Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103099**

ID профиля: **210672**

Вариант 24

Чистовик. Вариант 24.

№1.

Пусть c — разность прогрессии. Прогрессия — возрастающая, $\Rightarrow c>0$. $c = a_{i+1} - a_i \ \forall i \geq 1 \in \mathbb{Z}$. Поскольку $a_2, a_1 \in \mathbb{Z}$, и $c = a_2 - a_1$, то $c \in \mathbb{Z}$; $c>0 \Leftrightarrow c \in \mathbb{N}$.

~~a_5 =~~ Также, из того, что c — разность прогрессии, $a_i = a_1+(i-1)c$.

Тогда $a_1+a_2+\dots+a_9 = S = a_1 + (a_1 + c\cdot 1) + (a_1 + c\cdot 2) + \dots + (a_1 + c\cdot 8) = 9a_1 + c\cdot(1+2+\dots+8) = 9a_1 + c\cdot\frac{8\cdot 9}{2} = 9a_1+36c.$

$$\begin{cases} a_5 a_{18} = (a_1+4c)(a_1+17c) > S-4 = 9a_1+36c-4. \\ a_{10} a_{13} < S+60 \Leftrightarrow (a_1+9c)(a_1+12c) < \cancel{(a_1+4c)(a_1+17c)+60}\ 9a_1+36c+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+21a_1c+68c^2-9a_1-36c+4>0. \\ a_1^2+21a_1c+108c^2-9a_1-36c-60<0. \end{cases}$$

Замена: $t = a_1^2+21a_1c-9a_1$.

$$\begin{cases} t+68c^2-36c+4>0 \\ t+108c^2-9\cdot 4c-60<0 \end{cases} \Rightarrow \cancel{t}+68c^2\cancel{-36c}+4 > \cancel{t}+108c^2\cancel{-36c}-60.$$

$64 > 40c^2 \Rightarrow c=1$ ($c\in\mathbb{N}$; если $c\neq 1 \Rightarrow c\geq 2 \Rightarrow 40c^2 \geq 160 > 64$, противоречие).

Тогда
$$\begin{cases} t+68c^2-36c+4 = t+68-36+4 = t+36 > 0 \\ t+108c^2-36c-60 = t+108-36-60 = t+12 < 0 \end{cases}$$

$t = a_1^2+21a_1-9a_1 = a_1^2+12a_1$.

$$\begin{cases} a_1^2+12a_1+36>0 \Leftrightarrow (a_1+6)^2>0 \Leftrightarrow a_1 \neq -6. \\ a_1^2+12a_1+12<0 \end{cases}$$

1

Продолжение — на следующем листе.

Чистовик. Вариант 24.

№1 (Продолжение).

$\begin{cases} a_1 \neq -6 \\ a_1^2 + a_1 \cdot 12 + 12 < 0 \end{cases}$; $D = 144 - 48 = 96 \Leftrightarrow \left(a_1 - \frac{-12-\sqrt{96}}{2}\right)\left(a_1 - \frac{\sqrt{96}-12}{2}\right) < 0$

$\begin{cases} a_1 \neq -6 \\ (a_1 - (-6-\sqrt{24}))(a_1 - (\sqrt{24}-6)) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a_1 \in (-6-\sqrt{24}; \sqrt{24}-6)$.

$\sqrt{24} < \sqrt{25} = 5 \Rightarrow a_1 \in (-6-5; 5-6) \Leftrightarrow a_1 \in (-11; -1)$.

$a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_1 \in \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2\}$ = 1-му из чисел

$a_1 \neq -6 \Rightarrow a_1 \in \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$ = 1-му из этих чисел.

Проверим также условие $a_5 a_{18} > S - 4$ и $a_{10} a_{13} < S + 60$:

1) $a_5 a_{18} > S - 4 \Leftrightarrow a_1^2 + 21a_1c + 68c^2 - 9a_1 - 36c + 4 > 0$ (доказ.) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1^2 + 21a_1 + 68 - 9a_1 - 36 + 4 > 0 \Leftrightarrow a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \Leftrightarrow (a_1+6)^2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1 \neq -6$ (все наши варианты a_1 – подходят).

2) $a_{10} a_{13} < S + 60 \Leftrightarrow a_1^2 + 21a_1c - 9a_1 + 108c^2 - 36c - 60 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \Leftrightarrow a \in (-6-\sqrt{24}; \sqrt{24}-6)$. Все наши

a_1 варианты $a_1 \in [-10; -2] \in (-6-\sqrt{24}; \sqrt{24}-6)$, т.к.

$\sqrt{24} > \sqrt{16} = 4 \Rightarrow$ все наши варианты a_1 подходят под все условия задачи $\Rightarrow$ это – ответ.

Ответ: $a_1 = -10$; $a_1 = -9$; $a_1 = -8$; $a_1 = -7$; ~~$a_1 = -6$~~; $a_1 = -4$; $a_1 = -5$; $a_1 = -3$; $a_1 = -2$.

2

Чистовик. Вариант 24.

№2 (продолжение).

$CX = \sqrt{AX^2 + AC^2} = \sqrt{41}$; $DX = \sqrt{AD^2 - AX^2} = \sqrt{56}$ (по теор. Пиф.)

Тогда $DC = DX - CX = \sqrt{56} - \sqrt{41} = 2\sqrt{14} - \sqrt{41}$.

2) С разных ст.

Аналогично, $CD = CX + DX = 2\sqrt{14} + \sqrt{41}$.

5

Чистовик. Вариант 24.

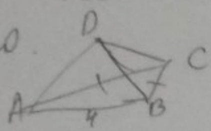
Чистовик. Вариант 24.

X, u

2) c = −1 ...

Ясно.

№2.

