Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103004**

ID профиля: **891022**

Вариант 24

Чистовик

№3.

Из второго неравенства системы найдем возможное мн. (a,b). Это мн. будет мн. центров окружностей радиуса $\sqrt{10}$, потом просто посчитаем полученную площадь.

$a^2+b^2 \leqslant \min(-6a-2b, 10)$.

$-6a-2b \geqslant 10$

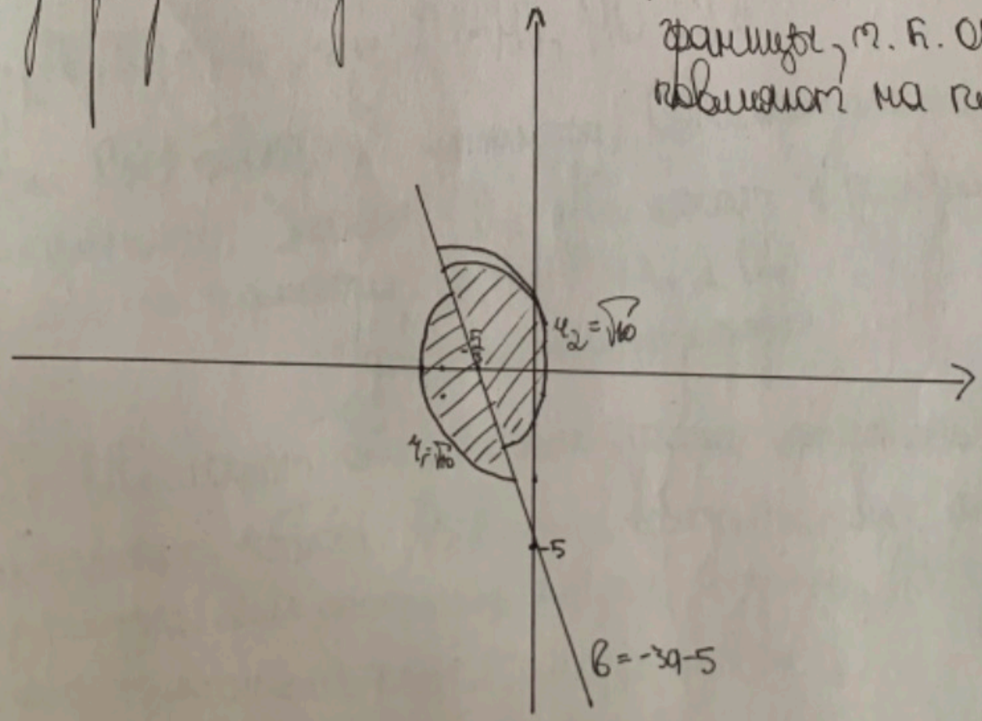
$b \leqslant -3a-5$

на полуплоскости $b \leqslant -3a-5$ выполнено $a^2+b^2 \leqslant 10$

на полуплоскости $b \geqslant -3a-5$ $a^2+b^2 \leqslant -6a-2b$.

$(a+3)^2+(b+1)^2 \leqslant 10$.

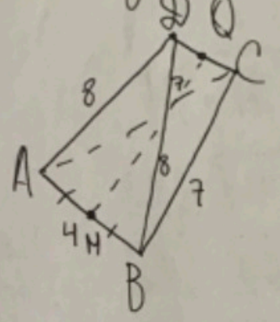
Изобразим полученное мн. (включаем некоторые границы, т.к. они не повлияют на площадь)



Чистовик

№2

Изобразим возможные ABCD



Ясно, что: 1). $AB \perp CD$ (в силу равнобедр. ABD и ABC)

2). CD может быть сколь угодно длинной.

При увеличении длины CD $\angle(CD, ABC)$ уменьшается, значит, $\rho(AB, CD)$ может быть сколь угодно маленьким.

$\rho(AB, CD) = HQ$, где $AH = HB$, $HQ \perp CD$.

Если CD ∥ образ-ей цилиндра, CD лежит на его боковой поверхности. Значит, AB и HQ лежат в горизонтальной плоскости цилиндра. (т.к. $AB, HQ \perp CD$) для наименьшего радиуса.

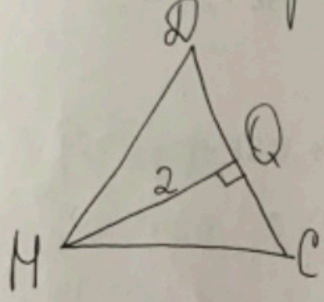
Т.к. HQ может быть сколь угодно маленьким, нам достаточно, чтобы AB влез в горизонтальное сечение цилиндра. Для минимализации радиуса, AB - диаметр, значит, минимальный радиус равен 2.

