Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102933**

ID профиля: **199525**

Вариант 24

Чистовик. вариант 24

№1.

Пусть d - разность этой арифметической прогрессии.
Тогда $a_2 - a_1 = d$. Так как $a_2 \in \mathbb{Z}, a_1 \in \mathbb{Z}$, то $d \in \mathbb{Z}$. Так как прогрессия возрастающая, то $d > 0$.

$a_5 = a_1 + 4d$; $a_{18} = a_1 + 17d$; $a_{10} = a_1 + 9d$; $a_{13} = a_1 + 12d$.

$a_5 a_{18} > S - 4$. $\qquad$ $a_{10} a_{13} < S + 60$.

$(a_1+4d)(a_1+17d) > S-4$. $\qquad$ $(a_1+9d)(a_1+12d) < S+60$

(1) $a_1^2 + 21a_1d + 68d^2 > S-4$. $\qquad$ $a_1^2 + 21a_1d + 108d^2 < S+60$.

(2) $a_1^2 + 21a_1d + 68d^2 < S+60-40d^2$.

Тогда из (1) и (2) следует, что $S-4 < S+60-40d^2$.

$40d^2 < 64$.

$10d^2 < 16$.

$d^2 < 1{,}6$. Так как d - целое, то $|d| \leq 1$. Так как $d \in \mathbb{Z}$ и $d > 0$, то $d = 1$.

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \ldots + (a_1+8d) = 9a_1 + \frac{0+8d}{2} \cdot 9 = 9a_1 + 36d = 9a_1 + 36$.

(1) $a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + 36 - 4$

$a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0$.

$(a_1+6)^2 > 0$.

$|a_1+6| > 0$.

$a_1 + 6 \neq 0$

$a_1 \neq -6$.

(2) $a_1^2 + 21a_1 + 68 < 9a_1 + 36 + 60 - 40$

$a_1^2 + 12a_1 + 68 < 56$

$a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$.

$(a_1+6)^2 < 24$.

$|a_1+6| < \sqrt{24}$

$-\sqrt{24} < a_1 + 6 < \sqrt{24}$

$-6-\sqrt{24} < a_1 < -6+\sqrt{24}$.

Так как $a_1 \in \mathbb{Z}$, и $4 < \sqrt{24} < 5$, то $a_1 \in \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$

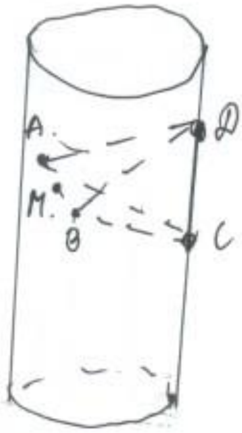
$-10 > -6-\sqrt{24} > -11$

$-2 < -6+\sqrt{24} < -1$

Ответ: $a_1 \in \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$.

Чистовик. вариант 24.

№2.



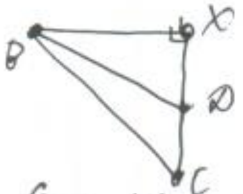
Отметим середину AB - точку M. Так как $AC=CB=7$, то $\triangle ABC$ - равнобедренный, тогда CM - медиана и высота, тогда $CM \perp AB$.

Так как ~~DM~~ $DB=DA=8$, то $\triangle ABD$ - равнобедренный, тогда DM - медиана и высота, тогда $DM \perp AB$.

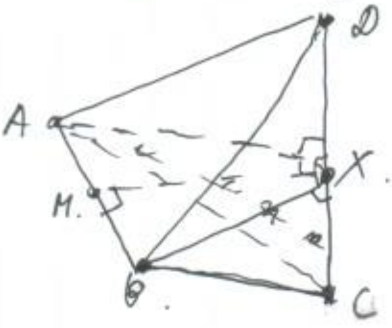
Так как $AB \perp DM$ и $AB \perp CM$, то $AB \perp (DMC)$.

Так как DC параллельна оси цилиндра, то $DC \perp \alpha$, где α - плоскость основания цилиндра. Так как $DC \subset (DMC)$, то $(DMC) \perp \alpha$. Так как $AB \perp (DMC)$, то $AB \parallel \alpha$. Тогда проведём через AB плоскость ~~перп~~ β так, что $\beta \parallel \alpha$. Тогда β пересечёт прямую CD в точке X. ~~Если~~ Расположим $ABCD$ так, что C находится ниже D.

Тогда, если X выше D на CD, то $\angle BDX$ - острый, тогда $\angle BDC$ - тупой, тогда $BC > BD$, но $BC = 7 < 8 = BD$, противоречие, значит, этот случай невозможен. ($\angle BXD = 90°$, т.к. $DC \perp \alpha$, $\alpha \parallel \beta$, значит, $DC \perp \beta$, а так как $BX \subset \beta$, то $BX \perp DC$)



Если X находится между D и C на CD, то:



Так как (ABX) - плоскость, параллельная α, то радиус окружности R, описанной около $\triangle ABX$ - это радиус цилиндра.

Так как $DC \perp \beta$, то $DC \perp BX$, $DC \perp AX$.

$\triangle ADX = \triangle BDX$ по гипотенузе и катету ($AD=BD$, DX-общая, $\angle BXD = \angle AXD = 90°$). Тогда $AX = BX$.

$BX^2 + DX^2 = BD^2$.

В $\triangle BXC$ $BX^2 + CX^2 = BC^2$, т.к. $\angle BXC = 90°$. Пусть $BX = x$, $DX = a$, $XC = b$. Тогда $CD = a+b$, $x^2 = 64 - a^2$, $x^2 = 49 - b^2$.

$\triangle AXB$, $AX = BX$. Тогда медиана MX - высота. $MX^2 + MB^2 = BX^2$ в $\triangle MBX$, где $\angle BMX = 90°$. $MX = \sqrt{x^2 - 4}$. ($MB = \frac{1}{2} AB = 2$).

$\sin(\angle MBX) = \frac{MX}{BX}$. $\sin(\angle MBX) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$.

$\triangle ABX$. $2R = \frac{AX}{\sin(\angle ABX)}$ $R = \frac{x \cdot x}{\sqrt{x^2-4} \cdot 2} = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-4+4}{\sqrt{x^2-4}}\right) =$

Чистовик   Вариант 24

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-4} + \frac{4}{\sqrt{x^2-4}}\right) = \frac{\sqrt{x^2-4}+\frac{4}{\sqrt{x^2-4}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{x^2-4}\cdot\frac{4}{\sqrt{x^2-4}}} = \sqrt{4} = 2,$$

по неравенству Коши

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда

$\sqrt{x^2-4} = \frac{4}{\sqrt{x^2-4}}$ $x^2-4=4$ $x^2=8$ $x=2\sqrt{2}$.