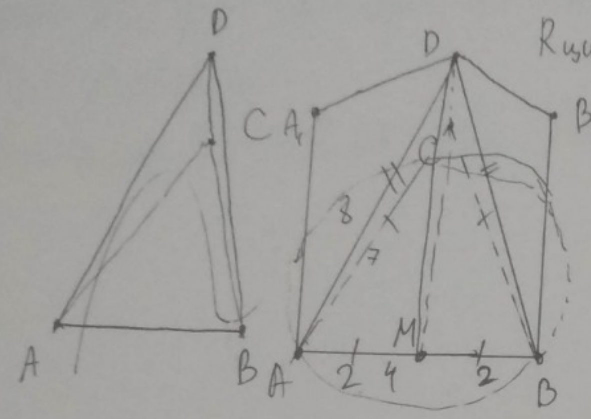


Черновик, В-24.

AD = DB = 8 => D – на пл-ти, через сер. перп. к AB.

AC = CB = 7 => D ∈ пл-ти через сер. AB, ⊥ AB. =>

=> DC ⊥ AB? Ложь!



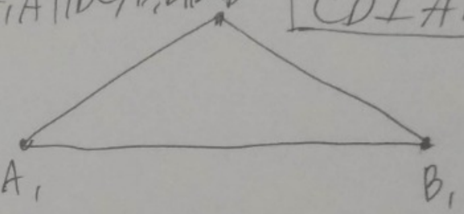
$R_{цил}$ – min.

CD = ?

$\triangle A_1DB_1$: р/б, пл-сть $ADB_1 \perp DC$?

$A_1A \parallel DC$; $B_1B \parallel DC$

$\boxed{CD \perp AB!}$



DC ⊥ AB!

$R_{цил} \geq 2$. $R_{цил}$ – min.! Почему не 2?

Мог ли $R_{цил}$ быть равен 2?

CM = ? DM = ? $CM = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$; $DM = 2\sqrt{16+1} = 2\sqrt{17}$.

~~$CD = \sqrt{DM^2 + CM^2 - 2DM \cdot CM \cdot \cos}$~~

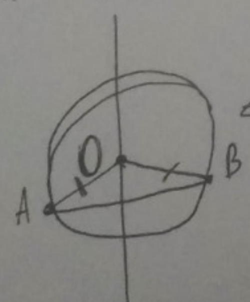
$CD < DM + CM! = \sqrt{53} + 2\sqrt{17}$

49 − 8 = 41,

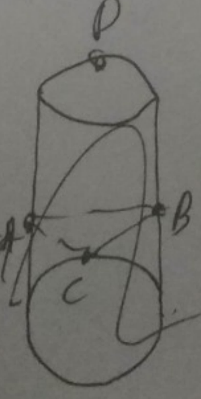
48 = 2√12.

$R_{цил}$ м. б. < 2 ?

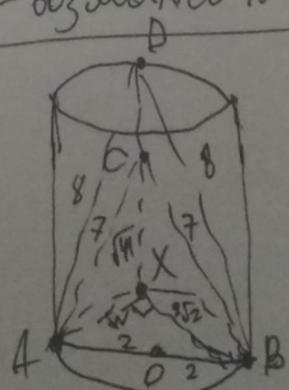
CD ∥ оси; CD ⊥ AB => ось ⊥ AB => A, B лежат в 1-ой окр-сти с центром O, ∥ основанию цилиндра => $\boxed{R_{цил} \geq 2}$.



$R_{цилиндра}$ = 2 – возможно ли?



И могли бы быть с разных сто-рон C и D отн. AB!



Возможно!

CD = ? ($R_{цил}$ = 2)

CX ⊥ AX! Да!

DX ⊥ AX; D, C, X – на 1 пр.

1

21103099 (U210672 M1296025)

Отношение – на следующ...

Чистовик. Вариант 24

Черновик.

№1.

$a_1, \ldots, a_n, \ldots \in \mathbb{Z}$ $\quad a_{i+1} - a_i = c = const\ \forall i.$

$a_1 + \ldots + a_9 = S$ $\quad S = 9a_1 + 36;\ S =$

$a_5 a_{18} > S - 4.$ $\quad a_{10} a_{13} < S + 60.$ $\quad \underline{a_1 = ?}$

$a_1 + (a_1 + 1\cdot c) + \ldots + (a_1 + 8\cdot c) = 9\cdot a_1 + \frac{8\cdot 9}{2} c = 9a_1 + 36c = S.$

$a_i = a_1 + (i-1)c$ – по инд-ии; БАЗА: $i=2$. перех. – оч.

$(a_1 + 4c)(a_1 + 17c) > 9a_1 + 36c - 4 = 9(a_1 + 4c) - 4.$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 c + \overset{4\cdot 17}{68c^2} - 9a_1 - 36c + 4 > 0. \\ 9a_1 + 36c + 60 > (a_1 + 9c)(a_1 + 12c) = a_1^2 + 21a_1 c + \cancel{9c^2}\ 108c^2 \end{cases}$$

~~$(a_1+4c)(a_1+17c-9)+4>0.$~~

Замена: $t = a_1^2 + 21a_1 c - 9a_1$:

$$\begin{cases} t + 68c^2 - 36c + 4 > 0. \Leftrightarrow t > 36c - 4 - 68c^2 \\ 36c + 60 > t + \cancel{9c^2}\ 108c^2 \Leftrightarrow \quad t < 36c + 60 - 108c^2 \end{cases}$$

Отсюда, $\cancel{36c} + 60 - 108c^2 > \cancel{36c} - 4 - 68c^2$

$\underline{64 > 40c^2}$ $\Rightarrow$ $c = \pm 1$ ($c \in \mathbb{Z}$, т.к. все числа $a_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_{i+1} - a_i \in \mathbb{Z}$).

