Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102928**

ID профиля: **832039**

Вариант 24

Математика. 11 класс. Часть 1. Вариант 24. Чистовик

$d>0,\ a_1, a_2 \dots a_n \in \mathbb{Z}$

1. $\begin{cases} a_5 \cdot a_{18} > S-4 \\ a_{10} \cdot a_{13} < S+60. \end{cases}$

$$S = \frac{a_1+a_9}{2} \cdot 9 = \frac{2a_1+8d}{2} \cdot 9 = (a_1+4d)\cdot 9$$

$a_5 = a_1+4d$

$a_{18} = a_1+17d$

$a_{10} = a_1+9d$

$a_{13} = a_1+12d$

$$a_5 \cdot a_{18} = (a_1+4d)(a_1+17d) =$$
$$= a_1^2 + 17a_1d + 4a_1d + 17\cdot 4d^2 =$$
$$= a_1^2 + 21a_1d + 68d^2.$$

$$a_{10}\cdot a_{13} = (a_1+9d)(a_1+12d) = a_1^2 + 21a_1d + 9\cdot 12d^2 =$$
$$= a_1^2 + 21a_1d + 108d^2.$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 68d^2 > 9a_1 + 36d - 4 \\ a_1^2 + 21a_1d + 108d^2 < 9a_1 + 36d + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + (21d-9)a_1 + (68d^2 - 36d + 4) > 0 \quad (1) \\ a_1^2 + (21d-9)a_1 + (108d^2 - 36d - 60) < 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$D_1 = (21d-9)^2 - 4(68d^2 - 36d + 4) =$$
$$= 441d^2 - 378d + 81 - 272d^2 + 144d - 16 =$$
$$= 169d^2 - 234d + 65 = 13(13d^2 - 18d + 5)$$

$$D_2 = (21d-9)^2 - 4(108d^2 - 36d - 60) =$$
$$= 441d^2 - 378d + 81 - 432d^2 + 144d + 240 =$$
$$= 9d^2 - 234d + 321 = 3(3d^2 - 78d + 107)$$

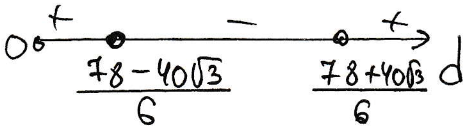
Чтобы у неравенства 2 было решение, дискриминант должен быть больше 0.

$3(3d^2-78d+107)>0 \quad | :3$

$3d^2-78d+107>0$

$D = 78^2 - 4\cdot 3\cdot 107 = 4800 = 10^2\cdot 4^2\cdot 3$

$d_{1,2} = \dfrac{78 \pm 40\sqrt{3}}{6}$



По условию прогрессия возрастает, значит, $d>0$.

$78-40\sqrt{3} \vee 0 \quad | \cdot 78+40\sqrt{3}>0$

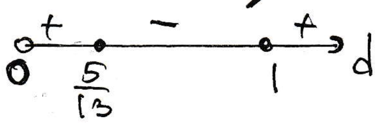
$78^2 - 4800 = 6084 - 4800 > 0$

$d \in \left(0; \dfrac{78-40\sqrt{3}}{6}\right) \cup \left(\dfrac{78+40\sqrt{3}}{6}; +\infty\right)$

$D_1 = 13(13d^2-18d+5)$

$13d^2-18d+5 \geqslant 0$

$13(d-1)\left(d-\frac{5}{13}\right) \geqslant 0$



неравенство (1): $a_1^2 + (21d-9)a_1 + (68d^2-36d+4) > 0$

При $d \in \left(\frac{5}{13}; 1\right)$ $a_1 \in \mathbb{R}$.

При $d \in \left(0; \frac{5}{13}\right] \cup [1; +\infty)$

$a_1 \in \left(-\infty; \dfrac{9-21d-\sqrt{13(13d^2-18d+5)}}{2}\right) \cup$

$\cup \left(\dfrac{9-21d+\sqrt{13(13d^2-18d+5)}}{2}; +\infty\right)$

чистовик

Неравенство (2): $a_1^2+(21d-9)a_1+(108d^2-36d-60)<0$

При $d\in\left[\frac{78-40\sqrt3}{6};\ \frac{78+40\sqrt3}{6}\right]$ решений нет.

При $d\in\left(0;\ \frac{78-40\sqrt3}{6}\right)\cup\left(\frac{78+40\sqrt3}{6};\ +\infty\right)$

$$a_1\in\left(\frac{9-21d-\sqrt{3(3d^2-78d+107)}}{2};\ \frac{9-21d+\sqrt{3(3d^2-78d+107)}}{2}\right)$$

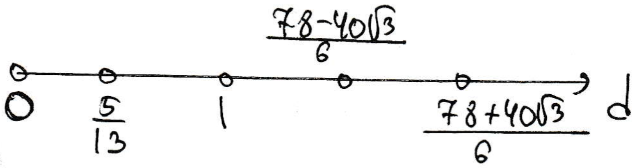
Особые точки для d из двух неравенств:

$$d\in\left\{\frac{5}{13};\ 1;\ 0;\ \frac{78-40\sqrt3}{6};\ \frac{78+40\sqrt3}{6}\right\}$$

$$\frac{78+40\sqrt3}{6}>\frac{78}{6}>1.$$

$$\frac{78-40\sqrt3}{6}=\frac{39-20\sqrt3}{3}>\frac{39-20\cdot1{,}8}{3}=\frac{39-36}{3}=1$$

$$(1{,}8^2=3{,}24>3)$$



1) $d\in\left(0;\ \frac{5}{13}\right]$

$$\begin{cases} a_1\in\left(-\infty;\ \frac{9-21d-\sqrt{13(13d^2-18d+5)}}{2}\right)\cup\left(\frac{9-21d+\sqrt{13(13d^2-18d+5)}}{2};\ +\infty\right) \\ a_1\in\left(\frac{9-21d-\sqrt{3(3d^2-78d+107)}}{2};\ \frac{9-21d+\sqrt{3(3d^2-78d+107)}}{2}\right)\end{cases}$$

Так как последовательность целочисленная, то $d\in\mathbb{Z}$. На промежутке $\left(0;\ \frac{5}{13}\right]$ нет целых чисел $\Rightarrow$ нет решений.