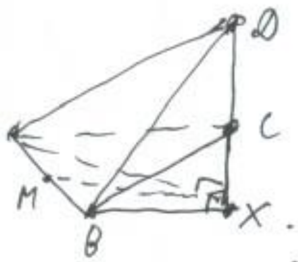
Так как выбрали тетраэдр, для которого радиус - наименьший, то для всех случаев, когда X лежит между C и D, взяли тот, в котором радиус - 2, то есть когда $x=2\sqrt{2}$.

$8=64-a^2$. $a^2=56$. $a=2\sqrt{14}$

$8=49-b^2$ $b^2=41$ $b=\sqrt{41}$.

$DC=a+b=2\sqrt{14}+\sqrt{41}$.

Если X находится ниже C на CD, то:



Теперь $BX=x$, $DX=a$, $CX=b$.

Всё также $BX^2=BD^2-DX^2$ в $\triangle BDX$ и $BX^2=BC^2-CX^2$ в $\triangle BCX$, всё также $AX=BX$ из равенства $\triangle ADX$ и $\triangle BDX$ ($BD=AD=8$, DX - общая, $\angle BXD=\angle AXD=90°$)

$x^2=64-a^2$; $x^2=49-b^2$,

Но теперь $CD=a-b$.

Аналогично предыдущему случаю MX - высота в $\triangle ABX$, ~~MX~~

$MX=\sqrt{x^2-4}$. $\sin(\angle ABX)=\frac{MX}{BX}=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$.

$2R=\frac{AX}{\sin(\angle ABX)}$. $R=\frac{x}{2\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}}=\frac{x^2}{2\sqrt{x^2-4}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-4}+\frac{4}{\sqrt{x^2-4}}\right)\geq 2$,

причем $R=2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4}=\frac{4}{\sqrt{x^2-4}}$

$x=2\sqrt{2}$.

Тогда $a=2\sqrt{14}$, $b=\sqrt{41}$.   Тогда $CD=2\sqrt{14}-\sqrt{41}$.

Ответ: $2\sqrt{14}+\sqrt{41}$; $2\sqrt{14}-\sqrt{41}$

№3.

Найдем, при каких значениях a и b система (1) может иметь решения.

$$(1)\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10 & (2)\\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b;\ 10). & (3)\end{cases}$$

(2) – уравнение круга с центром в $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{10}$.
Тогда, если (3) не имеет решений, то и (1) не имеет решений, а если (3) имеет решение $(a_0;b_0)$, то для этих $(a_0;b_0)$ существуют решения (2).

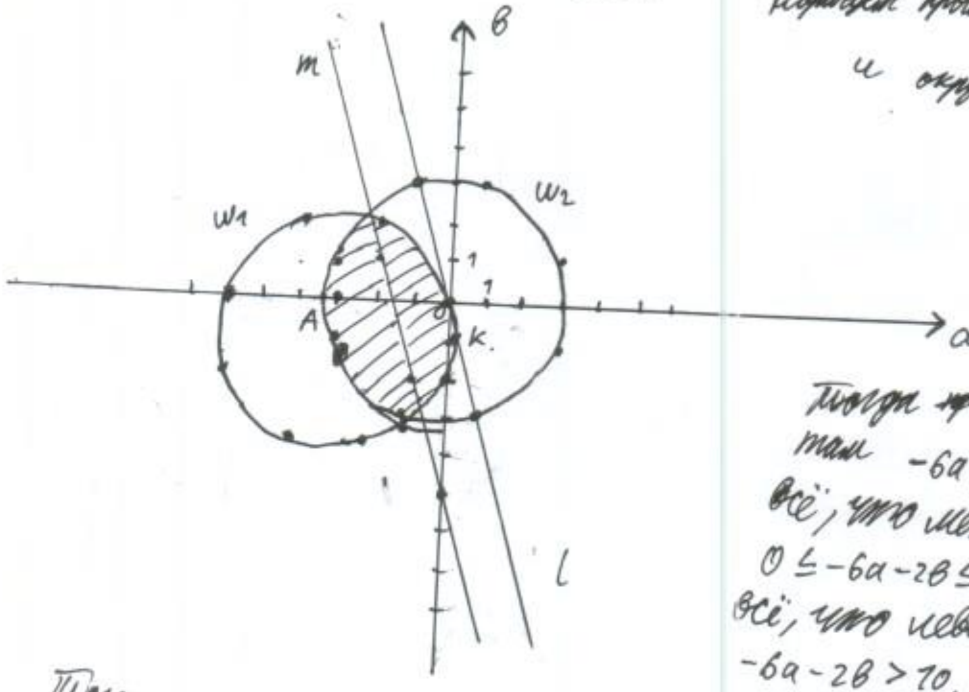
1.) при $-6a-2b<0$ (3) не имеет решений, так как $a^2+b^2\ge 0$.

при $0\le -6a-2b\le 10$ (3) $\Leftrightarrow$ $a^2+b^2\le -6a-2b$.

$$a^2+6a+b^2+2b\le 0$$
$$(a+3)^2-9+(b+1)^2-1\le 0$$
$$(a+3)^2+(b+1)^2\le 10$$ – уравнение круга w_1 с центром в $(-3;-1)$ и радиусом $\sqrt{10}$ в координатной плоскости aOb.

при $-6a-2b>10$ (3) $\Leftrightarrow$ $a^2+b^2\le 10$ – уравнение круга w_2 с центром в $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{10}$ в aOb.

Нарисуем прямые $b=-3a$; – l
$b=-3a-5$; – m
и окружности, описанные выше.



