Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102637**

ID профиля: **208580**

Вариант 24

Чистовик. (1)

№1.

Пусть $a_1 = a$; d - разность данной арифм. прогрессии. => т.к a_2 и $a_1 \in \mathbb{Z}$ => $d = a_2 - a_1 \in \mathbb{Z}$ => $d \in \mathbb{Z}$

Тогда из условия: $a_5 \cdot a_{18} = (a+4d)(a+17d) > S-4$

$$a^2+21ad+68d^2 > S-4 \quad | \cdot (-1)$$

$$-a^2-21ad-68d^2 < 4-S \quad (1)$$

$$a_{10} \cdot a_{13} = (a+9d)(a+12d) < S+60$$

$$a^2+21ad+108d^2 < S+60 \quad (2)$$

(1)+(2): $40d^2 < 64$

$10d^2 < 16$

$5d^2 < 8 \Rightarrow d^2 < \frac{8}{5}$

$|d| < \sqrt{\frac{8}{5}}$, но т.к $d \in \mathbb{Z}$ и арифм. прогрессия возрастающая, то $d \in \mathbb{N}$ =>

$$\Rightarrow \begin{cases} |d| < \sqrt{\frac{8}{5}} = \sqrt{1\frac{3}{5}} \\ d \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow d = 1$$

Из условия $S_9 = S = \frac{(a+(a+8d)) \cdot 9}{2} = (a+4d) \cdot 9 = 9a+36d \underset{(d=1)}{\Rightarrow} S = 9a+36$

Тогда: $\begin{cases} a^2+21a+68 > 9a+36-4 \\ a \in \mathbb{Z} \\ a^2+21a+108 < 9a+36+60 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2+12a+36 > 0 \\ a \in \mathbb{Z} \\ a^2+12a+12 < 0 \end{cases}$; $\cancel{a \in \mathbb{Z}}$

$$\begin{cases} (a+6)^2 > 0 \text{ - верно при } \forall a \neq -6 \\ a \in \mathbb{Z} \\ a^2+12a+12 < 0 \end{cases}$$

$a^2+12a+12 = 0$

$D = 144 - 48 = 96$

$a = \frac{-12 \pm 4\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a \in (-6-2\sqrt{6}; -6+2\sqrt{6}) \\ a \neq -6 \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\cancel{-6-2\sqrt{6} < -6-2\cdot 3 = -12}$

$-6-2\sqrt{6} \overset{<}{\vee} -10$

$4 \overset{<}{\vee} 2\sqrt{6}$

$-6-2\sqrt{6} \overset{>}{\vee} -11$

$5 \vee 2\sqrt{6}$

$25 > 24$

$\cancel{-6-2\sqrt{7} > -6-2\cdot 2 = -10}$

$\cancel{-6-2\sqrt{7} \overset{<}{\vee} -11}$

$\cancel{5 \overset{<}{\vee} 2\sqrt{7}}$

$\cancel{25 < 28 \Rightarrow -6-2\sqrt{7} \in (-11; -12)}$

Чистовик (2)

$-6+2\sqrt{6} \overset{<}{\vee} -1$; $-6+2\sqrt{6} \overset{>}{\vee} -2$

$2\sqrt{6} \overset{<}{\vee} 5$; $2\sqrt{6} \overset{>}{\vee} 4$

$\Rightarrow$ $-6-2\sqrt{6} \in (-11;-10)$

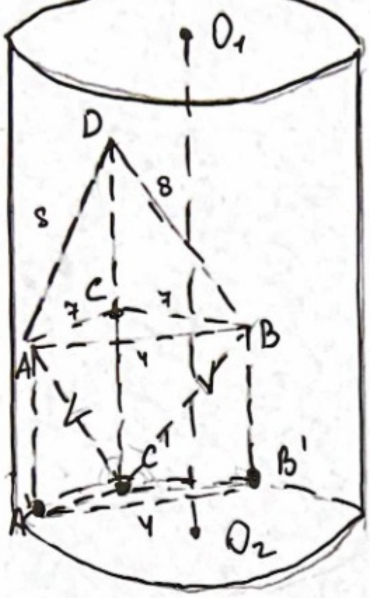
$-6+2\sqrt{6} \in (-2;-1)$

Значит: $\begin{cases} a \in [-10;-2] \\ a \neq -6 \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a_1 = a \in \{-10;-9;-8;-7;-5;-4;-3;-2\}$

Ответ: $a_1 \in \{-10;-9;-8;-7;-5;-4;-3;-2\}$.

21102637 (U208580 M1302730)

Чистовик ③ №2.