1) $c = 1$: ~~$t > 36 - 4 -$~~ $\underline{t < 36 + 60 - 108 = -12}$

$a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0.$

~~$(a_1+6)^2$~~ $\frac{D}{4} = 36 - 12 = 24 \Rightarrow$

$a_{1,2} = -6 \pm 2\sqrt{6} \Rightarrow a \in (-6 - 2\sqrt{6}; -6 + 2\sqrt{6}).$

$t > 36 - 4 - 68 = 32 - 68 = -36 \Rightarrow a_1^2 + 21a_1 - 9a_1 > -36.$

$a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \Rightarrow \underline{a \neq -6}$ $\quad (a_1 + 6)^2 > 0.$

~~Перев~~ $2\sqrt{6} < 5$: $\uparrow^2$ $\quad 4\cdot 6 < 25 \Rightarrow a \in [-10; -2] \neq -6.$

И подстановка с проверкой – далее.

CX⊥AX! DA!

21103099 (U210672 M1296025)

Чистовик. Вариант 24

Черновик.

№1.

1) с 1ст.: $AX^2+CX^2=49$;

$AX^2+(CX+CD)^2=64$

$\underline{R=2}$ $AX=XB=2\sqrt{2}$ (т.к. $\triangle AXB$ — прямоуг., O — центр AB).

$2+CX^2=49 \Rightarrow CX=\sqrt{47}$.

$2+(\sqrt{47}+CD)^2=64$

$47+2\sqrt{47}CD+CD^2=62$.

$CD^2+2\sqrt{47}CD-15=0$.

$D=4\cdot47+4\cdot15=4\cdot62$.

$CD=\frac{-2\sqrt{47}\pm2\sqrt{62}}{2}=\underline{-\sqrt{47}+\sqrt{62}}$.

$\sqrt{62}-\sqrt{47}$.

4 ...

$AX=BX=2\sqrt{2}$.

$8+CX^2=49 \Rightarrow CX=\sqrt{41}$.

$56=(\sqrt{41}+CD)^2$.

$\underline{CD=\sqrt{56}-\sqrt{41}}$. Перепроверить!

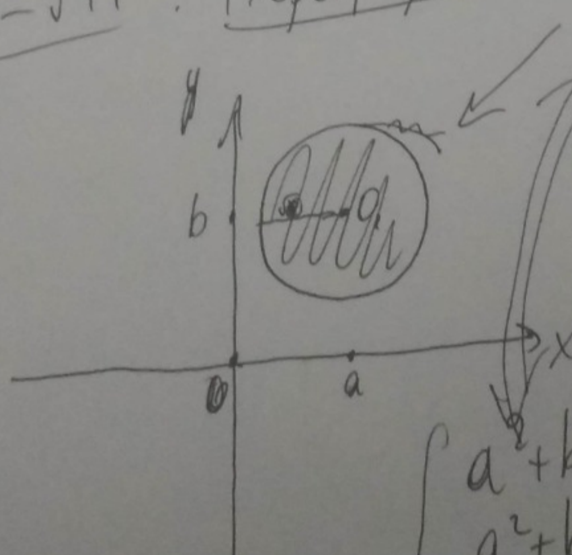
№3.

все (x,y): $\exists\,(a,b)$: !

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le10\\ a^2+b^2\le\min(-6a-2b,10).\end{cases}$$

$a^2+b^2=OO_1^2\le\min(-6a-2b,10)$.

$\boxed{\text{Смотрим, когда нет решений у системы!}}$



$OO_1^2\le10 \Rightarrow$ т. O — внутри круга.

$$\begin{cases}a^2+b^2\le10\\ a^2+b^2\le-6a-2b\\ (x-a)^2+(y-b)^2\le10\end{cases}$$

Чистовик. Вариант 24

Черновик.

1) с 1 ст

R = 2

2 + C

2 + (

4 7

CD^2

D = 4

CD =

$\sqrt{62}$ -

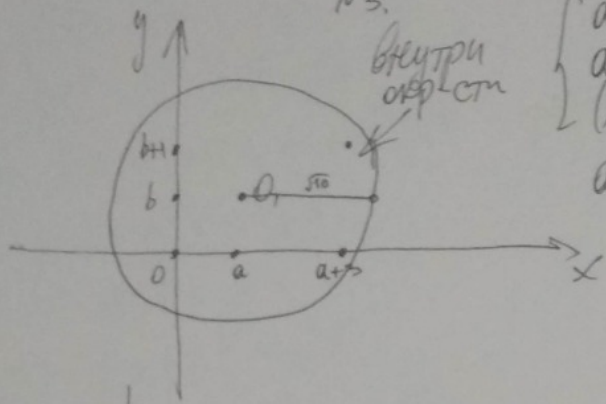
AX

8 +

C

№

№3.

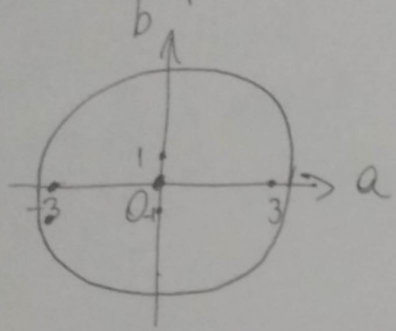


$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 10 \; \checkmark \\ a^2+b^2 \le -6a-2b \\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \; \checkmark \end{cases}$$

$$a^2+b^2 \le -6a-2b.$$

$$a^2+6a+9+b^2+2b+1 \le 10.$$

$$(a+3)^2+(b+1)^2 \le 10$$



Продолжение — на следующ

Чистовик. Вариант 24.

Дано:
ABCD – тетраэдр:
$AB = 4$
$AC = CB = 7$
$AD = DB = 8$
ABCD – впис. в цилиндр:
$CD \parallel$ ось цил.
$R_{цил}$ – min.