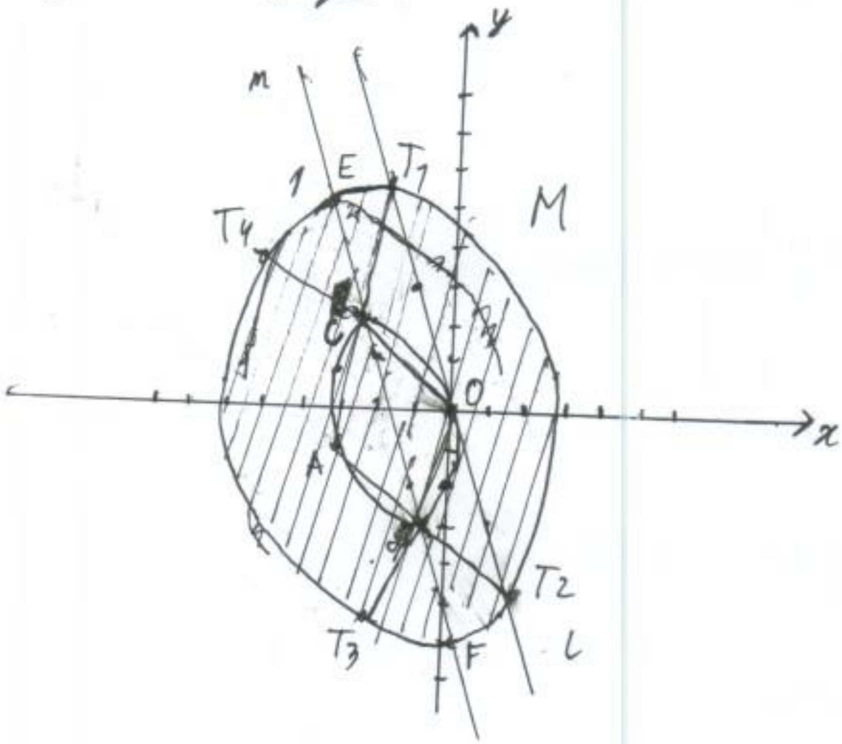
Тогда всё, что правее l – там $-6a-2b<0$. – 1 часть плоскости
всё, что между m и l – там $0\le -6a-2b\le 10$. (включая m и l) – 2 часть плоскости
всё, что левее m – там $-6a-2b>10$. – 3 часть плоскости

Тогда значения a и b, удовлетворяющие (3), это координаты всех точек, являющихся точками пересечения круга w_1 с 2 частью плоскости, а также точек, являющихся точками пересечения круга w_2 с 3 частью плоскости. Пусть $l\cap w_1=K$ и $l\cap w_1=O$. Узнаем, совпадает ли точка O с точкой K.

уравнение l: $b+3a=0$.

$\rho(O,l)=\frac{|-3\cdot 3-1|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$, значит, расстояние от центра окружности w_1 ~~рав~~ до прямой l равно радиусу w_1, значит l касается w_1 в точке O, и ~~др~~ другие точки K – совпадают с O:

Теперь ~~со~~ направим ось OX по ~~прямой~~ оси Oa, ось OY – ~~прямой~~ оси OB, ~~во~~ центр XOY оставим в центре aOB, и единичный отрезок оставим таким же, как и в плоскости aOB. Тогда ~~мно~~ заштрихованное множество точек на aOB совпадет с множеством точек, которые могут быть центрами ~~окружности~~ кругов (2). Тогда, зная заштрихованную область, ~~найдем~~ построим фигуру M и найдём её площадь.



Точки пересечения w_1 с m: $\begin{cases} b=-3a-5 \\ (a+3)^2+(b+1)^2=10 \end{cases}$

$(a+3)^2+(-3a-4)^2=10$

$a^2+6a+9+9a^2+24a+16=10$

$10a^2+30a+15=0$

$2a^2+6a+3=0$

$D=36-4\cdot 2\cdot 3=12$

$a=\frac{-6\pm 2\sqrt{3}}{4}$ $\qquad b=-\frac{18\pm 6\sqrt{3}}{4}-5$.

Чистовик . вариант 24.

Точки пересечения w_2 с m:

$$\begin{cases} b=-3a-5 \\ a^2+b^2=10 \end{cases}$$

$$a^2+9a^2+30a+25=10$$

$$10a^2+30a+15=0$$

$$2a^2+6a+3=0$$

$$D=36-4\cdot3\cdot2=12$$

$a=\frac{-6\pm\sqrt{12}}{4}$, $b=-\frac{18\pm6\sqrt{3}}{4}-5$, значит, точки пересечения w_2 с m и w_1 с m совпадают, и это точки C и D. Тогда M ~~это~~ имеет границу, пересекающую m в точках E и F.

Проведём касательные к w_1 и w_2 в точках C и D. Построим к ним перпендикуляры. Эти перпендикуляры пересекут границу M в точках T_1, T_2, T_3, T_4, причем $CT_4=CT_1=\sqrt{10}$; $DT_2=DT_3=\sqrt{10}$.

Тогда $S(M)=S_{сект}(T_4OT_3)-S(\triangle COD)+S_{сект}(T_1AT_2)-S(\triangle CAD)+$
$+S_{сект}(T_4CT_1)+S_{сект}(T_3DT_2)$.

Зная уравнения w_1 и w_2, и координаты точек C и D, и радиус, равный $\sqrt{10}$, можно легко посчитать эту площадь фигуры M

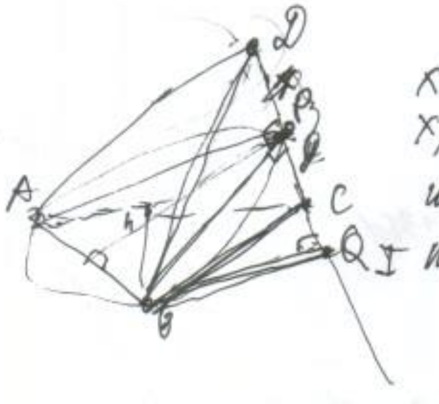
Черновик

$BC^2 + \cancel{2BK\cdot FM} = BD^2 - 2MC\cdot CD - CD^2 + \cancel{2BK\cdot MC} + 2BK\cdot CD$

$CD^2 + \cancel{2MC\cdot CD} + BC^2 - BD^2 - \cancel{2BK\cdot CD} = 0$

$+(2MC - 2BK)CD$

через AB.



$x+y=\ldots$

x, y - ко

или либо по 1 сторону либо по разные.

I по одну $BP^2 = 64 - x^2 \qquad 49 - y^2 = 64 - x^2$

$BP^2 = 49 - y^2. \qquad x^2 - y^2 = 15.$

$\cancel{AB^2 = }$

$h = \sqrt{BP^2 - 4} \qquad \sin\angle ABP = \frac{h}{BP}.$

$\frac{AP}{\sin(\angle ABP)} = 2R.$

$\cancel{BP^2 = 4\ldots}$

$R = \frac{BP}{2\cdot\frac{h}{BP}} = \frac{BP^2}{2h} = \frac{BP^2}{2\sqrt{BP^2-4}}$

$R = \frac{1}{2}\left(\frac{BP^2-4+4}{\sqrt{BP^2-4}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{BP^2-4} + \frac{4}{\sqrt{BP^2-4}}\right) \geq \sqrt{4} = 2.$

$=$ при $\sqrt{BP^2-4} = \frac{4}{\sqrt{BP^2-4}}$

$BP^2 - 4 = 4.$

$BP^2 = 8. \quad BP = 2\sqrt{2}.$

$y^2 = 49 - 8 = 41$

$x^2 = 64 - 8 = 56. \quad DC = \sqrt{41} + \sqrt{56}.$

II по разные. $DC = a - b.$

$BQ^2 = \cancel{a^2}\ 64 - a^2$

$BQ^2 = 49 - b^2.$

$h = \sqrt{BQ^2 - 4}$

$\sin\angle ABQ = \frac{h}{BQ}. \qquad \frac{AQ}{\sin\angle ABQ} = 2R$

$R = \frac{1}{2}\frac{BQ^2}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{BQ^2}{\sqrt{BQ^2-4}}\right)$ тоже самое.

