,5\pi$

Ответ: $S_M = 22,5\pi$.

4

Черновик.

S – сумма 9 первых

$a_1;\ a_2;\ a_3 \ldots$

$\boxed{a_5 a_{18} > S-4}$

$\boxed{a_{10} a_{13} < S+60}$

$a_1;\ a_1+b;\ a_1+2b;\ \ldots\ a_1+8b.$

$S = 9a_1 + b(1+\ldots+8) = 9a_1 + b\cdot 36 =$

$= \underline{9a_1 + 36b} = 9(a_1+4b) = 9a_5$

$a_5 = a_1 + 4b = \frac{S}{9}$

$a_{18} = a_1 + 17b = \frac{S}{9} + 13b$

$a_5 a_{18}$

$\frac{S}{9}(a_1+17b) > S-4$

$\frac{S^2}{81} + \frac{13}{9}Sb > S-4$

$\underbrace{(a_1+9b)}\,\underbrace{(a_1+12b)} < S+60$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1b + 108b^2 < S+60 \\ Sa_1 + 17Sb > 9S - 36 \end{cases}$$

$a_1;\ a_1+1$

$\left(\frac{S}{9}+5b\right)\left(\frac{S}{9}+8b\right) < S+60$

$S = 9a_1 + 36$

$\frac{S^2}{81} + \frac{13}{9}Sb + 40b^2 < S+60$

$\boxed{a_1 = \frac{S}{9} - 4}$

$40b^2 + \frac{13}{9}Sb + \frac{S^2}{81} - S - 60 < 0$

$(a_1+4)(a_1+17) > 9a_1 + 32$

$\frac{S^2}{81} + \frac{13}{9}Sb < S + 60 - 40b^2$

$(a_1+9)(a_1+12) < 9a_1 + 96$

$S - 4 < S + 60 - 40b^2$

$-1 \ldots 7$

$a_5 = 3$

$S = 27$

$a_{18} = 16$

$a_{10} = 8$

$a_{13} = 11$

27 $a_5 = 3$ $a_{18} = 16$ $a_{10} = 8$ $a_{13} = 11$

$64 > 40b$

$16 > 10b$

$8 > 5b \to$

$b < \frac{8}{5} = 1{,}6 \Rightarrow \boxed{b = 1}$

$-1 \ldots 7$

> 23

$88 < 87$

$-10\quad -9 \ldots -2\quad 88$

$a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0$

$(a_1+6)^2 > 0$

$a \neq -6$

-54

$a_5 = -6$

$a_{18} = 7$

$a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$

$(-11;\ -1)$

$-42 > -58$

$a_{10} = -1$

$30 > 14$

$D_1 = 36 - 12 = 24$

$-2 < 6$

$a_{13} = 2$

$70 < 78$

$a_1 = -6 + 2\sqrt{6} \approx -1$

$a_1 = \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{1}$

$a_1 = -6 - 2\sqrt{6} \approx -11$

$-2 \ldots 6$

$a_5 = 2$

$S = 18$

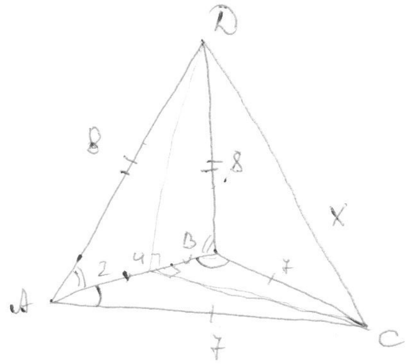
$a_{18} = 15$

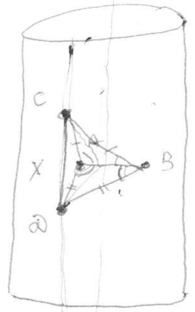
$\boxed{a \in [-10;\ -2],\ a \in \mathbb{Z}}$

$a_{10} = 7$

$a_{13} = 10$

Черновик.