2) $d\in\left(\frac{5}{13};\ 1\right]$. $d=1$.

$$\begin{cases} a_1\in\left(\frac{9-21d-\sqrt{3(3d^2-78d+107)}}{2};\ \frac{9-21d+\sqrt{3(3d^2-78d+107)}}{2}\right) \\ a_1\in\left(-\infty;\ \frac{9-21d-\sqrt{13(13d^2-18d+5)}}{2}\right)\cup\left(\frac{9-21d+\sqrt{13(13d^2-18d+5)}}{2};\ +\infty\right)\end{cases}$$

чистовик

$$\begin{cases} a_1 \in \left(\frac{9-21-\sqrt{3(3-78+107)}}{2}; \frac{9-21+\sqrt{3(3-78+107)}}{2}\right) \\ a_1 \in \left(-\infty; \frac{9-21-\sqrt{13(13-18+5)}}{2}\right) \cup \left(\frac{9-21+\sqrt{13(13-18+5)}}{2}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \in \left(\frac{-12-4\sqrt{6}}{2}; \frac{-12+4\sqrt{6}}{2}\right) \\ a_1 \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{12}{2}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \in (-6-2\sqrt{6}; -6+2\sqrt{6}) \\ a_1 \neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a_1 \in (-6-2\sqrt{6}; -6) \cup (-6; -6+2\sqrt{6})$.

3) $d \in \left(1; \frac{78-40\sqrt{3}}{6}\right)$

$$\frac{78-40\sqrt{3}}{6} < \frac{78-40\cdot 1{,}7}{6} = \frac{10}{6} = 1\frac{2}{3}.$$

Целых d нет $\Rightarrow$ нет решений.

4) $d \in \left[\frac{78-40\sqrt{3}}{6}; \frac{78+40\sqrt{3}}{6}\right]$. решений нет.

5) $d \in \left(\frac{78+40\sqrt{3}}{6}; +\infty\right)$.

$$\begin{cases} a_1 \in \left(-\infty; \frac{9-21d-\sqrt{13(13d^2-18d+5)}}{2}\right) \cup \left(\frac{9-21d+\sqrt{13(13d^2-18d+5)}}{2}; +\infty\right) \\ a_1 \in \left(\frac{9-21d-\sqrt{3(3d^2-78d+107)}}{2}; \frac{9-21d+\sqrt{3(3d^2-78d+107)}}{2}\right) \end{cases}$$

$13(13d^2-18d+5) < 3(3d^2-78d+107)$

$169d^2 - \cancel{234d} + 65 < 9d^2 - \cancel{234d} + 321$

$160d^2 < 256$.

$d^2 < \frac{256}{160}$; $\quad |d| < \frac{16}{4\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$.

$\frac{39+20\sqrt{3}}{3} \vee \frac{4}{\sqrt{10}}$

$\frac{39\sqrt{10}+20\sqrt{30}-12}{3\sqrt{10}} \vee 0$ $\Rightarrow$ нет решений.

$a_1 \in (-6-2\sqrt{6}; -6) \cup (-6; -6+2\sqrt{6})$.

$-6-2\sqrt{6} < -6-4 = -10$

$-6-2\sqrt{6} > -6-2\cdot 2{,}5 = -6-5 = -11$

лист 4.

$-11 < -6 - 2\sqrt{6} < -10.$

$-6 + 2\sqrt{6} < -6 + 2 \cdot 2{,}5 = -6 + 5 = -1$

$-6 + 2\sqrt{6} > -6 + 2 \cdot 2 = -2.$

$-11 < -6 - 2\sqrt{6} < -10$

$-2 < -6 + 2\sqrt{6} < -1.$

$a_1 \in (-6-2\sqrt{6}; -6) \cup (-6; -6+2\sqrt{6})$

$a_1 \in \mathbb{Z}$

$a_1 \in \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}.$

Ответ: $a_1 \in \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}.$

чистовик.

3. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 10\\ a^2+b^2\leq \min(-6a-2b,10)\end{cases} \Leftrightarrow$

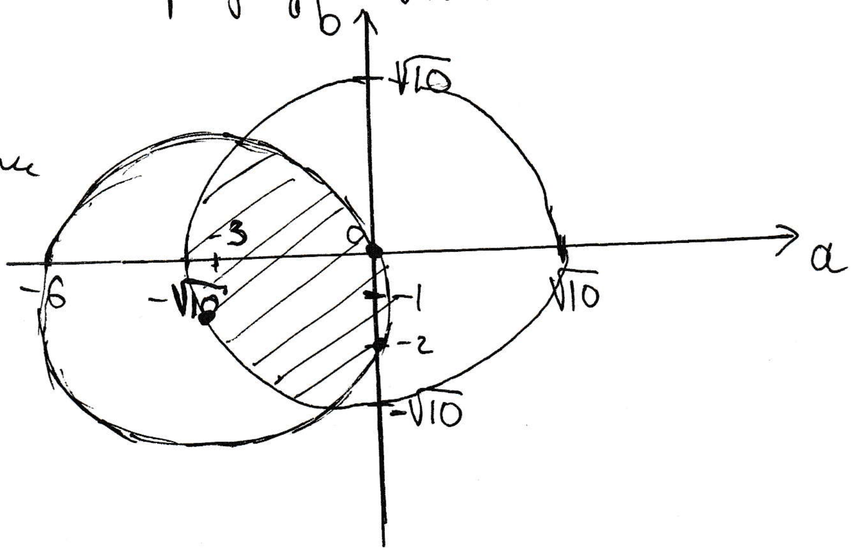
$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 10\\ a^2+b^2\leq -6a-2b\\ a^2+b^2\leq 10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 10\\ a^2+6a+9+b^2+2b+1\leq 10\\ a^2+b^2\leq 10\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 10\\ (a+3)^2+(b+1)^2\leq 10\\ a^2+b^2\leq 10.\end{cases}$

Рассмотрим систему $\begin{cases}(a+3)^2+(b+1)^2\leq 10 \ (1)\\ a^2+b^2\leq 10. \ (2)\end{cases}$

Это неравенства кругов, радиуса $\sqrt{10}$.

Центр круга (1) лежит на окружности $a^2+b^2=10$.



$(a+3)^2+(b+1)^2\leq 10$

$a=0$:

$9+(b+1)^2\leq 10$

$-1\leq b+1\leq 1$

$-2\leq b\leq 0$

$b=0$:

$(a+3)^2+1\leq 10$

$(a+3)^2\leq 9$

$-3\leq a+3\leq 3$

$-6\leq a\leq 0$

Решением системы $\begin{cases}(a+3)^2+(b+1)^2\leq 10\\ a^2+b^2\leq 10\end{cases}$

является пересечение кругов.