$a^2 = 64 - 8 = 56$

$y^2 = 49 - 8 = 41.$

Черновик.

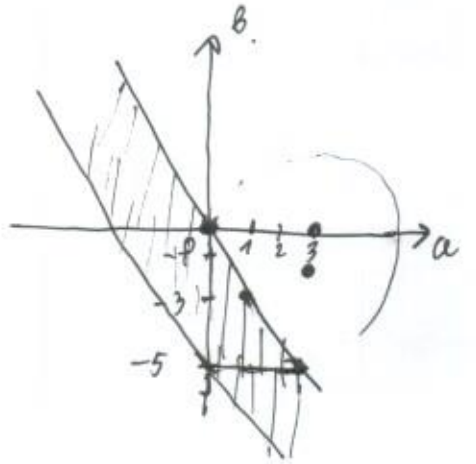
$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 10. \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b; 10).\end{cases}$ при $a^2+b^2>10$ – не выполняется; при $a^2+b^2 \le 10$!

↓

множество ~~окружностей~~ кругов с центром в $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{10}$;

где a и b → такие что ~~они все лежат~~ все точки вида $M(a;b)$ лежат

внутри круга радиуса $\sqrt{\min(-6a-2b; 10)}$ при $-6a-2b \ge 0$



$-6a-2b \ge 0$

~~$6a \; 3a+b \le$~~ $6a+2b \le 0$.

~~$b \ge -3a$~~ $b \le -3a$

при $(-6a-2b)<0$ – нет смысла

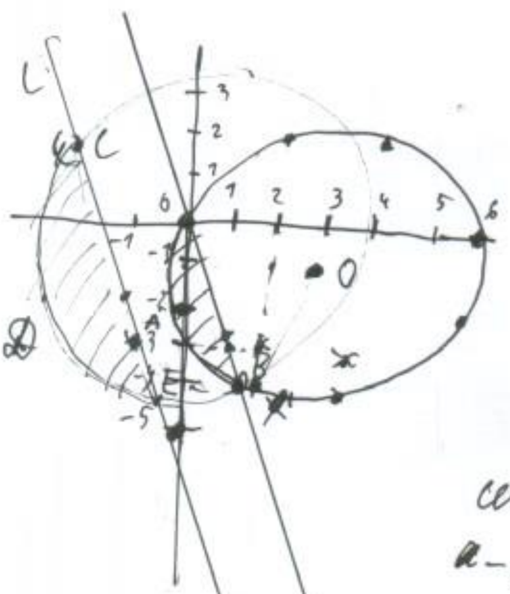
при $(-6a-2b) \ge 0$:

при $-6a-2b \le 10$ – радиус $\sqrt{-6a-2b}$.

$2b+6a+10 \ge 0$

$b \ge -5-3a$. ↓

окр с центром в $(3;0)$ и радиусом $\sqrt{-6a-2b}$.



$a^2+b^2 \le -6a-2b$

$a^2-6a+b^2+2b \le 0$.

$(a-3)^2-9+(b+1)^2-1 \le 0$

$(a-3)^2+(b+1)^2 \le 10$.

$\rho(O; l)=?$

$l: \quad 3a+b+5=0$.

$O(3;-1)$.

$\rho=\dfrac{|3\cdot 3-1+5|}{\sqrt{9+1}}=\dfrac{|9+4|}{\sqrt{10}}=\dfrac{13}{\sqrt{10}} \vee \sqrt{10}$

$13>10$ → не пересекает.

сегмент OAB – это множество a и b таких, что

$-6a-2b \ge 0$

$-6a-2b \le 10$ и $a^2+b^2 \le -6a-2b$.

если $-6a-2b > 10$, то нужен круг с центром в $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{10}$.

и CDE – сегмент, такой что $-6a-2b>10$ и $a^2+b^2 \le 10$

$S_9 = a_1+a_2+\dots+a_9$ целые числа → d-целое, a_1-целое   Черновик.

$a_1; a_2; a_3 \dots a_9$ $a_5 a_{18} > S-4$ $a_{10} a_{13} < S+60$. $a_1 = ?$

возраст, $d>0$
арифм

$a_5 = (a_1+4d)$ $a_{10} = (a_1+9d)$

$a_{18} = (a_1+17d)$ $a_{13} = (a_1+12d)$.

$S = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\dots+(a_1+8d) =$
$= 9a_1 + \frac{0+8d}{2}\cdot 9 = 9a_1+36d$.

$a_1^2+21a_1d+68d^2 > S-4$.

$a_1^2+21da_1+108d^2 < S+60$

$a_1^2+21a_1d+68d^2 > 9a_1+36d-4$.

$a_1^2+21a_1d+68d^2 < 0-40d^2+60+9a_1+36d$.

$\Downarrow$

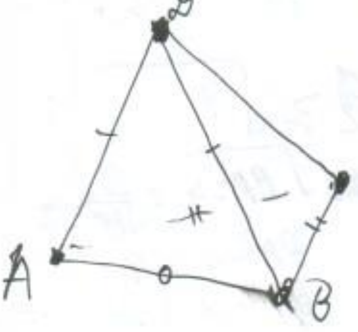
$60-40d^2 > -4$. $40d^2 < 64$.

$d^2 < \frac{16}{10} = 1{,}6$

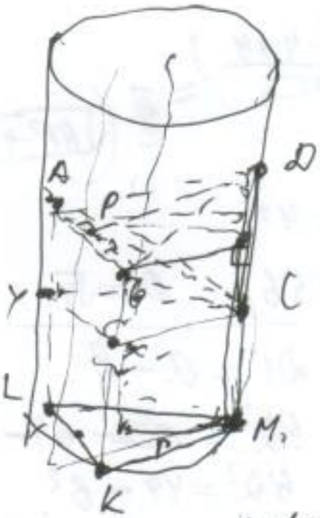
d-целое, >0 → $d = 1$.

$S = 9a_1+36$.

$a_1^2+21a_1$.



$AD = DB = 8$
$AC = BC = 7$
$AB = 4$



r-мин.
$LD = ?$

если $AB \perp \alpha$.
↓
пересечет

плоскость
PCD – через CD
↓
$(PCD) \perp \alpha$.

α - ближе к точке C. чем D.