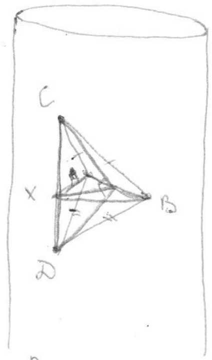


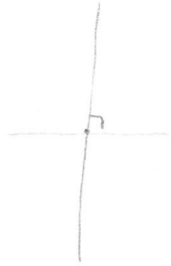


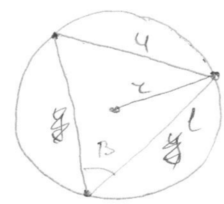
$\sqrt{49-4}=\sqrt{45}=3\sqrt5$

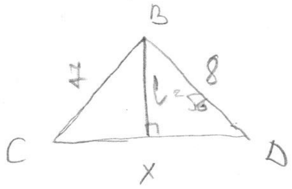
$\sqrt{64-4}=\sqrt{60}=\sqrt{5\cdot12}=2\sqrt{15}$

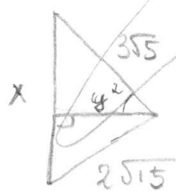
$x=?$











$\cos\alpha=\frac{y}{3\sqrt5}$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{y^2}{45}}$

$l=$

$\sqrt6$

$\sqrt{64-6}=\sqrt{58}$

$\sqrt{49-6}=\sqrt{43}$

$\boxed{x=\sqrt{58}+\sqrt{43}}$

$16=2l^2-2l^2\cos\beta$

$2r=\frac{4}{\sin\beta}$

$\frac{-8+l^2}{l^2}=\cos\beta$

$r\sin\beta=2$

$\sin\beta=\sqrt{1-\frac{(l^2-8)^2}{l^4}}=\frac{\sqrt{16l^2-64}}{l^2}=\frac{4\sqrt{l^2-4}}{l^2}$

$r\cdot\cancel{4}^{2}\sqrt{l^2-4}=2l^2$

$\frac{2l}{\sqrt{l^2-4}}$

$4r^2(l^2-4)=l^4$

$2\le l$

$r^2=\frac{l^4}{4(l^2-4)}\Rightarrow\boxed{r=\frac{l^2}{2\sqrt{l^2-4}}}=\frac{\sqrt{l^2-4}}{2}+\frac{2}{\sqrt{l^2-4}}$

$\frac{l}{\sqrt{l^2-4}}-2\frac{4l}{(l^2-4)\sqrt{l^2-4}}=0$

$\frac{l^2-4+4}{2\sqrt{l^2-4}}=\frac{\sqrt{l^2-4}}{2}+\frac{2}{\sqrt{l^2-4}}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{l^2-4}}\right)'=\left((l^2-4)^{-\frac12}\right)'=$

$l=0$ $\quad l\ne\pm2$ $\quad 1-\frac{2}{l^2-4}=0$

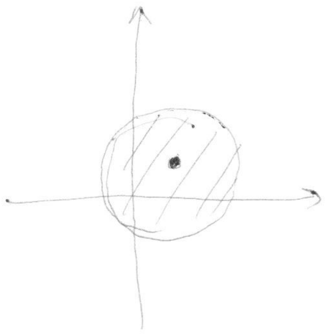
$\frac{l^2-4-2}{l^2-4}=0$

$l^2-6=0$

$\boxed{l=\sqrt6}$

Черновик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b;\ 10) \end{cases}$$



$1+x$ $\cancel{x^2+y^2 \le 1}$

$\sqrt{10}$

$$\begin{cases} -6a-2b \le 10 \\ a^2+b^2 \le -6a-2b \end{cases}$$

$3a+b \ge -5$

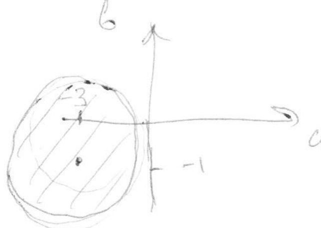
$(a+3)^2-9+(b+1)^2-1 \le 0$

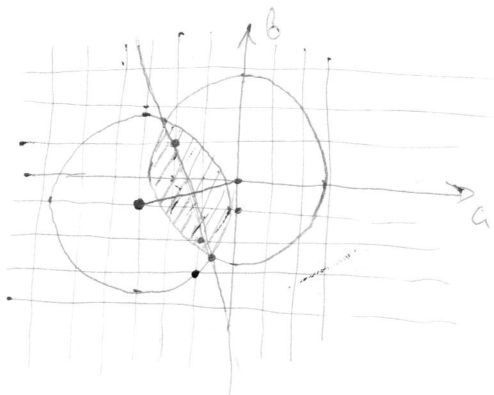
$3a+b+5 \ge 0$

$(a+3)^2+(b+1)^2 \le 10$

$a=-2 \quad b=+1$

$a=-1 \quad b=-2$





$$\begin{cases} -6a-2b > 10 \\ a^2+b^2 \le 10 \end{cases}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103261**

ID профиля: **144833**

Вариант 24

Черновик.