То есть решение $a^2+b^2\leq \min(-6a-2b,10)$ — пересечение кругов.

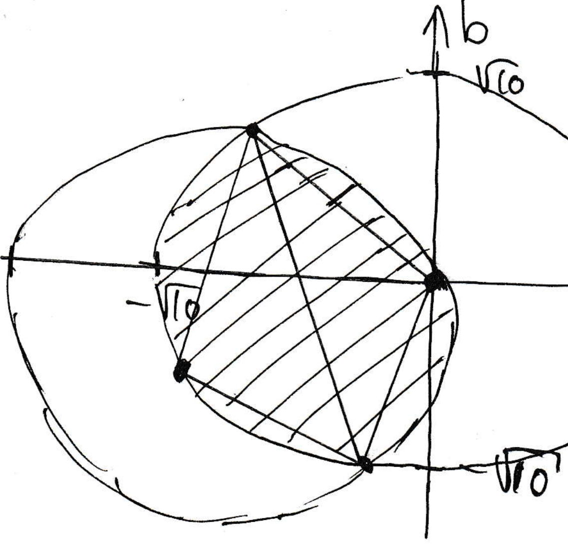
Рассмотрим неравенство $(x-a)^2+(y-b)^2\leq 10$.

Это круг радиуса $\sqrt{10}$ с центром в точке $(a;b)$.

a, b должны подходить под $a^2+b^2\leq \min(-6a-2b,10)$.

чистовик

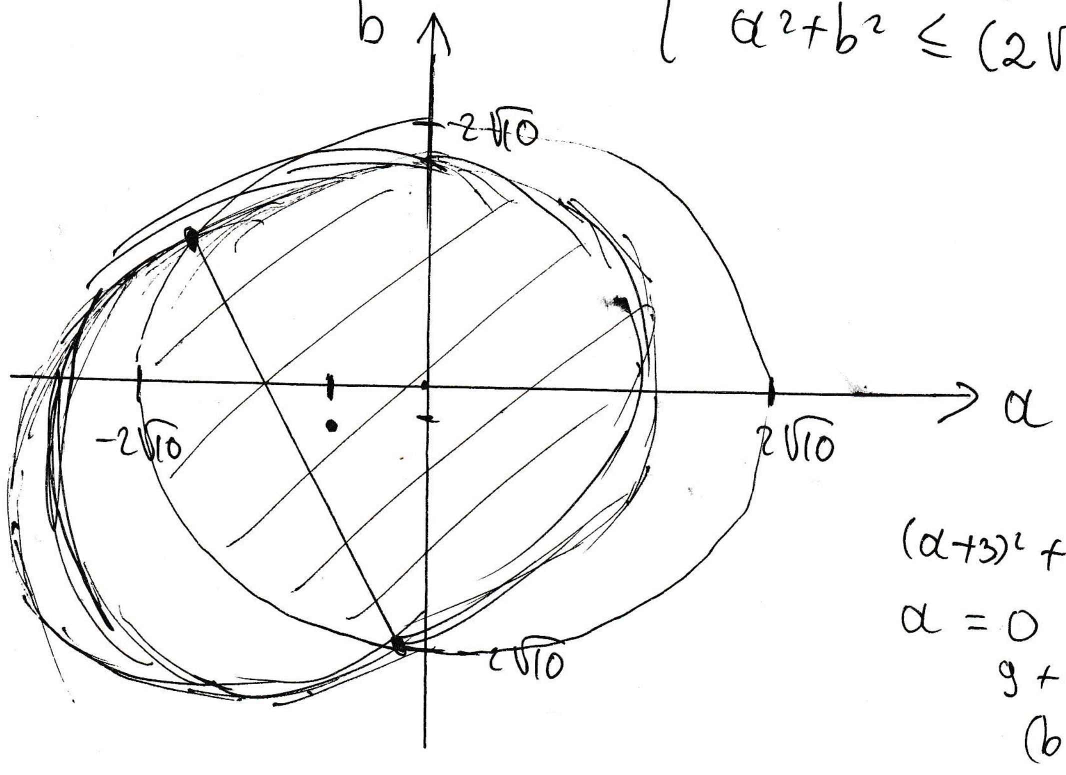
Получается, что мы можем построить на осях a и b круг с центром в точке, лежащей на пересечении кругов $(a+3)^2+(b+1)^2\le10$ и $a^2+b^2\le10$, радиуса $\sqrt{10}$.



Точка центра круга — любая точка, принадлежащая пересечению.

Эту площадь можно посчитать как площадь пересечения

$$\begin{cases}(a+3)^2+(b+1)^2\le(2\sqrt{10})^2\\ a^2+b^2\le(2\sqrt{10})^2\end{cases}$$



$(a+3)^2+(b+1)^2\le(2\sqrt{10})^2$

$a=0$

$9+(b+1)^2\le40$

$(b+1)^2\le31$

$-\sqrt{31}-1\le b\le\sqrt{31}-1$

$$\begin{cases}a^2+b^2=40\\ (a+3)^2+(b+1)^2=40\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2=40\\ a^2+6a+9+b^2+2b+1=40\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2=40\\ 6a+2b+10=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2=40\\ 3a+b=-5.\end{cases}$$

~~Чистовик~~. Черновик

Математика. 11 класс. Часть 1.

Вариант 24.

1. $\begin{cases} a_5 \cdot a_{18} > S-4 \\ a_{10} \cdot a_{13} < S+60 \end{cases}$ $d>0$, $a_1, a_2 \dots a_9 \in \mathbb{Z}$

$$S = \frac{2a_1+8d}{2} \cdot 9 = (a_1+4d) \cdot 9 = 9a_1 + 36d.$$

$a_5 = a_1+4d$
$a_{18} = a_1+17d$
$a_{10} = a_1+9d$
$a_{13} = a_1+12d$

$a_5 \cdot a_{18} = (a_1+4d)(a_1+17d) = a_1^2 + 21da_1 + 68d^2$

$a_{10} \cdot a_{13} = (a_1+9d)(a_1+12d) = a_1^2 + 21a_1d + 108d^2$

$a_5 \cdot a_{18} = a_1^2 + 21a_1d + 68d^2$
$a_{10} \cdot a_{13} = a_1^2 + 21a_1d + 108d^2$