$AB \perp (PCD) \Rightarrow AB \parallel \alpha$.
↓ ок.
$LK = AB$.

$KM^2 = BC^2-(BK-CM)^2$

$KM^2 = BD^2-(MD-BK)^2$.

$BC^2 - \cancel{BK^2} + 2BK\cdot CM - \cancel{CM^2} = BD^2 - \cancel{BK^2} - MD^2 + 2MD\cdot BK$

$MD = MC + CD$. $2BK(MC+CD)$

$MD^2 = MC^2+2MC\cdot CD+CD^2$

$= -MC^2-2MC\cdot CD-CD^2$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102933**

ID профиля: **199525**

Вариант 24

Чистовик вариант 24

№1.

$\begin{cases} НОД(a,b,c)=33 \\ НОК(a,b,c)=3^{19}\cdot 11^{15}. \end{cases}$

тогда $a=33p$, $b=33q$, $c=33k$, и $\begin{cases} НОД(p,q,k)=1 \\ НОК(p,q,k)=3^{18}\cdot 11^{14} \end{cases}$

p,q,k - натуральные.

~~В~~ Тогда числа p,q,k имеют вид $3^{x_i}\cdot 11^{y_i}$, где $x_i; y_i$ - степени, $x_i\geq 0$, $y_i\geq 0$, $x_i\leq 18$, $y_i\leq 14$. ~~При~~ Пусть ~~а~~

$p=3^{x_1}\cdot 11^{y_1}$; $q=3^{x_2}\cdot 11^{y_2}$; $k=3^{x_3}\cdot 11^{y_3}$. Тогда 1 из чисел x_1, x_2, x_3 - это 0, и ещё одно из них - это 18, иначе, если нет числа 0, то $НОД(p,q,k)>1$, а если нет 18, то ~~или~~ либо все $x_i<18$, тогда $НОК(p,q,k) \neq 3^{18}\cdot 11^{14}$, либо есть $x_i>18$, тогда $НОК(p,q,k)\neq 3^{18}\cdot 11^{14}$.

Аналогично среди чисел y_1, y_2, y_3 есть число 0 и есть число 14. ~~Один~~ Последний x_i ~~...~~ может принимать только целые значения от 0 до 18; последний y_i может принимать только целые значения от 0 до 14. Обозначим их как x_k и y_k.

1) Тогда, если $x_k\neq 0$, $x_k\neq 18$, $y_k\neq 0$, $y_k\neq 14$, то из двух групп: $0; 18; x_k$ и $0; 14; y_k$ можно составить 6 разных ~~...~~ вариантов ~~из~~ троек пар:

$(0;0)$; $(18;14)$, $(x_k;y_k)$

$(0;0)$; $(18;y_k)$, $(x_k;14)$

$(0;14)$; $(18;0)$; $(x_k;y_k)$

$(0;14)$; $(18;y_k)$; $(x_k;0)$

$(0;y_k)$; $(18;0)$; $(x_k;14)$

$(0;y_k)$; $(18;14)$; $(x_k;0)$

Соответственно есть 6 разных групп p,q,k для каждых определённых значений x_k и y_k. Так как в тройке $(a;b;c)$ можно a,b,c переставлять местами, получив 6 разных порядков, то для x_k и y_k существуют 36 вариантов $(a;b;c)$.

Чистовик вариант 24

При $x_k \neq 0, x_k \neq 18, y_k \neq 0, y_k \neq 14$ различных пар (x_k, y_k) – это всего $17 \cdot 13 = 170 + 51 = 221$

Тогда количество $(a;b;c)$ – $36 \cdot 221 = 7956$

$$\begin{array}{r} \times 221 \\ 36 \\ \hline 1326 \\ 663 \\ \hline 7956 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 18 \\ 60 \\ \hline 1080 \end{array}$$

2) При $x_k = 0, y_k \neq 0; y_k \neq 14$:

0; 0; 18

0; 14; y_k. – всего 3 разных

(18; y_k); (0;0), (0;14)

(18;14); (0;0), (0;y_k)

(18;0); (0;14), (0;y_k).

Тогда количество (a;b;c) для одного значения y_k при $x_k = 0$ – это $3 \cdot 6 = 18$.

при $x_k = 0; y_k \neq 0, y_k \neq 14$ – таких 13 случаев

3) при $x_k = 18, y_k \neq 0, y_k \neq 14$ – таких 13 случаев, аналогично случаю 2).

4) при $x_k \neq 0, y_k = 0; x_k \neq 18$ – таких 17 случаев, аналогично 2) случаю, есть 18 разных (a;b;c) для определённого значения x_k

5) при $x_k \neq 0, x_k \neq 18, y_k = 14$ – таких 17 случаев, аналогично 4).

всего среди 2) – 5) случаев получаем ещё $(13+17+13+17) \cdot 18 = (30+30) \cdot 18 = 60 \cdot 18 = 1080$ вариантов (a;b;c).

6.) при $y_k = 0, x_k = 0$

0 0 18 (18;0); (0;0), (0;14)

0 0 14 (18;14); (0;0), (0;0) – есть 1 случай, где p, q, k – различные, и 1, где 2 числа из p, q, k – совпадают.

Тогда для этой пары x_k и y_k количество вариантов (a;b;c) – это $6 + 3 = 9$.

7.) при $y_k = 14$, $x_k = 18$.

0 18 18 (0;0); (18;14), (18;14) – 2 одинаковых числа из p, q, k

0 14 14. (0;14); (18;0); (18;14) – все разные.

вариантов (a;b;c) – ещё 9.

8) при $y_k = 14$, $x_k = 0$

0; 0; 18 (18; 0); (0; 14); (0; 14)
0; 14; 14 (18; 14); (0; 14); (0; 0).

ещё 9 вариантов (a; b; c).

9) при $y_k = 0$; $x_k = 18$.

0; 18; 18 (0; 14); (18; 0); (18; 0)
0; 0; 14. (0; 0); (18; 0); (18; 14)

ещё 9 вариантов (a; b; c).

$$\begin{array}{r} 7956 \\ +1116 \\ \hline 9072 \end{array}$$

Итого $7956 + 1080 + 9 + 9 + 9 + 9 = 7956 + 1080 + 36 = 7956 + 1116 = 9072$.

Ответ: 9072

чистовик вариант 24

№5.

$\cancel{\sqrt{29}}$ $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$; $\log_{(x+1)^2}(29-x)$; $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$.

$\cancel{29-x=a,}$ ОДЗ: $\begin{cases} 29-x>0 \\ 29-x\neq 1 \\ \frac{x}{7}+7>0 \\ \frac{x}{7}+7\neq 1 \\ -x-1>0 \\ x+1\neq 1 \\ x+1\neq -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x<29 \\ x\neq 28 \\ x>-49 \\ x\neq -42 \\ x<-1 \\ x\neq -2 \\ x\neq 0 \end{cases}$

$x\in(-49;-42)\cup(-42;-2)\cup(-2;-1)$.