натур. (a, b, c) (1)

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 33 \\ НОК(a;b;c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \end{cases}$$

1 2 3

НОД : 1

НОК : 6.

$\underbrace{abc} = \underbrace{3^{20} \cdot 11^{16}}$

$\underbrace{3^{a_1}} \cdot 11^{a_2} \cdot \underbrace{3^{b_1}} \cdot 11^{b_2} \cdot \underbrace{3^{c_1}} \cdot 11^{c_2} = 3^{20} \cdot 11^{16}$

$a_1 ; b_1 ; c_1$

$a_1 + b_1 + c_1 = 20$

$a_1 \in [1; 19]$ $b_1 \in [1; 19]$ $c_1 \in [1; 19]$ $(15 \cdot 20)^3$

(3) (11) 19 19 19.

$3^{19} \cdot 11^{15}$ a_1 $\boxed{19}$ $[1; 15]$

19

18

$19 - a_1$ $19 - a_1$

18 : 1

17 : 2

16 : 3

⋮

1 : 18

$\frac{18 \cdot 19}{2} = 9 \cdot 19 = \underline{171}$ - для степеней троек.

$\frac{14 \cdot 15}{2} = 7 \cdot 15 = 70 + 35 = \underline{105}$ для степеней 11.

$171 \cdot 105 =$

$$\begin{array}{r} 171 \\ \times\ 105 \\ \hline 855 \\ +\ 171 \\ \hline 17955 \end{array}$$

Ответ: 17955.

(19)

3^{19} 3 11 1

3^1 11^{15}

3^{19}

4

32

2

4 8 2

2 16

8

19·6

15·6

18

17·2

18·2

34 + 36 = 70

26 + 28 = 54

(2) $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(29-x)$, $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

$a = \sqrt{29-x}$ $b = \frac{x}{7}+7$ $c = (-x-1)$

$\log_a b$, $\frac{1}{2}\log_c a$, $2\log_b c$ два равны 3-ье больше на 1.

$\log_a b = \frac{1}{2}\log_c a = 2\log_b c - 1$

$\log_a b = 2\log_b c = \frac{1}{2}\log_c a - 1$

$2\log_b c = \frac{1}{2}\log_c a = \log_a b - 1$

3^1 3^1 3^{19}

$\underline{19; 1; 0}$

3^0 3^1 3^{19}

3^0 3^1

Черновик.

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right),\ \log_{(x+1)^2}(29-x),\ \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1).$

$a = 29-x \quad b = \frac{x}{7}+7 \quad c = -x-1.$

$2\log_a b,\ \frac{1}{2}\log_c a,\ 2\log_b c$

$\log_a b = \log_b c$

ОДЗ:

$-x-1>0$

$-1>x$

$x>-49$

$29>x$

$x\in(-49;-1)$

$x \neq -42$

$\cancel{x \neq -49}$

$x \neq 0$, -2

$x \neq 28$

$x\in(-49;-1)\setminus\{-42;0;-2\}$

$$\begin{cases}\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)\\ \log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \frac{1}{2}\log_{-x-1}(29-x)-1\end{cases}$$

$$\frac{1}{\log_{\frac{x}{7}+7}(29-x)} = \log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)$$

$\cancel{1\ 2\ \log_{\frac{x}{7}+7}\ (-x-1)\ 2\ \log}$

$$2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)+2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1) = \cancel{\tfrac{x}{7}}\log_{-x-1}(29-x)-2$$

$\cancel{4\log_{29-x}\left(\tfrac{x}{7}\right.}\quad \cancel{4\log_a b\cdot\log_b a = 4\log_7\left(\tfrac{1}{2}\log_b c - 1\right)^2}$