$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 68d^2 > 9a_1 + 36d - 4 \\ a_1^2 + 21a_1d + 108d^2 < 9a_1 + 36d + 60 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d - 9a_1 + 68d^2 - 36d + 4 > 0 \\ a_1^2 + 21a_1d - 9a_1 + 108d^2 - 36d - 60 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + (21d-9)a_1 + (68d^2 - 36d + 4) > 0 \\ a_1^2 + (21d-9)a_1 + (108d^2 - 36d - 60) < 0 \end{cases}$

$D_1 = (21d-9)^2 - 4(68d^2 - 36d + 4) =$
$= \cancel{441d^2} - \cancel{378d} + 81 - \cancel{272d^2} + \cancel{144d} - 16 =$
$= 172d^2 - 234d + 65$

$234 : 3 = 78$; $234 : 9 = 26$; $108 \cdot 4 = 432$; 321

$378 - 144 = 234$; $441 - 432 = 9$

$21 \cdot 21 = 441$; $42 \cdot 9 = 378$; $13 \cdot 8 = 104$; $104 - 81 - 16$: 65

$234 : 13 = 18$; $441 - 272 = 169$; $444 - 272 = 172$; $68 \cdot 4 = 272$; $36 \cdot 4 = 144$; $378 - 144 = 234$

3. $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b^2) < \\ 4 \end{cases}$

$107+3=110$

$9-21=-12$

$110-78=32$

$-12-4\sqrt{6}$

$3\cdot 32=96$

$32=16\cdot 2$

$$\begin{array}{r} 321 \\ -\ 65 \\ \hline 256 \end{array}$$

$\dfrac{78-40\sqrt{3}}{6}$

$78-x=12$

$x=66$

$\cancel{88}$

$40\sqrt{3} > 60$

$$\begin{array}{r|l} 66 & 40 \\ -40 & 1,6 \\ \hline 260 & \\ -240 & \end{array}$$

$78-6$

$$\begin{array}{r} \times\ 1,7 \\ 40 \\ \hline 68,0 \end{array}$$

$78-40\cdot 1,7=$

$\frac{10}{6}$

$$\begin{array}{r} \times\, 78 \\ 78 \\ \hline 624 \\ +\,546 \\ \hline 6084 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 107 \\ 12 \\ \hline 214 \\ +\,107 \\ \hline 1284 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\,\dot{6}084 \\ 1284 \\ \hline 4800 \end{array}$$

$48 = 16 \cdot 3$

$$\frac{78 - 40\sqrt{3}}{6} \vee \frac{5}{13}$$

$$\frac{39 - 20\sqrt{3}}{3} > \frac{5}{13}$$

$\sqrt{3} < 1{,}8$

$$\frac{39 - 20 \cdot 1{,}8}{3} \approx \frac{39 - 36}{3} = 1$$

~~чистовик~~

$\begin{cases} a^2+b^2=40 \\ b=-5-3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+(5+3a)^2=40 \\ b=-5-3a \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+25+30a+9a^2=40 \\ b=-5-3a \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 10a^2+\cancel{3a}\,30a-15=0 \\ b=-5-3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2+6a-3=0 \\ b=-5-3a. \end{cases}$

$D=36+4\cdot 2\cdot 3=36+24=60=4\cdot 15$

$a=\dfrac{-6\pm 2\sqrt{15}}{4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{15}}{2}$

$b=-5-3a.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\dfrac{-3-\sqrt{15}}{2} \\ b=\dfrac{-10+9+3\sqrt{15}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} b=\dfrac{-10+9-3\sqrt{15}}{2} \\ a=\dfrac{-3+\sqrt{15}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

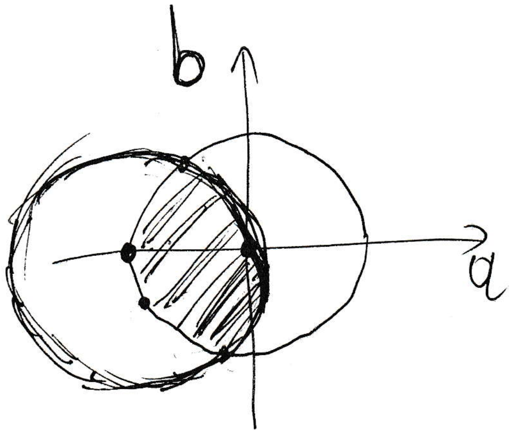
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\dfrac{-3-\sqrt{15}}{2} \\ b=\dfrac{3\sqrt{15}-1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} b=\dfrac{-1-3\sqrt{15}}{2} \\ a=\dfrac{-3+\sqrt{15}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

$r=\sqrt{\left(\dfrac{-3-\sqrt{15}+3-\sqrt{15}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{15}-1+1+3\sqrt{15}}{2}\right)^2}=$

$=\sqrt{15+9\cdot 15}=\sqrt{150}$

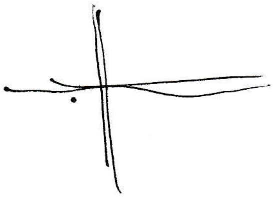
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 10 \\ a^2+b^2 \leqslant \min(-6a-2b, 10) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 10 \\ a^2+b^2 \leqslant -6a-2b \\ a^2+b^2 \leqslant 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

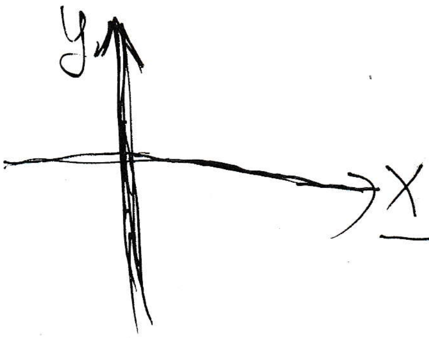


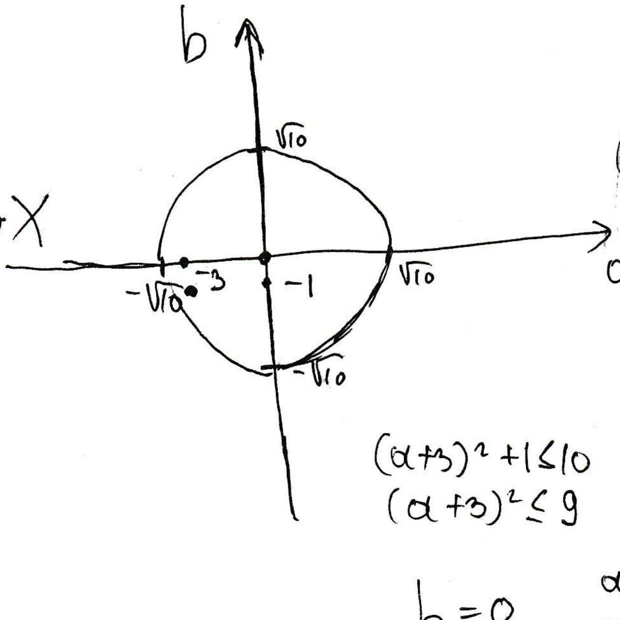
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 10 \\ a^2+6a+b^2+2b \leqslant 0 \\ a^2+b^2 \leqslant 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