21103004 (U891022 M1301419)

Чистовик

№2 продолжение

Если AB - диаметр, то MQ - радиус (т.к. $AM=MB$).



$MC=\sqrt{AC^2-\frac{1}{4}AB^2}$ $\quad$ $MD=\sqrt{AD^2-\frac{1}{4}AB^2}$

$MC=\sqrt{45}$ $\quad$ $MD=\sqrt{60}$

$DQ=\sqrt{MD^2-MQ^2}$ $\quad$ $QC=\sqrt{MC^2-MQ^2}$

$DQ=\sqrt{56}$ $\quad$ $QC=\sqrt{41}$.

Значит, единственный возможный CD (при минимальном радиусе) равен $\sqrt{56}\pm\sqrt{41}$. (т.к. Q может быть за CD).

Ответ: $CD=\sqrt{56}\pm\sqrt{41}$.

№1

S_9 - сумма первых 9 членов прогрессии.

$S_9=9a_1+36b$. $\quad$ a_1, b - целые.

$$\begin{cases} a_5\cdot a_{18}=(a_1+4b)(a_1+17b)>S_9-4=9a_1+36b-4 \\ a_{10}\cdot a_{13}=(a_1+9b)(a_1+12b)<S_9+60=9a_1+36b+60. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+21a_1b+68b^2+4>S_9 \\ a_1^2+21a_1b+108b^2-60<S_9 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &68b^2+4>108b^2-60 \\ &40b^2<64 \\ &b=0,1,-1. \end{aligned}$$

Чистовик

№1 продолжение

Т.к. прогрессия возрастающая, $b > 0 \Rightarrow b = 1$.

$S_9 = 9a_1 + 36$. $a_5 \cdot a_{18} = (a_1+4)(a_1+17) = a_1^2 + 21a_1 + 68 > S_9 - 4 = 9a_1 + 32$.

$a_{10} a_{13} = (a_1+9)(a_1+12) = a_1^2 + 21a_1 + 108 < S_9 + 60 = 9a_1 + 116$.

$\begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \\ a_1^2 + 12a_1 - 8 < 0 \end{cases}$ – выполнено при всех $a_1 \neq -6$.

$\sqrt{D} = \sqrt{176} = 4\sqrt{11}$.

$a_{1,2} = \frac{-12 \pm 4\sqrt{11}}{2} = -6 \pm 2\sqrt{11}$

$-13 < a_1 < 1$

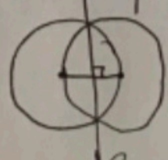
Ответ: $a_1 = -12, -11, -10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2, -1, 0$.

№3 продолжение

Заметим, что центры окружностей $\begin{cases} (a+3)^2 + (b+1)^2 \le 10 \\ a^2 + b^2 \le 10 \end{cases}$

лежат на прямой, $\perp$ $b = -3a - 5$. Кроме того, расстояние между ними равно радиусу окружностей.

Значит, если мы нарисуем окружности под другим углом, получим



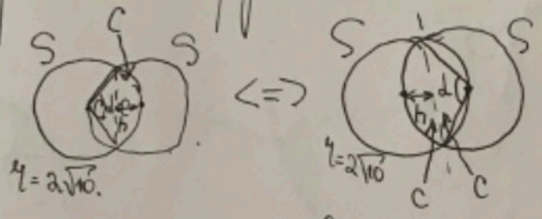
$b = -3a - 5$

Значит, при отсечении частей окружностей прямой $b = -3a - 5$ искомое мн-во, а следовательно и площадь, не меняются.

Чистовик

$\sqrt{3}$ продолжение

Значит, ГМТ точек (x, y) — это такое же пересечение окружностей, но с радиусом $\sqrt{10}+\sqrt{10}=2\sqrt{10}$.



Его площадь равна $2S-2C=2\pi r^2-2\cdot\frac{1}{2}r^2(\alpha-\sin\alpha)$

$h=\frac{1}{2}r=r\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)$ $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$ $\frac{\alpha}{2}=60^\circ$ $\alpha=120^\circ$.

$S_{общ.}=2\pi(2\sqrt{10})^2-(2\sqrt{10})^2\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=40\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ответ: $S_{общ.}=40\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103004**

ID профиля: **891022**

Вариант 24

Чистовик

№4

Т.к. НОД $=33$, а НОК $=3^{19}\cdot 11^{15}$, a, b и c делятся на 3 и 11 и не делятся больше ни на какие простые.