$\cancel{\tfrac{x}{7}\log_a b\ b}$

$$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) - \log_{(x+1)^2}(29-x) = 0 \quad 1+\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{\sqrt{}}$$

$2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)\ \log_{(29-x)}(x+1)^{4} = \log 1$

$\cancel{2\log_{29-x}}\quad 4\log_{(29-x}(-x+1)$

$\left(\frac{x}{7}+7\right) \qquad = 29-x$

$\cancel{\left(\tfrac{x}{7}+7\right)}^{1+\log_{(x+1)^2}29-x} =$

$$1+\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$$

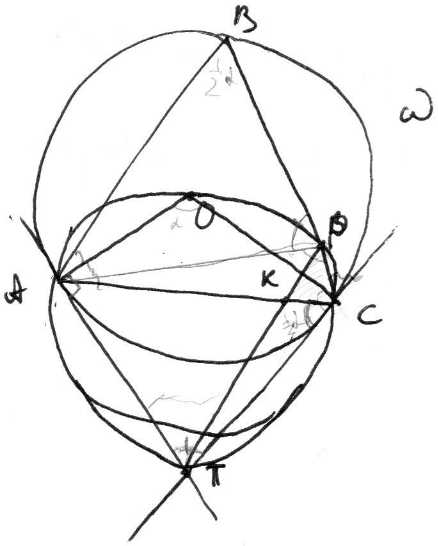
$$1+\frac{1}{\log_{\frac{x}{7}+7}\sqrt{29-x}} = 2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)$$

$t\ 2\ 2$

$$\log_{\frac{x}{7}+7}(29-x)\ \log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1) = \log_{\frac{x}{7}+7}\left(\frac{x}{7}+7\right)$$

Черновик.

(6)



$S(\triangle APK) = 16$

$S(\triangle CPK) = 14$

$S_\triangle ABC = ?$

$\frac{1}{2} AP \cdot PC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} PC \cdot AC \cdot \sin\beta = 16$

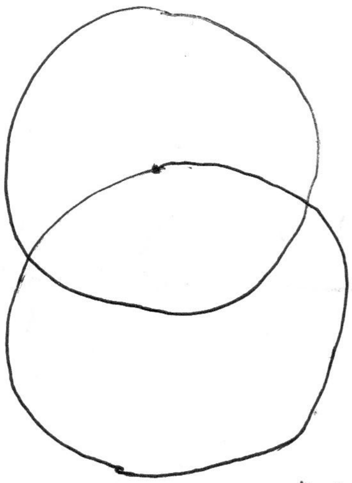
$\frac{1}{2} PC \cdot KC \sin\beta = 14$

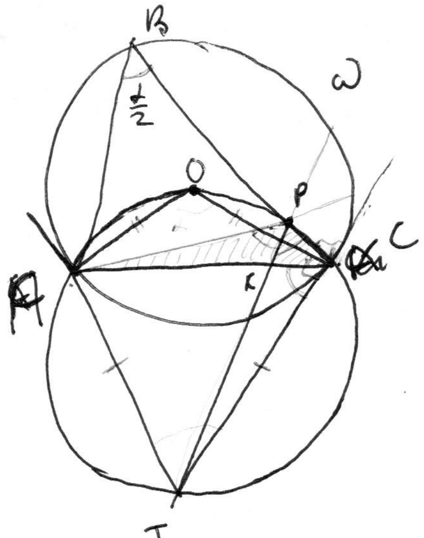
$\frac{1}{2} BC \cdot AC \sin\beta$

$\frac{16 \, BC}{PC} = ?$

$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$

$180° - \alpha$





$\frac{AC}{KC} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$

~~$\angle ABC =$~~

$\frac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2R_1$

$\triangle KPC \sim \triangle ABC \Rightarrow$

$\frac{R}{R_1} = 2\cos\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{8}{7}\right)^2$

$\boxed{S_{ABC} = 14 \cdot \frac{8^2}{49} = \frac{2^7}{7} = \frac{128}{7}}$

$\frac{AC}{AT} = 2\cos\frac{\alpha}{2}$

$AT = R \cdot \operatorname{ctg}(90° - \frac{\alpha}{2}) = R \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

~~$\frac{R \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{AC} = 2\cos\frac{\alpha}{2}$~~

$\frac{AC}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = R$

~~$\frac{AC}{R \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} =$~~

~~$\frac{AC \cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}{A \cos\frac{\alpha}{2}} =$~~ ~~$2\sin$~~

Черновик.