$29-x=a$, $\frac{x}{7}+7=b$; $-x-1=c$.

Получаем:

$2\log_a b$; $\frac{1}{2}\log_c a$; $2\log_b c$.

I если $2\log_a b=2\log_b c=\frac{1}{2}\log_c a-1$, то

$2\log_a b=2t=2\log_b c$

$b=a^t$. $c=b^t$. $\frac{1}{2}\log_c a-1=2t$

$a=c^{4t+2}$ $\log_c a=4t+2$

$a=a^{t^2\cdot(4t+2)}$

$1=4t^3+2t^2$

$4t^3+2t^2-1=0$.

$(2t-1)(2t^2+2t+1)=0$

$\left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2} \\ t^2+t+\frac{1}{2}=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2} \\ \left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=0, \text{ решений нет} \end{array}\right.$ $t=\frac{1}{2}$.

тогда $(29-x)^{\frac{1}{2}}=\frac{x}{7}+7$.

$29-x=\frac{x^2+14x+49}{49}$

$49\cdot 29-49x=x^2+14x+49$.

$x^2+63x\cancel{+49}-49\cdot 28=0$.

$D=7^2\cdot 9^2+4\cdot 7^2\cdot 28=7^2(81+112)=7^2\cdot 193$.

$x=\frac{-63\pm 7\sqrt{193}}{2}$. $\frac{-63-7\sqrt{193}}{2}<-49$, не удовлетворяет.

Чистовик вариант 24

$\frac{-63+7\sqrt{193}}{2} = \frac{7(\sqrt{193}-9)}{2} > 0$, не удовлетворяет. ОДЗ

II если $2\log_a b = \frac{1}{2}\log_c a = 2\log_b c - 1 = 2t$.

$b = a^t$; $\log_c a = 4t$; $\log_b c = \frac{2t+1}{2}$.

$b = a^t$. $a = c^{4t}$. $c = b^{t+\frac{1}{2}}$

$a = c^{4t}$; $c = a^{t^2+\frac{1}{2}t}$

$a = a^{4t^3+2t^2}$

$4t^3+2t^2 = 1$.

$t = \frac{1}{2}$ (уже решали).

$a = c^{4t}$

$29-x = (-x-1)^{4\cdot\frac{1}{2}}$

$29-x = (x+1)^2$.

$29-x = x^2+2x+1$

$x^2+3x-28=0$

$D = 9+4\cdot 28 = 9+112 = 121$.

$x = \frac{-3\pm 11}{2}$. $\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-7 \end{array}\right.$ Так как $4>-7$, то $x=-7$. удовлетворяет ОДЗ, а $x=4$ - не удовлетворяет ОДЗ.

Тогда $29-x=36$, $\frac{x}{7}+7=6$; $-x-1=6$.

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_6 6 = 1$

$\log_{(x+1)^2}(29-x) = \log_{36} 36 = 1$.

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = \log_{\sqrt{6}} 6 = 2$.

III если $2\log_a b - 1 = \frac{1}{2}\log_c a = 2\log_b c = 2t$.

$a = c^{4t}$; $c = b^t$; $b = a^{\frac{2t+1}{2}}$

$a = b^{4t^2}$, $b = a^{t+\frac{1}{2}}$

$a = a^{4t^3+2t^2}$

$4t^3+2t^2=1$

$t=\frac{1}{2}$ (уже решали).

Тогда

$\cancel{29-x}\ \frac{x}{7}+7=29-x$

$\frac{x}{7}+x=29-7$

$\frac{8}{7}x=22$

$x=\frac{22\cdot 7}{8}$, но $\frac{22\cdot 7}{8}>0-7$, не удовлетворяет О.Д.З.

Ответ: при $x=-7$.

Черновик.

$a, b, c \in N$

$\begin{cases} НОД(a,b,c)=33. \\ НОК(a,b,c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$

тогда $a=33p$, $b=33q$, $c=33k$, p, q, k ~~взаимно~~ не имеют все общего делителя ~~проста~~

33^3pqk $33\cdot$

$НОД(p,q,k)=1$

$НОК(p,q,k)=3^{18}\cdot 11^{14}$

значит $p=3^{x_1}\cdot 11^{y_1}$

$q=3^{x_2}\cdot 11^{y_2}$

$k=3^{x_3}\cdot 11^{y_3}$

и одно из чисел $x_1, x_2, x_3 - 0$

и одно из чисел $y_1, y_2, y_3 - 0$

пусть ~~$x_1=0$~~ и $0 \le y_1, y_2, y_3 \le 14$

$0 \le x_1, x_2, x_3 \le 18$ и ~~другое~~ - есть число, у которого $x_i=18$,

и есть число, у которого $y_i=14$

	1	2	3
x_i:	0;	18;	x
y_i:	0;	14;	y.
	1.	2	3

из них комбинации. при ~~$y=14$ и $x=18$~~

$3\cdot 2$ - способов расставить, если $x\ne 18, x\ne 0, y\ne 18, y\ne 0$.

6 ~~во~~ вариантов p, q, k.

если $x=18$

$y\ne 14, y\ne 0$

каждым p, q, k - 6 (перестановки) если важен порядок (a, b, c) или 1 если не важен.

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$; $\log_{(x+1)^2}(29-x)$; $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

? x 2 равны, третье > на 1.

условия: $29-x>0$, $29-x\ne 1$ $\quad x+49>0$

$-x-1>0$

$x<29$ ✓

$x\ne 28$ ✓

$x\ne 0$ ✓

$x\ne -1$ ✓

$x+49\ne 7$ $\quad x\ne -42$

$x<-1$

$x>-49$.

$\frac{x}{7}+7\ne 1$

$x\ne 0$

$x\ne -1$.

$x\in(-49;-42)\cup(-42;-1)$.

$2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)$; $\frac{1}{2}\log_{(x+1)}(29-x)$; $2\log_{(\frac{x}{7}+7)}(-x-1)$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$; $\log_{(-x-1)}\sqrt{29-x}$; $2\log_{(\frac{x}{7}+7)}(-x-1)$.

$\frac{x}{7}+7=a$, $\sqrt{29-x}=b$, $-x-1=c$.

y

Черновик

$\log_b a$; $\log_c b$; $2\log_a c$.

$\frac{\ln a}{\ln b}$; $\frac{\ln b}{\ln c}$; $\frac{\ln c^2}{\ln a}$.

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)<0$.

$\frac{x}{7}+7>0$

$b \geq \sqrt{30}$.