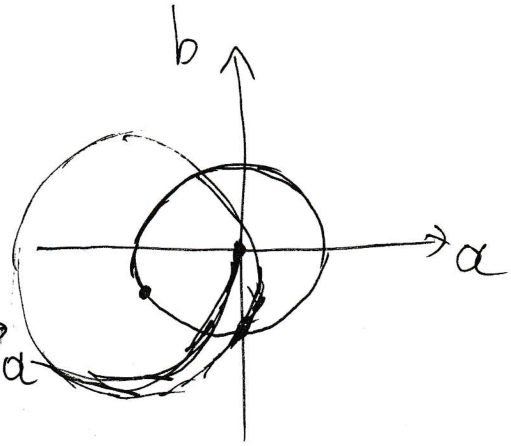
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 10 \\ a^2+6a+9+b^2+2b+1 \leqslant 10 \\ a^2+b^2 \leqslant 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 10 \\ (a+3)^2+(b+1)^2 \leqslant 10 \\ a^2+b^2 \leqslant 10. \end{cases}$$







$(a+3)^2+1 \leqslant 10$

$(a+3)^2 \leqslant 9$

$b=0$ $\quad a=0$

$a=-6$

$a=0$ $\quad 9+(b+1)^2 \leqslant 10$

$(b+1)^2 \leqslant 1$

$b=0$

$b=-2$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102928**

ID профиля: **832039**

Вариант 24

Математика. 11 класс. Часть 2. Вариант 24.

4. $\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=33 \\ \text{НОК}(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$

$a=11\cdot 3\cdot a_1$, $b=11\cdot 3\cdot b_1$, $c=11\cdot 3\cdot c_1$, где $\text{НОД}(a_1,b_1,c_1)=1$.

$\text{НОК}=a_1\cdot b_1\cdot c_1\cdot 3\cdot 11=3^{19}\cdot 11^{15}$

$\begin{cases} a_1\cdot b_1\cdot c_1=3^{18}\cdot 11^{14} \\ \text{НОД}(a_1,b_1,c_1)=1 \end{cases}$

Если среди чисел a_1, b_1 и c_1 нет единицы, то $a_1=11^k$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $k\leq 14$

$b_1=3^m$, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $m\leq 18$

$c_1=11^{14-k}\cdot 3^{18-m}$, $m,k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $k\leq 14$, $m\leq 18$.

Способов перестановок 6.

$k, m\neq 0$.

Вариантов для k — 14, для m — 18.

При определённых m и k c_1 фиксировано.

Всего вариантов, если среди чисел a,b,c нет 33 — $6\cdot 14\cdot 18=1512$.

Пусть среди чисел a,b,c один раз встречается число 33. Тогда $a_1\cdot b_1=3^{18}\cdot 11^{14}$ или $b_1\cdot c_1=3^{18}\cdot 11^{14}$, или $c_1\cdot a_1=3^{18}\cdot 11^{14}$.

НОК · НОД = произведению чисел.

При этом b_1 и c_1 или a_1 и b_1, или c_1 и a_1 — взаимопросты.

$$\begin{cases} a_1 \cdot b_1 = 3^{18} \cdot 11^{14} \\ a_1, b_1 \neq 1. \\ НОД(a_1, b_1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a_1 = 3^{18} \text{ и } b_1 = 11^{14}$$
или $b_1 = 3^{18}$ и $a_1 = 11^{14}$.

Тогда среди чисел a, b и c нужно распределить 33 $33 \cdot 11^{14}$ и $33 \cdot 3^{18}$.

Это можно сделать 6-ю способами.

Если среди a, b, c два раза встречается 33, то оставшееся число $= 33 \cdot 3^{18} \cdot 11^{14}$.

Таких расстановок всего 3.

Итого: вариантов $= 1512 + 6 + 3 = 1521$.

Ответ: 1521.

Чистовик

5. $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(29-x)$, $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$.

Замена: $\sqrt{29-x}=t,\ t>0,\ t\neq 1$

$\sqrt{\frac{x}{7}+7}=m,\ m>0,\ m\neq 1.$

$-x-1=l,\ l>0,\ l\neq 1.$

$\log_t m^2,\ \log_{l^2} t^2,\ \log_m l.$

$2\log_t m,\ \log_l t,\ \log_m l$

ОДЗ для x:

$$\begin{cases} 29-x>0 \\ 29-x\neq 1 \\ x>-49 \\ x\neq -42 \\ -x-1>0 \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<29 \\ x\neq 28 \\ x>-49 \\ x\neq -42 \\ -1>x \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-49 \\ x<-1 \\ x\neq -42 \\ x\neq -2. \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} 2\log_t m=\log_l t \\ \log_m l-\log_l t=1 \end{cases}$

Произведение $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\log_{(x+1)^2}(29-x)\cdot\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=$
$=2.$

Пусть какие-то два из них равны и равны α. Тогда третий $=\alpha+1$.

$\alpha\cdot\alpha\cdot(\alpha+1)=2.$

$\alpha^3+\alpha^2=2.$ $\alpha=1$ — корень

	1	1	0	-2
1	1	2	2	0

$\alpha^3+\alpha^2-2=0$

$\alpha^2+2\alpha+2=0.$ $D<0$

лист 3.