Найти:
$CD = ?$

№2. Решение:

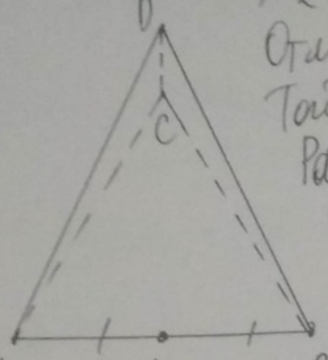


рис. 1

Отметим M – середину AB.
Тогда $AM = MB = 2$.
Рассмотрим пл-ть α, проходящую через M и $\perp AB$. $AC = CB \Rightarrow C$ лежит на сер. перп. к $AB \Rightarrow C \in \alpha$;
$AD = DB \Rightarrow D$ лежит на сер перп. к $AB \Rightarrow D \in \alpha$. $C \in \alpha$; $D \in \alpha \Rightarrow CD \in \alpha \Rightarrow CD \perp AB$ (т.к. $\alpha \perp AB$).
$CD \parallel$ ось цилиндра $\Rightarrow$ ось цилиндра $\perp AB$.
Рассмотрим сечение цилиндра, параллельное его основанию, и содержащее т. A. Поскольку ось цилиндра $\perp$ основанию цилиндра, то ось цилиндра $\perp$ этому сечению. Тогда AB параллельно этому сечению $\Rightarrow B \in$ этому сечению.
Также, наше сечение – круг с радиусом, $= R_{цилиндра}$.
Поскольку т. ~~AB~~ A и B – на боковой поверхности цилиндра, то они – на окружности нашего сечения – круга $\Rightarrow$ диаметр этого круга $\geq AB \Rightarrow 2R_{цилиндра} \geq 4$; $R_{цил} \geq 2$.
Покажем, что $R_{цил}$ может быть равен 2. Построим такой тетраэдр: Построим ~~отрез~~ точки A, B, и середину отрезка AB – точку M ($AM = MB = 2$). Построим окружность с центром в т. M, проходящую через т. A и т. B. Отметим т. X – середину дуги AB. Тогда $AX = BX$, и $\angle AXB = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow AX^2 + BX^2 = 2AX^2 = AB^2 \Rightarrow AX = 2\sqrt{2} = BX$ (по теор. Пиф.)

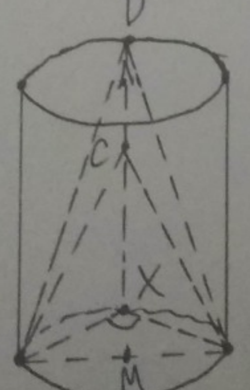


рис. 2

Продолжение на след. листе

③

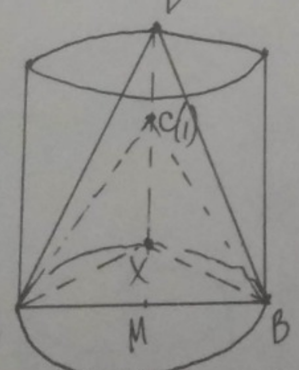
Чистовик. Вариант 24.

№2 (Продолжение).

Затем в т. X проведём перпендикуляр к пл-ти ABX, и на нём отметим точки C и D: $CX = \sqrt{41}$; $DX = \cancel{2\sqrt{12}}\ 2\sqrt{14}$

Тогда ~~рассмотрим проведём~~ построим ~~окр-сть круг~~ окружность, которая будет поднята на вектор $\overline{XD}$ над ~~кругом~~ окружностью (ABX) — проходящей через точки A, B и X. Затем построим цилиндр, верхнее и нижнее основание которого — 2 ~~окр~~ круга в окружностях из предыдущего предложения. Рассмотрим получившийся тетраэдр ABCD: $AB = 4$; поскольку $CX \perp$ пл-ти AXB, то $CX \perp AX \Rightarrow AC^2 = AX^2 + CX^2$ (по теор. Пиф.) $= 8 + 41 = 49 \Rightarrow AC = 7$. $BC^2 = CX^2 + BX^2$ (по теор. Пиф.) $= 8 + 41 = 49 \Rightarrow BC = 7$. $AD^2 = AX^2 + XD^2$ (по теор. Пиф.) $= 8 + \cancel{48}\ 56 = 64 \Rightarrow AD = 8$. $BD^2 = BX^2 + XD^2$ (по теор. Пиф.) $= 8 + 56 = 64 \Rightarrow BD = 8$.

Все вершины — на боковой поверхности цилиндра; $CD \perp$ основанию цилиндра $\Rightarrow CD \parallel$ оси цилиндра. Тогда наш тетраэдр подходит $\Rightarrow R_{цил} = 2 \Rightarrow AM = R_{цил}$. Проведём окр-сть с центром в т. M, проходящую через т. A и т. B. Она $\parallel$ основанию цилиндра.



Есть 2 случая: т. C и т. D — с 1 стороны от плоскости, проходящей через провед. окр-сть, и с разных.

1) Обозначим т. C, как т. C(1) на рисунке. Пусть X — проекция т. D на окр-сть с ц. в т. M, проход. через т. A и т. B. Так как $CD \perp$ основанию цил., то $CX \perp$ пл-ти (AXB). Тогда, ~~по т~~ $AX = XB$ (т.к. $AC = CB$; $AX^2 = AC^2 - CX^2 = BC^2 - CX^2 = XB^2$); $\angle AXB = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow AX^2 + XB^2 = 2AX^2 = AB^2 \Rightarrow AX = 2\sqrt{2}$.
(по теор. Пиф.)

4

21103099 (U210672 M1296025)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103099**

ID профиля: **210672**

Вариант 24

Чистовик, Вариант 24.