при $x \in (-49; -42)$ $-x-1>1$

$\frac{x}{7}+7<1$

$\sqrt{24-x}>1$

$\log_b a<0$

если $\frac{\ln a}{\ln b}=\frac{\ln b}{\ln c}$

$\ln a \ln c=\ln^2 b$.

и $\frac{2\ln c}{\ln a}=\frac{\ln a}{\ln b}+1$

$2 \ldots = \ln^2 a$

$2\ln c\ln b=\ln^2 a+\ln a\ln b$.

$\frac{a_1}{b_1}$; $\frac{b_1}{c_1}$; $\frac{2c_1}{a_1}$.

I $a_1^2=2c_1b_1$

$\frac{b_1}{c_1}=\frac{a_1}{b_1}+1$

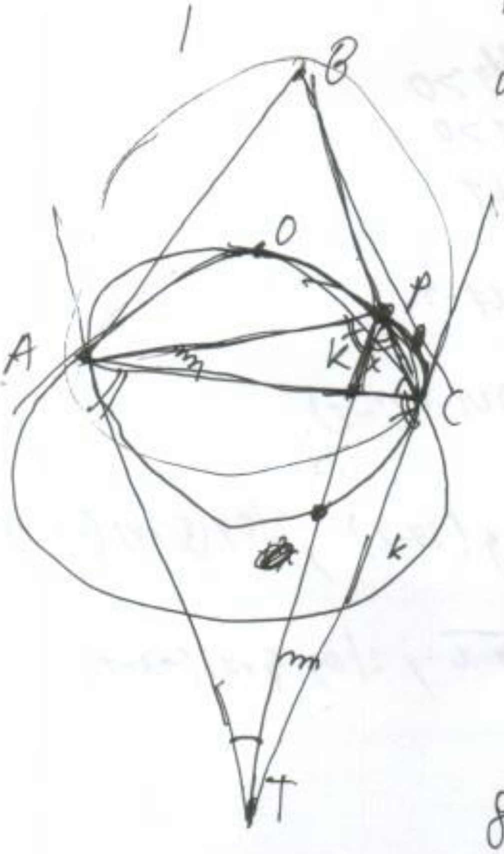
$b_1^2=a_1c_1+b_1c_1$

$2\log_a b^2$; $\log_{c^2} a^2$; $\log_b c$

по их ...

$\frac{\ln c}{\ln b}=\frac{\ln c}{\ln a}\cdot\frac{\ln a}{\ln b}=\log_a c\cdot\log_b a$.

1



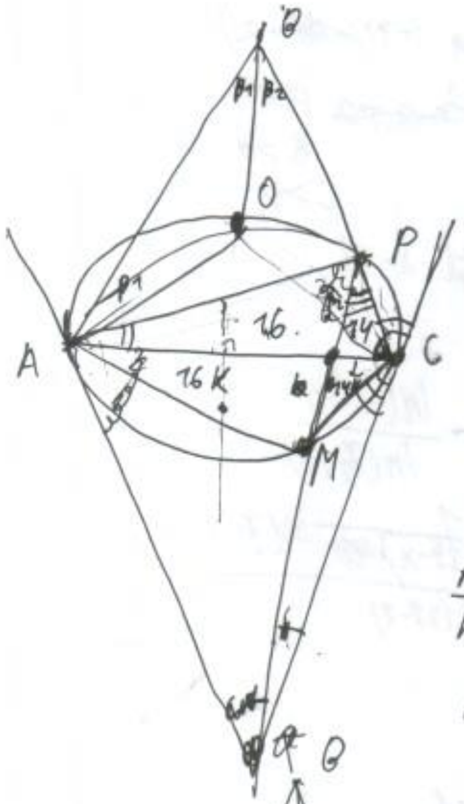
остроуг.

$S(APK)=16$

$S(CPK)=14$

$S(ABC)=?$

Черновик.



$S(CPK) : S\ AK$

$\angle A - \beta_1 = \angle C - \beta_2$

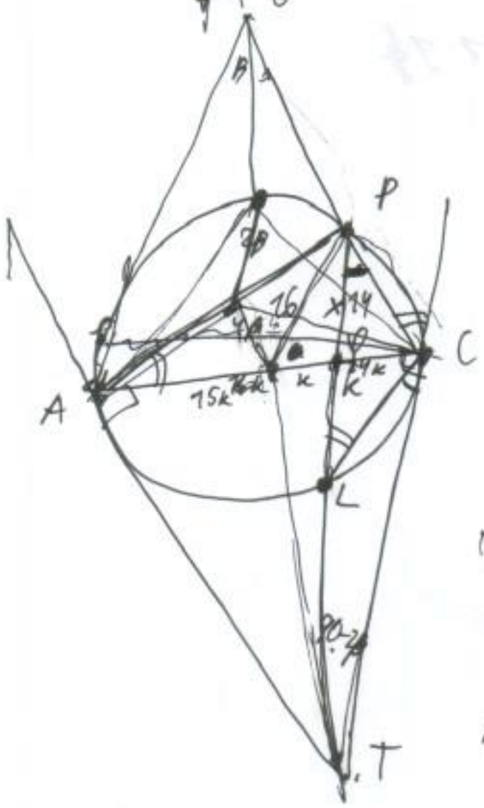
$\cancel{\beta_1 + \beta_2}$

$\angle AOC = 180^\circ - \angle A + \beta_1 - \angle C + \beta_2 = \angle B + \angle B = 2\angle B.$

$\frac{AC}{\sin(2\angle B)} = 2R_2 \Rightarrow \frac{2R_1}{2\cos\beta} = \frac{R}{\cos\beta}$

$\frac{AK}{KC} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}.$

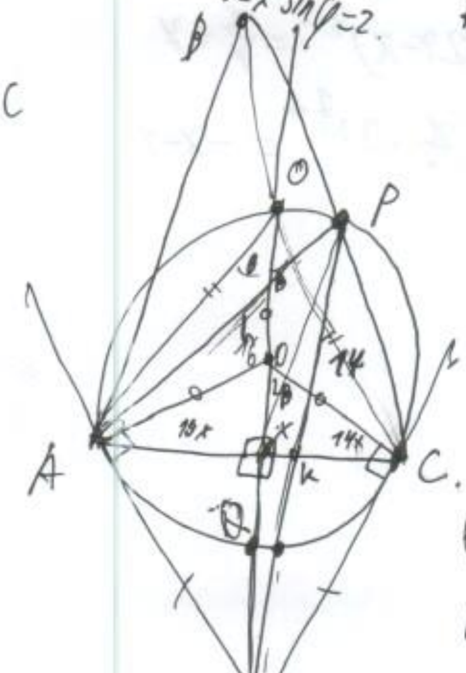
$\frac{AP \cdot PC \cdot \sin 2\beta}{2} = 30.$



$\frac{16kx\sin\varphi}{2} + \frac{14kx\sin\varphi}{2} = 30$

$60 = 30kx\sin\varphi$

$kx\sin\varphi = 2.$



$\frac{h_p \cdot 14x}{2} = 14$

$h_p = \frac{2}{x}.$

$OQ = 2R.$

$TC^2 = TQ \cdot (TQ + 2R)$

$\cancel{(R+TQ)^2 = R^2 + TC^2}$

$R \cdot \sin 2\beta = \frac{AC}{2}$

Черновик.