чистовик

Получается, что два числа $= 1$ и одно число равно 2.
(ОДЗ добавим в конце)
Рассмотрим случаи:

1) $\begin{cases} \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{(x+1)^2}(29-x) = 1 \\ \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{7}+7 = \sqrt{29-x} \\ (x+1)^2 = 29-x \\ \frac{x}{7}+7 = -x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} x+7 = \sqrt{29-x} \\ (x^2+2x+1) = 29-x \\ 7x+49 = -7x-7 \end{cases}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+1 = 29-x \\ x+49 = \sqrt{29-x} \\ x+49 = -7x-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-28=0 \\ (x+49)^2 = 29-x \\ 8x = -56 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{-7; 4\} \text{ по т., обр. т. Виета} \\ (x+49)^2 = 29-x \\ x = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-7+49)^2 = 29+7 \\ x = -7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 42^2 = 36 \\ x = -7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

2) $\begin{cases} \log_{(x+1)^2}(29-x) = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = 1 \\ \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = (29-x) \\ \sqrt{\frac{x}{7}+7} = -x-1 \\ 29-x = \frac{x}{7}+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+1 = 29-x \\ \sqrt{\frac{x}{7}+7} = -x-1 \\ 29\cdot 7 - 7x = x + 7\cdot 7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-28=0 \\ \sqrt{\frac{x}{7}+7} = -x-1 \\ 8x = 22\cdot 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{4; -7\}, \text{ по т., обр. т. Виета.} \\ \sqrt{\frac{x}{7}+7} = -x-1 \\ x = \frac{77}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \varnothing.$

Чистовик

3) $\begin{cases} \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = 1. \\ \log_{(x+1)^2}(29-x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{29-x} = \frac{x}{7}+7. \\ \sqrt{\frac{x}{7}+7} = -x-1 \\ (x+1)^4 = 29-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\sqrt{29-x} = x+49 \\ \frac{x}{7}+7 = x^2+2x+1 \\ (x+1)^4 = 29-x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 49(29-x) = (x+49)^2 \\ x+49 = 7x^2+14x+7 \\ (x+1)^4 = 29-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49(29-x) = (x+49)^2 \\ 7x^2+13x-42=0 \\ (x+1)^4 = 29-x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 49\cdot29 - 49\cdot x = x^2+2\cdot49x+49^2 \\ 7x^2+13x-42=0. \\ (x+1)^4 = 29-x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3\cdot49x+49\cdot20=0 \\ 7x^2+13x-42=0 \\ (x+1)^4=29-x \end{cases} \Leftrightarrow$

$D = 9\cdot49^2 - 4\cdot49\cdot20 = 49(9\cdot49-80) =$
$= 49\cdot361 = 7^2\cdot19^2.$

$x = \frac{-3\cdot49 \pm 7\cdot19}{2}$

$x = \cancel{}\ -7;\ -140.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\{-7;-140\}. \\ 7x^2+13x-42=0 \\ (x+1)^4=29-x \end{cases} \Leftrightarrow$

$(x+1)^4 = 29-x.$

$139^4 \neq 169$

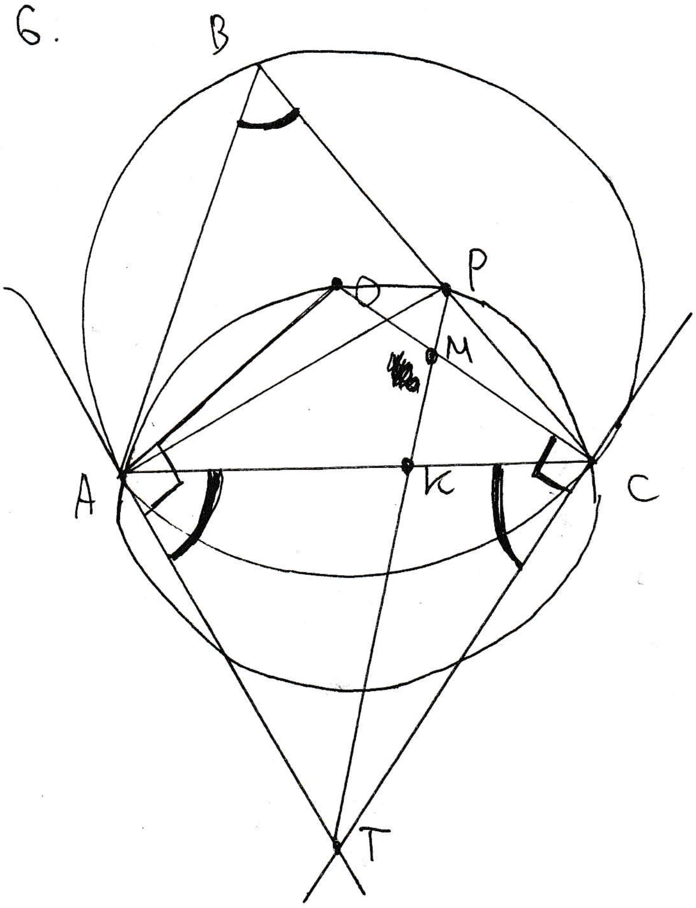
$6^4 \vee 36$

$6^4 \neq 36$

$\Leftrightarrow x\in\varnothing.$

Ответ: ни при каких x.

6.



$S_{APK} = 16$

$S_{CPK} = 14.$

а) S_{ABC} – ?

Решение: AT и CT – касательные к, проведённые из одной точки $\Rightarrow AT = CT$.

$AO = OC$ как радиусы.

По св-ву касат. и секущей из одной точки:

$TK \cdot PK = CT^2$.

~~∠PAC + ∠PCT = 180° ⇒~~

~~⇒ вокруг APCT~~

$\angle OAT + \angle OCT = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ вокруг AOCT можно описать окружность.

$\angle ACT = \angle ABC$,

т.к. $\angle ACT$ – угол между касательной и секущей, он равен $\frac{1}{2} \smile AC$.

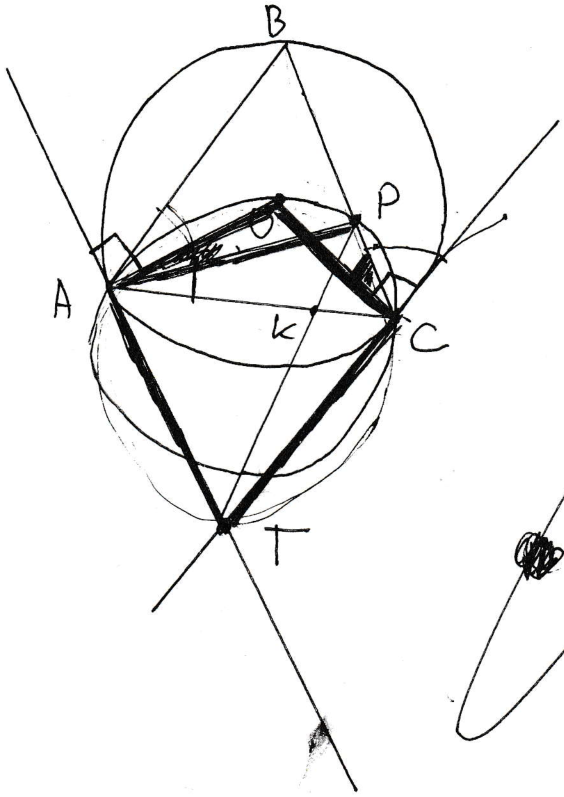
$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$ как вписанный

$\angle TAC = \angle TCA$ (т.к. $AT = CT$).