Далее, $a=3^{k}\cdot 11^{l}$, $b=3^{m}\cdot 11^{p}$, $c=3^{q}\cdot 11^{n}$, причем, в силу таких НОД и НОК, хотя бы одно из чисел $k, m, q = 1$ и хотя бы одно из них $= 19$. Значит, вариантов k, m, q всего $3\cdot 19\cdot 2$ (т.к. третье число может быть любым от 1 до 19, и у него 3 возможных места для каждого расклада остальных)

Осталось вычесть $1,1,19$, $1,19,1$, $19,1,1$, $19,19,1$, $19,1,19$, $1,19,19$, посчитанные по 2 раза. В итоге получаем $6\cdot 18=108$ вариантов.

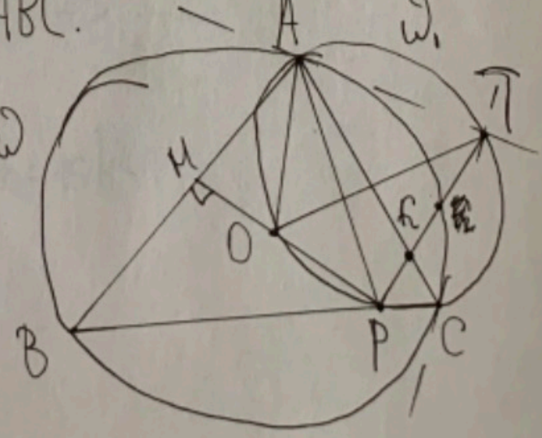
Аналогично, для l, p, n $6\cdot 14 = 84$ варианта.

Значит, вариантов троек a, b, c $84\cdot 108 = 9072$.

Ответ: 9072 варианта.

№6

ΔABC - остроуг. $\Rightarrow O$ внутри ABC.



$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{KC} = \frac{8}{7}$

$\angle AOC = \angle APC$, $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$ (в-во O)

$\angle APC = 2\alpha$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle APB = 180^\circ - 2\alpha$

Чистовик

№6 продолжение

$\angle BAP = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = \alpha \Rightarrow AP = BP$

$\angle AOT = \angle COT = \alpha$ $\quad \angle ATO = \angle CTO = \alpha$ (т.к. $OA = OC$, $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$) $\Big| \Rightarrow$

$\angle ATO = \angle CTO = 90^\circ - \alpha$

$\Rightarrow T \in \omega_1$

$\angle APT = \angle AOT$, $\angle AOC = \angle APC$ (св-во $\odot$)

$\angle AOT = \angle APT = \angle COT = \angle CPT \Rightarrow Ph$ - биссект. $\angle APC$.

$\frac{Ah}{hC} = \frac{8}{7}$, Ph - бисс. $\Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{8}{7} = \frac{BP}{PC} \Rightarrow Ph \parallel AB \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = S_{PhC} : \left(\frac{14}{14+16}\right)^2 = 14 : \frac{49}{225} = \frac{450}{7}$.

а). Ответ: $S_{ABC} = \frac{450}{7}$.

б). $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{5}$.

PM - высота APB ($O \in PM$, т.к. $AP = PB$). $\Rightarrow \frac{PM}{AM} = \frac{3}{5}$.

$\frac{PM}{AB} = \frac{3}{10}$, $PM = 3h \Rightarrow S_{APB} = \frac{1}{2} \cdot 3h \cdot 10h = 15h^2$.

$S_{APB} = S_{ABC} \cdot \frac{16}{30} = \frac{240}{7} = 15h^2$. $\quad h = \frac{4}{\sqrt{7}}$

$AP^2 = h^2 + AM^2 = \frac{34 \cdot 16}{7 \cdot 9}$. $\quad AP = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{34}{7}}$.

21103004 (U891022 M1301420)

Чистовик

№6 продолжение

$\frac{AP}{PC}=\frac{8}{7} \Rightarrow PC=\frac{\sqrt{238}}{6}$. $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}=\arccos\frac{5}{\sqrt{34}}$.

$\angle APC=2\angle ABC=2\arccos\frac{5}{\sqrt{34}}$.

$AC^2=AP^2+PC^2-2\cos\angle APC\cdot AP\cdot PC$ (теор. cos-ов).

$AC=\sqrt{\frac{1025}{126}}$. Ответ: $AC=\sqrt{\frac{1025}{126}}$.