№2 (Продолжение).

1) $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=2$, остальные $=1$:

$\log_{(x+1)^2}(29-x)=\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1$.

$\left(\sqrt{\frac{x}{7}+7}\right)^2=-x-1=\frac{x}{7}+7 \Rightarrow \frac{8}{7}x=-8 \Rightarrow \underline{x=-7}$.

Подставим $x=-7$:

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_6 6=1$.

$\log_{(x+1)^2}(29-x)=\log_{36}36=1$.

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=\cancel{\log_{6} 6}=\log_{\sqrt{6}}6=2$.

Подходит $\Rightarrow x=-7$.

2) $\log_{(x+1)^2}(29-x)=2$; $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=1$; $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1$:

$\sqrt{29-x}=\frac{x}{7}+7 \,|\,^2$

$\Downarrow$

$29-x=\frac{x^2}{49}+2x+49$

$\Downarrow$

$\frac{50x^2}{49}+2x+20=0 \,|:2$

$\cancel{2x}\left(\frac{5}{7}x\right)^2+x+10=0=\left(\frac{5}{7}x+\frac{7}{10}\right)^2+10-\frac{49}{100}>0 \left(10>1>\frac{49}{100}\right)$.

Противоречие $\Rightarrow$ случай невозможен.

3) $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=2$, $\log_{(x+1)^2}(29-x)=1$; $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=1$:

$\left(\sqrt{29-x}\right)^2=\frac{x}{7}+7=29-x \Rightarrow \frac{8^4}{7}x=22_{11}$; $x=\frac{77}{4}$, но тогда

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=\log_{\sqrt{\frac{11}{4}+7}}\left(-\frac{77}{4}-1\right)$ — невозможен $\left(-\frac{77}{4}-1<0\right)$,

противоречие. Итого, $x=-7$.

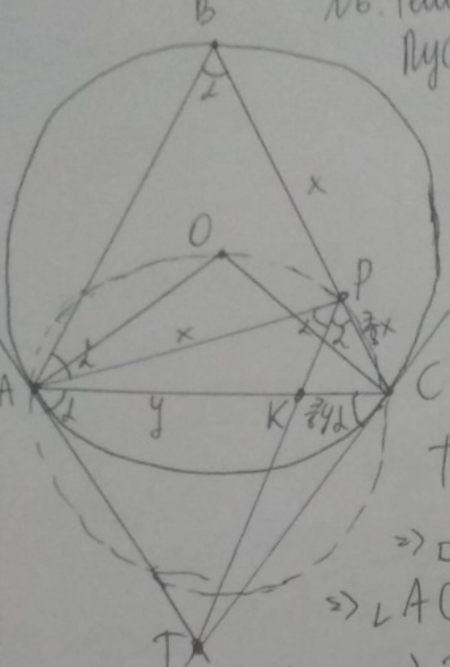
Ответ: $x=-7$.

4

21103099 (U210672 M1296026)

Чистовик, Вариант 24.

Дано:
$\triangle ABC$ - остроуг. вписан в окр. ω
т.О - центр ω
т.Р = пересечение ВС и окр-сти (АОС)
т.Т = пересечение касат. к ω в т.А и т.С
$TP \cap AC = K$
$S_{\triangle APK} = 16$
$S_{\triangle CPK} = 14$
а) Найти: $S_{\triangle ABC}$
б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$
Найти: $AC = ?$



№6. Решение:

Пусть $\angle ABC = \angle$. Тогда, по св. касат., $\angle CAT = \angle ABC = \angle$, и $\angle ACT = \angle ABC = \angle$. Тогда $\angle ATC = 180 - \angle CAT - \angle ACT$ (по св. $\triangle ATC$) $= 180 - 2\angle$.

$\square AOPC$ - впис. (по опред.) $\Rightarrow \angle AOC = \angle APC$ (по св. впис. $\square$). $\angle AOC = \cap AC = 2 \cdot \frac{1}{2} \cap AC = 2\angle ABC = 2\angle$ (по св. окр-сти).

Тогда $\angle APC = 2\angle \Rightarrow \angle APC + \angle ATC = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow \square APCT$ - впис. (по пр. впис. $\square$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ACT = \angle APT$ (по св. впис. $\square$) $= \angle$, $\angle CAT = \angle CPT = \angle$ (по св. впис. $\square$). Тогда $\angle CPK = \angle CBA = \angle \Rightarrow PK \parallel AB$ (по пр. пар. пр., как соотв. $\angle$) $\Rightarrow \angle BAP = \angle APT = \angle$ (по св. пар. пр., как накрест леж.) $\Rightarrow \triangle ABP$ - р/б (по пр.) $\Rightarrow BP = AP$ (по опред.) $= x$. $\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle CPK}} = \frac{8}{7} = \frac{AK}{CK}$ (по св. площ.). $PK \parallel AB \Rightarrow \frac{CK}{KA} = \frac{CP}{PB}$ (по теор. Фалеса) $\Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{7}{8} \Rightarrow CP = \frac{7}{8}PB = \frac{7}{8}x$. ~~Ck =~~ $\frac{49}{100}$.

$AK = y \Rightarrow CK = \frac{7}{8}y$. Тогда, $S_{\triangle CPK} = \frac{1}{2}\sin\angle PCK \cdot \frac{7}{8}x \cdot \frac{7}{8}y = 14$.

$\Rightarrow$ Тогда $\frac{1}{2}xy \cdot \sin\angle PCK = \frac{14 \cdot 64}{49} = \frac{128}{7}$.

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin\angle PCK = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{8}x \cdot \frac{15}{8}y \cdot \sin\angle PCK =$
$= \frac{128}{7} \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{15}{8} = \frac{2 \cdot 15 \cdot 15}{7} = \frac{450}{7}$.