$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{KC}$, т.к. у них общая высота из вершины P.

$\frac{AK}{KC} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$.

Если $k=0$, то способов распределить $3^{18}\cdot 11^{14}$, так, что $m\neq 0$:



$S_{APK}=16$

$S_{CPK}=14$.

$S_{ABC}-?$

Вокруг $AOCT$ можно описать окружность

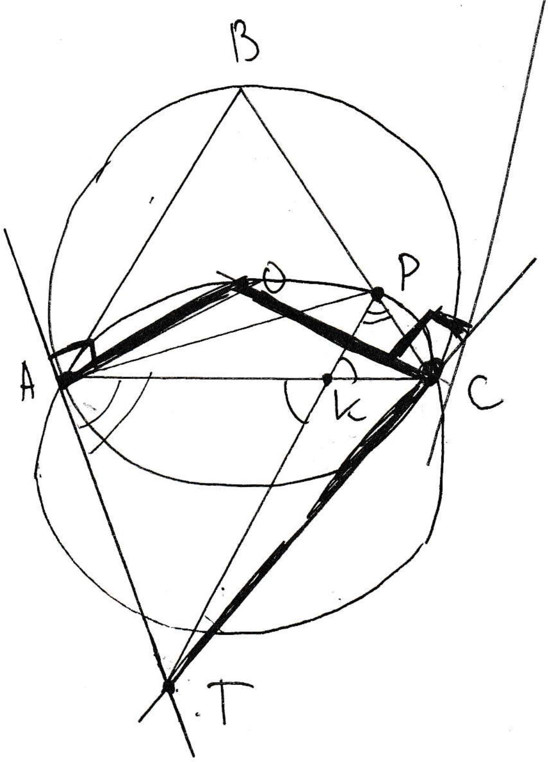
Тогда $\angle$

~~$\angle OCP = \angle OAP$~~

$\triangle AKT \sim \triangle PKC$.

~~$\triangle APK \sim \triangle ...$~~

$APK \sim \triangle TCK$.



~~Чистовик~~

Математика. 11 класс. часть 2. Вариант 24.

4. $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 33 \\ НОК(a;b;c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \end{cases}$.

$a = 11 \cdot 3 \cdot a_1$;
$b = 11 \cdot 3 \cdot b_1$;
$c = 11 \cdot 3 \cdot c_1$; где a_1, b_1, c_1 взаимопросты.

$НОК = 11 \cdot 3 \cdot c_1 \cdot a_1 \cdot b_1 = 3^{19} \cdot 11^{15}$

$a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = 3^{18} \cdot 11^{14}$

Т.к. a_1, b_1, c_1 – взаимопросты, то они имеют вид $a_1 = 11^k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \leq 14$

$b_1 = 3^m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m \leq 18$

$c_1 = 11^{14-k} \cdot 3^{18-m}$, $m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \leq 14, m \leq 18$.

Нам не нужно учитывать случаи, когда $b_1 = 11^k$, $a_1 = 3^m$ и т.д., т.к. нас интересует количество троек чисел, а не их порядок.

$a_1 = 11^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \leq 14$.

Для k существует 15 вариантов.

$b_1 = 3^m$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \leq 18$.

Для m существует 19 вариантов.

При определённых k и m c_1 фиксировано.

~~Случай, когда k=0 и m=0 посчитается дважды, если умножить 15 на 19, т.к. $a_1 = b_1$, нас не интересует порядок чисел.~~

Посчитаем количество вариантов для $1 \leq k \leq 14$ и $1 \leq m \leq 18$. $C_B = 14 \cdot 18 = 252$.

Если k или m = 0, то одно из чисел $(a;b;c) = 33$.
Тогда другие два числа могут иметь любой вид.
Например, если k = 0, то b_1 и c_1 не обязательно взаимопросты.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=33 \\ НОК(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15}. \end{cases}$$

$a=11\cdot 3\cdot a_1$ $\quad a_1, b_1, c_1$ – взаимопросты.

$b=11\cdot 3\cdot b_1$

$c=11\cdot 3\cdot c_1$

$НОК(a;b;c)=11\cdot 3\cdot a_1\cdot b_1\cdot c_1=11^{15}\cdot 3^{19}$

$a_1\cdot b_1\cdot c_1=11^{14}\cdot 3^{18}$

a_1, b_1, c_1 – взаимопросты.

$НОД=18=2\cdot 3^2$

$a_1=11^k$

$b_1=3^m$

$c_1=11^{14-k}\cdot 3^{18-m}.$

$a=33$

$b_1\cdot c_1=3^{18}\cdot 11^{14}$

2 9

6 3

$11^k;\ 3^m;\ 11^{14-k}\cdot 3^{18-m}.$

3 9

6 9

$3\cdot 2$

1 $\quad 3^{18}$

11^{14}

$1512+9=1521$

$$\begin{array}{r} \times 28 \\ 42 \\ \hline 56 \\ +112 \\ \hline 1216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ 6 \\ \hline 84 \end{array}$$

$a=0$

$$\begin{array}{r} +1216 \\ 169 \\ \hline 1385 \end{array}$$

$1385 : 5 = 277$

$$\begin{array}{r} 1385 \\ -10 \\ \hline 38 \\ -35 \\ \hline 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 84 \\ 18 \\ \hline +672 \\ 84 \\ \hline 1512 \end{array}$$