$\underbrace{2\log_a(b)}$; $\frac{1}{2}\log_c a$, $\underbrace{2\log_b c}$.

$4 \log_a b \log_b c = \left(\frac{1}{2}\log_c a - 1\right)^2$

$4 \frac{\log_b c}{\log_b a} = \left(\frac{1}{2}\log_c a - 1\right)^2$

$4 \cdot \log_a c = \left(\frac{1}{2}\log_c a - 1\right)^2$

$\frac{4}{t} = \left(\frac{t}{2} - 1\right)^2$

$\frac{16}{t^2} = \frac{t^2}{4} - t + 1$

$16 = \frac{t^4}{4} - t^3 + t^2$

$\frac{t^4}{4} - t^3 + t^2 - 16 = 0$

$\boxed{t = -2}$ $\cancel{16 - 8 + 4 - 16}$

$4 + 8 + 4 - 16$ $\cancel{4 - 8 + 4 - 16}$

$\log_c a = -2$

⋮

$\log_a(b) \log_c a = (2\log_b c - 1)^2$

$\log_c b = (2\log_b c - 1)^2$

⋮

	4	-4	1	-1
		4	0	1
1	4	0	1	0

$4t^3 + t$

Чистовик

Вариант 24.

Задача № 4.

1) $\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 33 \;(1) \\ \text{НОК}(a;b;c) = 3^{19}\cdot 11^{15} \;(2) \end{cases} \Rightarrow abc = 3^{20}\cdot 11^{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 3^{a_1}\cdot 11^{a_2}$ $\quad a_1, a_2 \in [1; 18]$, $\in \mathbb{Z}$

$b = 3^{b_1}\cdot 11^{b_2}$ $\quad b_1, b_2 \in [1; 18]$, $\in \mathbb{Z}$

$c = 3^{c_1}\cdot 11^{c_2}$ $\quad c_1; c_2 \in [1; 18]$

Одно или более из чисел $a_1; b_1; c_1$ – 1 и 19

Одно или более из чисел: $a_2; b_2; c_2$ – 1 и 15

2) Показатели степени $(a_1; a_2; b_1; b_2; c_2; c_1)$ не могут быть меньше 1 (т.к. тогда одно или более чисел из a, b, c ~~будут или~~ не будут делится на 3 и/или на 11) (противоречит (1)), и не могут быть больше 18, т.к. $a_1 + b_1 + c_1 = 20$ и $a_1, b_1, c_1 \geq 1$. Значит всего вариантов выбрать показатели степеней для 3: $19;\ 19;\ 1;\ x$, где $x \in [1; \dots 19]$ ~~$1+2+\dots+18 = \frac{18\cdot 19}{2} = 171$. $17\cdot 2 + 18/2 = 70$~~

(вариантов выбора a_1 – 17 для каждого из них существует ещё $18 \cdot 2$ вариантов выбора b_1 и c_1, ~~для $a_1 = 1$ всего $18\cdot 2$ вариантов (b_1 и c_1)~~ ~~$\Rightarrow$ всего 171 вариант~~).

3) Аналогично, но с учётом того, что $a_2 \in [1; 14]$; $b_2 \in [1; 14]$; $c_2 \in [1; 14]$ ($\in \mathbb{Z}$) получаем ~~$1+2+\dots+14 = \frac{14\cdot 15}{2} = 105$~~ ~~$+3\cdot 2 + 14\cdot 2 = 54$~~ $15;\ (15; 1; x)$, где $x \in \{1; \dots; 15\}$ вариантов распределения степеней для 11.

4) ~~Значит всего троек (a, b, c): $70 \cdot 54 = 3780$.~~

Числа $a; b; c$ состоят из одного множителя группы $3^{19}; 3^1; 3^x$ и одного группы $11^{15}; 11^1; 11^x$.

~~2)~~ ~~3~~ 5) Значит всего $\underbrace{19\cdot 6}_{\text{для } 3} \cdot \underbrace{15\cdot 6}_{\text{для } 11} = 15\cdot 19\cdot 36$ – вариантов троек.