Ответ: $S_{\triangle ABC} = \frac{450}{7}$.

5

Продолжение на след. странице.

Чистовик, вариант 24.

№6 (Продолжение).

б) $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{5} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{3}{5} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{9}{25} = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} \Rightarrow 9 - 9\sin^2\alpha = 25\sin^2\alpha;$

$\sin^2\alpha = \frac{9}{34} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}};\ \cos\alpha = \frac{5}{3}\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}.$

$S_{\triangle APC} = S_{\triangle APK} + S_{\triangle PKC} = 30 = \frac{1}{2} AP\cdot PC\cdot \sin\angle APC =$

$= \frac{1}{2}x\cdot\frac{7}{8}x\cdot\sin 2\alpha = \frac{1}{2}x\cdot\frac{7}{8}x\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{7}{8}x^2\cdot\frac{15}{34} = 30.$

$x^2 = \frac{2\cdot 34\cdot 8}{7} \Rightarrow x = 4\sqrt{\frac{34}{7}}.$

Тогда в $\triangle ABP$, по теор. cos, $AB^2 = x^2 + x^2 - 2x^2\cdot\cos(180-2\alpha) =$

$= 2x^2\cdot(1+\cos 2\alpha) = 2x^2\cdot(1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) = 2x^2\cdot 2\cos^2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 2x\cos\alpha = 8\sqrt{\frac{34}{7}}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{40\sqrt{7}}{7} = \frac{40}{\sqrt{7}}.$

$BC = x + \frac{7}{8}x = \frac{15}{8}x = 15\cdot\sqrt{\frac{34}{7}}\cdot\frac{1}{2}.$

По теореме косинусов для $\triangle ABC$,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos\alpha = \frac{1600}{7} + \frac{15^2\cdot 17}{14} -$

$- 2\cdot\frac{40}{\sqrt{7}}\cdot\frac{15}{2}\cdot\sqrt{\frac{34}{7}}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} = 25\cdot\left(\frac{64}{7} + \frac{9\cdot 17}{14} - \frac{40\cdot 3}{7}\right) =$

$= 25\cdot\left(\frac{128+153-240}{14}\right) = 25\cdot\frac{41}{14} \Rightarrow AC = 5\sqrt{\frac{41}{14}}.$

Ответ: $AC = 5\sqrt{\frac{41}{14}}$.

Чистовик. Вариант 24.

Черновик, Вариант 24.

№1.

$a, b, c \in N$ Кол-во = ?

$НОД(a,b,c) = 33 = 3^1 \cdot 11^1$

$НОК(a,b,c) = 3^{19} \cdot 11^{15}$

Упорядоченные!

Лишь 2 делителя: 3 и 11.

Сопоставим 2 числа: (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2).

есть среди ~~них~~ (a_1, b_1, c_1) 1 и 19 и число от 1 до 19.

есть среди (a_2, b_2, c_2) 1 и 15 и число от 1 до 15.

Случаи: когда не совпад. и когда совпадают.

8400 + ~~560~~

640 + 32

9072

$108 \times 84 = 432 + 864 = 9072$

1) Совп. нет:

В общем, ясно.

№2.

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(29-x)$, $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$.

2 равны и меньше 3-его на 1. $x = ?$

$\frac{49}{100}$).

$x < 29$ $\neq 28$ $x < -1$ $\frac{x}{7}+7 > 0 \Rightarrow x > -49$

$\neq 1 \Rightarrow x \neq -42$

$x \in (-49; -1) \neq 42$

~~2 lo Замена: 29 − x = a;~~

$2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)$; $\frac{1}{2}\log_{(-x-1)}(29-x)$, $2\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)$.

=0),

Произведение этих 3-х чисел $= 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x \cdot 1 = 2$.

Также, $a^2(a+1) = 2$. $a^3 + a^2 - 2 = 0$. $a = 1$ – корень.

$(a-1)(a^2+2a+2) = 0$. $a^2+2a+2 = (a+1)^2 + 1 > 0 \Rightarrow a = 1$

21103099 (U210672 M1296026)

Черновик, вариант 24.

№1

Черновик, В-24. $CK^2 = \frac{16\cdot 7}{21\cdot 3} + 7\cdot 14\cdot 17 - 2\cdot\frac{31}{\sqrt{34}}\cdot\frac{4\sqrt{7}}{21}\cdot 7\sqrt{14\cdot 17}$

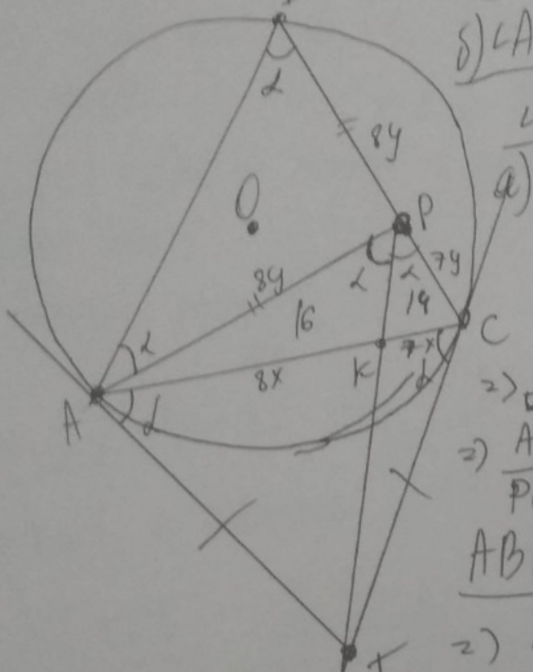
№6. $\square AOPC$ – впис.