$1+\log_{\sqrt{29-x}}\cancel{a}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$a;\ b;\ c.$

$(-49;-42)\to a<0;\ b\geq0.$ $\quad$ при $(-42;\cancel{\ }-2)$ $\quad$ $a\geq0$ $\quad$ $b\geq0.$ $\quad$ $c>$

$\downarrow$ при $(-49;-42)$ $\quad c<0.$

$\cancel{2}\,\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\cancel{2}\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1).$

$\cancel{\sqrt{29-x}=\frac{x}{7}+7}$

$f(x)=\frac{\ln\left(\frac{x}{7}+7\right)}{\ln\sqrt{29-x}}\quad\frac{\ln\left(\frac{x}{7}+7\right)}{\ln(29-x)}-\frac{\ln(-x-1)}{\ln\left(\frac{x}{7}+7\right)}$

$f'(x)=\frac{\frac{1}{\frac{x}{7}+7}\ln(29-x)+\frac{1}{(29-x)\cdot(-1)}\ln\left(\frac{x}{7}+7\right)}{\ln^2(29-x)}-$

$-\frac{1}{x+1}(-1)\cdot\ln\left(\frac{x}{7}+7\right)-\frac{\ln(-x-1)}{\frac{x}{7}+7}$

$\frac{x}{7}+7=29-x$

$\frac{8}{7}x=22$ $\qquad \frac{x}{7}+7=\frac{22}{8}+7=\cancel{\ }\ 9\frac{6}{8}$

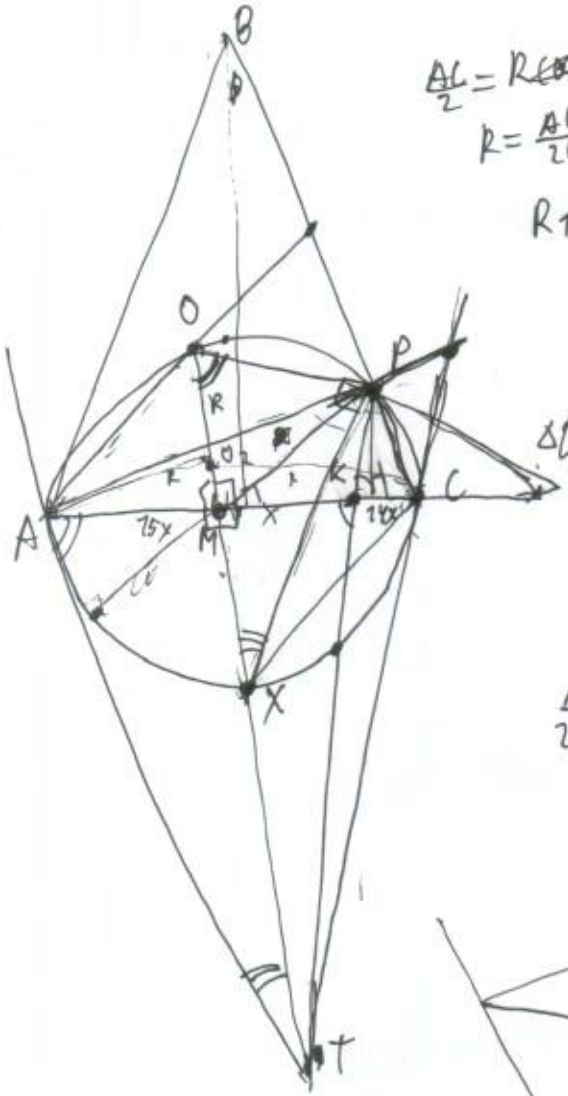
$x=\frac{22\cdot7}{8}$

$\cancel{-x-1=\frac{22\cdot7-8}{8}=\frac{22\cdot7}{8}-1}$

$\cancel{\sqrt{29-x}}\quad(29-x)^{\frac{1}{2}t}=\frac{x}{7}+7$

$\left(\frac{x}{7}+7\right)^{\frac{1}{2}t}=-x-1$

Черновик



$\frac{AC}{2} = R\cancel{\cos 2\beta}\sin 2\beta$

$R = \frac{AC}{2\sin 2\beta}$

$R_1 = \frac{AC}{2\sin\beta}$

$\angle ABC = \arctg\frac{3}{5}.$

$\frac{PC}{BC} = ?$

$\triangle OPX \sim \triangle AMT.$

$\frac{AT}{2R} = \frac{\frac{AC}{2}}{OP} = \frac{TM}{PX}$ $\quad (TX+R) = \frac{AT^2}{TM}.$

$R\cdot AC = AT\cdot OP$

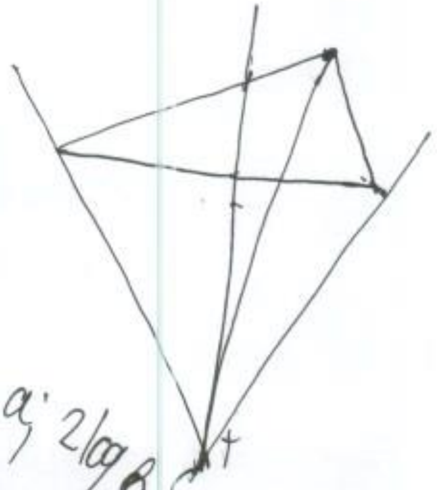
$\frac{AC^2}{2\sin 2\beta} = TC\cdot OP.$

$\frac{R}{\frac{AC}{2}} = \frac{TX+R}{AT} = \frac{AT}{TM}.$

$2RAT = AC\cdot(TX+R)$

$2RTM = AC\cdot AT.$

$\frac{R}{AT} = \frac{OP}{AC} = \frac{AC}{2TM}.$



$2\log_a b;\ \frac{1}{2}\log_c a;\ 2\log_b c.$

$2t \qquad 2t+1 \qquad 2t$

$a^t = b \qquad c = b^{2t} \qquad c^{4t+2} = a.$

$c = a^{t^2}$

$a^{4t^3+2t^2} = a.$

$4t^3+2t^2-1=0$