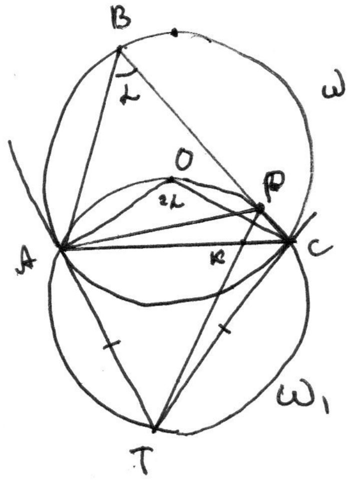
Ответ: $19\cdot 15\cdot 36$.

Чистовик.

Вариант 24.

Задача № 7.

а)



1) Пусть $\angle B = \alpha$, тогда $\angle AOC = 2\alpha$

2) $OA \perp AT$ и $OC \perp CT \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OAT + \angle OCT = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow OACT$ – вписанный и т.к. $AOC \in \omega_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow T \in \omega_1 \Rightarrow \angle ATC = 180° - 2\alpha$.

3) $\angle ACT = \angle ABC$ (хорда и кас. и впис.).

4) $\angle APT = \angle ACT = \alpha$ – т.к. опираются на одну дугу.

5) $\angle APC = \angle AOC = 2\alpha \Rightarrow \angle KPC = \angle APC - \angle APT = 2\alpha - \alpha = \alpha$

6) Т.к. $\angle PCK = \angle ACB$ и $\angle KPC = \angle ABC = \alpha \Rightarrow \triangle KPC \sim \triangle BAC$ по двум углам.

7) Т.к. ~~угол~~ $\angle PCK$ – общий у $\triangle KPC$ и $\triangle APC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle KPC}} = \frac{AC}{KC} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}.$$

8) По п. 6

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle KPC}} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 \overset{п.7}{=} \left(\frac{8}{7}\right)^2$$

$$S_{\triangle ABC} = 14 \cdot \frac{8^2}{7^2} = \frac{2 \cdot 64}{7} = \frac{128}{7}.$$

Ответ: а) $S_{\triangle ABC} = \frac{128}{7}$.

~~$\frac{AC}{AT} = \frac{R}{R_1}$~~

2

Чистовик
Вариант: 24.

Задача №6

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(29-x)$; $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

ОДЗ: $x\in(-49;-1)\setminus\{42;0;-2\}$.

1) ① = ② = ③ − 1

$$2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\frac{1}{2}\log_{\cancel{x+1}\ -x-1}(29-x)=\left(2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)-1\right)^2$$

$$\cancel{\log_{-x-1}(29-x)}$$

$$\frac{\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)}{\log_{29-x}(-x-1)}=\left(2\underbrace{\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)}_{t}-1\right)^2$$

$$\log_{(-x-1)}\frac{x}{7}+7=\left(2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)-1\right)^2$$

$$\frac{1}{t}=(2t-1)^2$$

$$\frac{1}{t}=4t^2-4t+1$$

$$1=4t^3-4t^2+t,\quad t\neq0$$

$$4t^3-4t^2+t-1=0$$

$$\cancel{t=1}\ (t-1)(4t^2+1)=0$$

$$t=1$$

$$\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)=1\ \uparrow\ \frac{x}{7}+7$$

$$-x-1=\frac{x}{7}+7$$

$$\frac{8}{7}x=-8$$

$$\boxed{x=-7}$$

3

Чистовик

Вариант 24

Задача №6.

2) 1 = 3 = 2 − 1

$$4\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1) = \left(\frac{1}{2}\log_{-x-1}(29-x)-1\right)^2$$

$$4\log_{29-x}(-x-1) = \left(\frac{1}{2}\underbrace{\log_{-x-1}(29-x)}_{t}-1\right)^2$$

$$\frac{4}{t} = \left(\frac{t}{2}-1\right)^2$$

$$\frac{4}{t} = \frac{t^2}{4} - t + 1$$

$$16 = t^3 - 4t^2 + 4t$$

$$t^3 - 4t^2 + 4t - 16 = 0$$

3) 2 = 3 = 1 − 1

$$\frac{1}{2}\log_{-x-1}(29-x)\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1) = \left(2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)-1\right)^2$$