$S_{\triangle APK} = 16;\ S_{\triangle CPK} = 14 \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{8}{7}$. $\quad \frac{16}{63} + 7\cdot 14\cdot 17 - 8$

а) $S_{\triangle ABC} = ?$

б) $\angle ABC = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{5};\ AC = ?$

$\angle APC = \angle AOC = 2\angle ABC = 2\alpha$



а) $S_{\triangle ABC} = ?$

$\angle APC = 2\alpha\ (= \angle AOC)$.

$\angle CAT = \angle ACT = \alpha \Rightarrow \angle ATC = 180 - 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \square APCT$ – впис. $\Rightarrow PK$ – бисс. $\angle APC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{8}{7}$ (по св. бисс.)

$AB \parallel PK!$ $(\angle CPK = \angle CBA = \alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAP = \angle APT = \alpha,\ \triangle ABP$ – р/б!

$S_{\triangle CPK} = 14 = \frac{PC\cdot CK\cdot\sin\angle C}{2} = \frac{7\cdot 7\cdot AC\cdot BC\cdot \sin\angle C}{15\cdot 15\cdot 2} = \frac{49}{225}S_{\triangle ABC} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{225}{49_7}\cdot 14_2 = \frac{450}{7}$

б) $\angle A\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{5}$. $AC = ?$ $\quad x = ?$ $\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{5} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}\cdot\sin 2\alpha\cdot 8y\cdot 7y = 30$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{30}{34_{17}} = \frac{15}{17}$.

$\frac{15}{17}\cdot 56y^2 = 60 \Rightarrow y^2 = 14\cdot 17,\ y = \sqrt{14\cdot 17} = \sqrt{7\cdot 34}$

$S_{\triangle PKC}$ – знаем, отсюда – PK, отсюда – KC, отсюда – AC

$\frac{1}{2}\ PK\cdot 7\sqrt{14\cdot 17}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = 14_2$ $\quad$ ~~14 этого~~, $PK = \frac{4}{3\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{21}$

21103099 (U210672 M1296026)

Черновик, Вариант 24.

Черновик, В-24.

№2 (продолжение).

$a = 1 \Rightarrow 2$ числа $= 1$, и 1 равно 2.

3 случая:

1) $3 - e = 2 \Rightarrow \sqrt{29-x} = \frac{x}{7} + 7$; $(x+1)^2 = 29 - x$ $\Rightarrow \frac{x}{7} + 7 = -x - 1$.

Подходит? $\frac{8}{7}x = -8 \Rightarrow \boxed{x = -7}$ $6 = 6$ — подходит!

2) $2 - e = 2$: $\sqrt{29-x} = \frac{x}{7} + 7$; $\sqrt{\frac{x}{7}+7} = -x - 1$

$(x+1)^2 = 29 - x$.

$29 - x = \frac{x^2}{49} + 2x + 49$.

$\frac{50x^2}{49} + 2x + 20 = 0 \mid : 2 \cdot 7$!!!

$\frac{25x^2}{7} + 7x + 70 = 0$. Не подходит. !!

$D = 49 - 70 \cdot 4 \cdot \frac{25}{7} = 49 - 1000 < 0$

3) $4 - e = 2$:

$29 - x = \frac{x}{7} + 7$; $(x+1)^2 = 29 - x$; $x - 1 = \sqrt{\frac{x}{7} + 7}$.

$\frac{8}{7}x = 22$; $x = \frac{77}{4} > 0$!!!

$56y^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot \frac{15}{34} = \frac{15}{2}$.

$y^2 = \frac{15 \cdot 34}{56} = \frac{17}{14}$;

$y = \sqrt{\frac{17}{14}}$

$BP = 8y = 4 \cdot \sqrt{\frac{34}{7}}$.

$AB = 2\cos\angle \cdot BP = \frac{10}{\sqrt{34}} \cdot 4\sqrt{\frac{34}{7}} = \frac{40}{\sqrt{7}}$

$AB = \frac{40}{\sqrt{7}}$; $BC = 15y = 15\sqrt{\frac{17}{14}} = \frac{15}{2}\sqrt{\frac{34}{7}}$.

$AC^2 = \frac{225}{4} \cdot \frac{34}{7} + \frac{1600}{7} - 2 \cdot \frac{15}{2}\sqrt{\frac{34}{7}} \cdot \frac{40}{\sqrt{7}} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} =$

$AB = 80\sqrt{7}$

$= \frac{25}{7} \cdot \left(\frac{9 \cdot 17}{2} + 64 - \ldots\right)$ $\frac{25}{7} \cdot \left(\frac{153 + 128 - 240}{2}\right)$

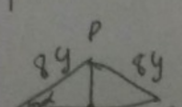
$128 + 9 \cdot 17 - 240 = 25 \cdot \frac{41}{14}$

$153 + 128 - 240 = 281 - 240 = 41$

Ответ: $x = -7$.

$16\cos\angle \cdot y = AB = \frac{16 \cdot 5}{\sqrt{34}} \cdot \sqrt{7 \cdot 34}$,

$BC = 15y = 15 \cdot \sqrt{34 \cdot 7}$.



$80\sqrt{7} : 7 \cdot (80^2 + 225 \cdot 34 - \ldots$

$AC^2 = 80^2 \cdot 7 + 225 \cdot 34 \cdot 7 - 2 \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot 15 \cdot \sqrt{34 \cdot 7} \cdot 80\sqrt{7} : 7 \cdot (80^2 + 225 \cdot 34$

$- 2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 80) = 7 \cdot 25 \cdot (256 + 9 \cdot 34 - 6 \cdot 80) = 7 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 41 = 25 \cdot 14 \cdot 41$.

$\boxed{AC = 5\sqrt{14 \cdot 41}}$

Чистовик, Вариант 24.

№1.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 3^1 \cdot 11^1 \\ НОК(a;b;c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ в разложении чисел a, b, c на простые множители есть лишь 3 и 11.