5 $\quad$ 25

$D=1385$

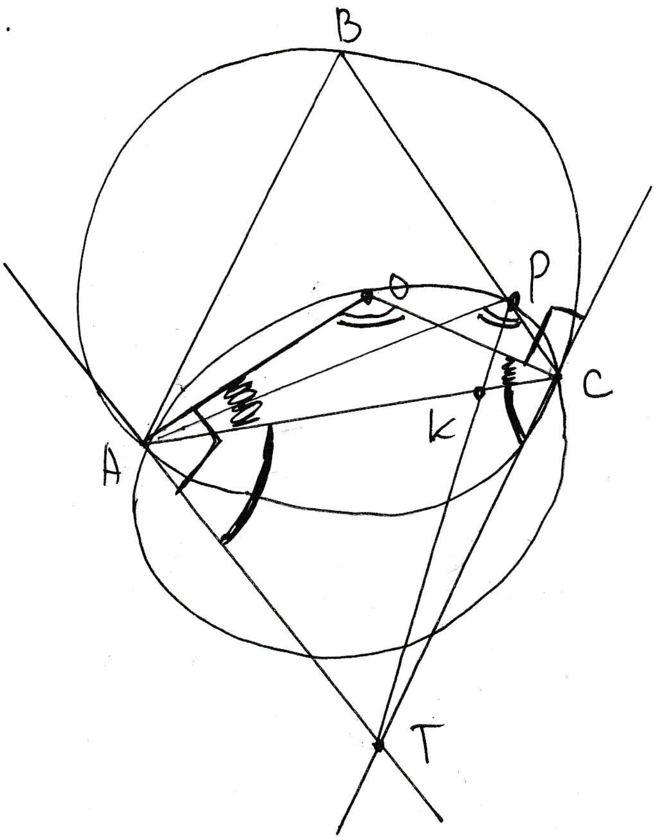
$$\begin{array}{r} \times 18 \\ 14 \\ \hline 72 \\ +18 \\ \hline 252 \end{array}$$

$13^2+4\cdot 7\cdot 42=$

$=169+28\cdot 42=169+1216=$

$=$

6.



Решение:

$AT = CT$ по св-ву касательных, проведённых из одной точки $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle TAC = \angle TCA$.

$\angle AOC = \angle APC$, т.к. они опираются на одну дугу.

$\left.\begin{array}{l} \angle OAC = 90^\circ - \angle TAC \\ \angle OCA = 90^\circ - \angle TCA \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA \Rightarrow$

$\Rightarrow AO = OC$.

$D = 9 \cdot 49^2 - 4 \cdot 49 \cdot 20 =$

$= 49(9 \cdot 49 - 80) =$

$= 49 \cdot 361 = 7^2 \cdot 19^2$

$2 \log_{29-x}\left(\frac{x}{7} + 7\right) \cdot$

$\cdot \frac{1}{2} \log_{x+1} 29 - x \cdot$

$\cdot 2 \log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)} (-x-1)$

$(-x-1)^2 =$
$= (x+1)^2$

$\begin{array}{r} \times\ 49 \\ 9 \\ \hline 441 \end{array}$

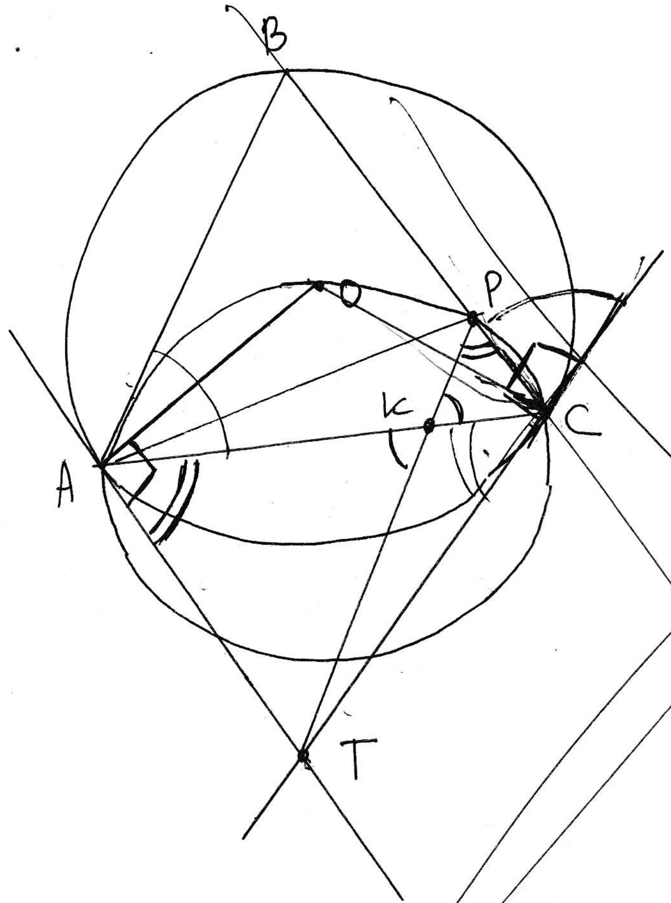
$\begin{array}{r} -\ 441 \\ 80 \\ \hline 361 \end{array}$

$\frac{\ln\cancel{\left(\frac{x}{7}+7\right)}}{\cancel{\ln(29-x)}} \cdot \frac{\ln\cancel{(29-x)}}{\ln(x+1)} \cdot \frac{\ln(-x-1)}{\cancel{\ln\left(\frac{x}{7}+7\right)}} =$

$= \log_{x+1}(-x-1)$

$\begin{array}{r} \times\ 19 \\ 19 \\ \hline +\ 171 \\ 19 \\ \hline 361 \end{array}$

6.



Решение: AT и CT — касательные к ω, значит $\angle OAT = \angle OCT = 90°$.

$\angle OAC + \angle OCT = 90° + 90° = 180° \Rightarrow$ вокруг четырёхугольника $AOCT$ можно описать окружность.

Тогда $\angle TAC = \angle TPC$, т.к. они опираются на одну дугу.

$\angle AKT = \angle PKC$ как вертикальные $\Rightarrow \triangle KAT \sim \triangle KPC$ по двум углам.

$$\frac{AK}{PK} = \frac{KT}{KC} = \frac{AT}{PC}.$$

$S_{APK} = 16$

$S_{CPK} = 14.$

S_{ABC} — ?

$\angle$

$49 - 3 \cdot 7 \cdot 49 +$
$+ 49 \cdot 20 = 0.$

$$2 \log_t m \cdot \log_l t \cdot \log_m l =$$
$$= 2 \cdot \frac{\ln m}{\ln t} \cdot \frac{\ln t}{\ln l} \cdot \frac{\ln l}{\ln m} =$$
$$= 2.$$

$$\begin{array}{r} \overset{2}{4}9 \\ \times\ 3 \\ \hline 147 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{6}{1}9 \\ \times\ 7 \\ \hline 133 \end{array}$$

$-147 + 133 = -14$

$-147 - 133 =$
$= -280$