Пусть у a степень вхождения 3 ($\varphi_p(a)$ — степень вхождения p в a) $\varphi_3(a) = a_1$; $\varphi_{11}(a) = a_2$; $\varphi_3(b) = b_1$; $\varphi_3(c) = c_1$; $\varphi_{11}(b) = b_2$; $\varphi_{11}(c) = c_2$.

Тогда, из того, что $НОД(a;b;c) = 3^1 \cdot 11^1$, $\min(a_1, \cancel{a_2}, b_1, c_1) = 1$; $\min(b_2, a_2, c_2) = 1$, где $\min(x, y, z)$ — минимальное из чисел x, y, z. $НОК(a;b;c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \Rightarrow \max(a_1, b_1, c_1) = 19$; $\max(a_2, b_2, c_2) = 15$.

Рассмотрим случаи:

1) Среди (a_1, b_1, c_1) нет одинаковых чисел $\Rightarrow$ набор (a_1, b_1, c_1) и набор $\cancel{(x_1, y_1, z_1)}$ $(1, x_1, 19)$, где $x_1 \in \mathbb{N} \in [2; 18]$ отличается лишь перестановкой чисел; поскольку все числа различны, ~~пер~~ для 1-го набора $(1, x_1, 19)$ будет $3! = 6$ перестановок чисел (a_1, b_1, c_1) (3 сп-на 1-е место, 2 – на 2-ое, 1 – на 3-е, последнее). Наборов $(1, x_1, 19)$ — столько же, сколько натуральных чисел от 2 до 18 (x_1), то есть, 17. Тогда троек $(a_1, b_1, c_1) = 17 \cdot 6 = 102$.

2) Среди (a_1, b_1, c_1) есть ~~повт~~ одинаковые числа. Также, среди a_1, b_1, c_1 есть 1 и 19 $\Rightarrow$ 3-е число $= 1$ или 19. Получаются без учёта перестановок 2 набора: $(1;1;19)$ и $(1;19;19)$. Перестановок для каждого из них — 3, т.к. 3 места для отличного числа.

1

Продолжение на следующем листе.

Чистовик, вариант 24.
№1 (Продолжение).

2) Итого $- 3 \cdot 2 = 6$ троек чисел, если среди них есть одинаковые.

Тогда всех троек (a_1, b_1, c_1), по правилу сложения, $102+6=108$.

Рассмотрим случаи:

1) Среди $(a_2; b_2; c_2)$ нет одинаковых чисел. Тогда тройка $(a_2; b_2; c_2)$ отличается от тройки $(1; y_1; 15)$ ($y_1 \in [2;14]$) ~~лишь~~ перестановкой чисел; поскольку все числа - различны, перестановок будет 6 ($3!$, 3 - на 1-е место, 2 - на 2-ое, 1 - на 3). $y_1 \in [2;14] \in \mathbb{N}$, тогда троек $(1; y_1; 15)$ столько же, сколько натуральных чисел от 2 до 14, то есть, 13. Итого, троек $(a_2; b_2; c_2)$ будет $13 \cdot 6 = 78$, если все числа различны.

2) Среди $(a_2; b_2; c_2)$ есть одинаковые числа.

Одно число из $(a_2; b_2; c_2) = 1$, и одно из $(a_2; b_2; c_2) = 15 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ оставшееся $= 1$ или 15. Получаются 2 набора (без учёта перестановок): $(1; 1; 15)$ и $(1; 15; 15)$. Для каждого из них - 3 перестановки, т.к. 3 места для числа, не равного остальным. Итого $- 2 \cdot 3 = 6$ троек чисел, если среди них есть одинаковые.

Итого, всего троек $(a_2; b_2; c_2)$, по правилу сложения, $78+6=84$.

Поскольку тройки $(a_1; b_1; c_1)$ и $(a_2; b_2; c_2)$ не зависят друг от друга, всего троек $(a; b; c)$, по правилу умножения, $108 \cdot 84 = 9072$. ~~а,~~ каждая из них подходит под условие (есть и min. числа $=(1,1)$, и max. числа $=$ ~~110~~, $(19; 15)$), то ответ $- 9072$.

Ответ: 9072.

2

Чистовик, Вариант 24.

№2.

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right),\ \log_{(x+1)^2}(29-x),\ \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$.

$\underbrace{29-x>0\neq1;\ \frac{x}{7}+7>0}$ $\qquad$ $\begin{cases}-x-1>0;\\ \frac{x}{7}+7>0\neq1\end{cases}$

$\underbrace{x\in(-49;28)\cup(28;29)\qquad x\in(-49;-42)\cup(-42;-1)}$

$x\in(-49;-42)\cup(-42;-1)$.

Тогда $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$\log_{(x+1)^2}(29-x)=\frac{1}{2}\log_{(x+1)}(29-x)$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=2\log_{(\frac{x}{7}+7)}(-x-1)$.

Тогда $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\log_{(x+1)^2}(29-x)\cdot\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=$

$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\log_{(\frac{x}{7}+7)}(-(x+1))\cdot\log_{(-(x+1))}(29-x)=$

$=2\cdot\log_{(29-x)}(-(x+1))\cdot\log_{(-(x+1))}(29-x)=2.$

Поскольку 2 из трёх изначальных чисел равны (пусть они равны a), а 3-е больше их на 1 $(a+1)$, то $a^2\cdot(a+1)=2$.

$a^3+a^2-2=0$. Корень 1 – подходит.

$(a-1)(a^2+2a+2)=0$.

$a^2+2a+2=(a+1)^2+1>0\neq0\Rightarrow \underline{a=1}$

Разберём 3 случая:

1) $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=2$, остальные $=1$:

3

Продолжение на след. странице.