1) Спроецируем $ABCD$ на ~~пл~~ плоскость нижнего основания цилиндра (направл. прямая O_1O_2), причем т.к. $CD \parallel O_1O_2$ - по условию, то $C \to C'$, $D \to D'$;

поскольку $\left.\begin{matrix} DD' \parallel O_1O_2 \\ CC' \parallel O_1O_2 \\ D, C \in DC \end{matrix}\right\} \Rightarrow D' \equiv C'$, $A \to A'$; $B \to B'$;

2) $\triangle DAC = \triangle DBC$ - по 3 сторонам ($AD = DB = 8$, $AC = CB = 7$ - по условию, CD - общая) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DCA = \angle DCB = \alpha \Rightarrow \angle ACC' = \angle BCC' = 180° - \alpha$ - смежные

3) Проведем AC' и BC' $\Rightarrow \triangle ACC' = \triangle BCC'$ - по 2 сторонам и углу между ними (CC' - общая, $AC = CB = 7$ - по условию, $\angle ACC' = \angle BCC'$ - п.2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC' = C'B$, $\angle AC'C = \angle BC'C$, а поскольку $\left.\begin{matrix} BB' \perp (A'B'C') \\ AA' \perp (A'B'C') \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BB'C' = \angle AA'C' = 90°$, т.к. $\left.\begin{matrix} A'C' \subset (A'B'C') \\ B'C' \subset (A'B'C') \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ прям. $\triangle AA'C' = \triangle BB'C'$ по гипотенузе и остр. углу

($AC' = C'B$ - по доказ.

$\angle AC'A' = \angle BC'B' = 90° - \angle AC'C$) $\Rightarrow \left.\begin{matrix} AA' = BB' \\ \left.\begin{matrix} AA' \parallel O_1O_2 \\ BB' \parallel O_1O_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow AA' \parallel BB' \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow ABB'A'$ - паралл. по признаку $\Rightarrow AB = A'B' = 4$; $A'C' = C'B' \Rightarrow \triangle A'C'B'$ равнобед.

4) По сл. следствию из т. синусов в $\triangle A'B'C$: $\exists R$ - радиус цилиндра

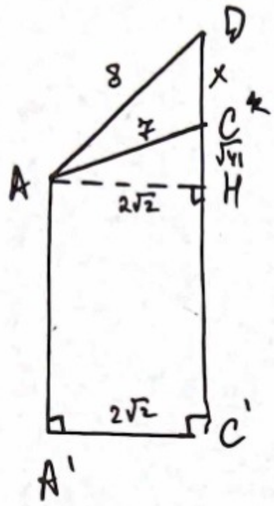
$2R = \frac{A'B'}{\sin\beta}$, где $\angle A'C'B' = \beta \Rightarrow R = \frac{4}{2 \cdot \sin\beta} = \frac{2}{\sin\beta} \geq 2$ и равенство достигается при $\sin\beta = 1$, т.е. при $\beta = 90°$. $\Rightarrow$

5) В прям. равнобед. $\triangle A'B'C'$: ~~A'C'2=A'C'B'B~~ $2A'C'^2 = A'B'^2 = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow A'C' = C'B' = 2\sqrt{2}$

Чистовик (4)

б) Сделаем выносной чертеж: $\exists\ CD = x$



проведем $AH \perp C'D$, $AH \cap C'D = H$ $\Rightarrow AH = A'C' = 2\sqrt{2}$ – расстояния между $AA' \parallel CC'$.

7) Из прямоуг. $\triangle ACH$: $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$

8) В прямоуг. $\triangle AHD$: $(x+\sqrt{41})^2 = AD^2 - AH^2 = 64-8 = 56$

т.е. $|x+\sqrt{41}| = 2\sqrt{14}$

$$\left[\begin{array}{l} x = -2\sqrt{14} - \sqrt{41} < 0, \text{ но } x > 0 \\ x = +2\sqrt{14} - \sqrt{41} = \sqrt{56} - \sqrt{41} \end{array}\right. \Rightarrow CD = \sqrt{56} - \sqrt{41}.$$

$\sqrt{56} - \sqrt{41} \vee 2$

$56 \vee 4 + 41 + 2\sqrt{41}$

$11 \overset{<}{\vee} 4\sqrt{41}$

Проверим существ. $\triangle ACD$: $\sqrt{56} - \sqrt{41} \overset{>}{\vee} 1$

$56 \vee 41 + 1 + 2\overset{<14}{\sqrt{41}} < 56$

и значит $AC + CD > AD$; остальные нер. ва $\triangle$ очевидно выполнены

Ответ: $CD = \sqrt{56} - \sqrt{41}$.

21102637 (U208580 M1302730)

(Чистовик) (5)

№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b;10) & (2)\end{cases}$$

(1): ур-е круга с центром в т. $A(a;b)$ и $R=\sqrt{10}$.

Для (2) рассмотрим 2 случая: 1) ∃ $10<-6a-2b$; $5<-3a-b \Leftrightarrow 3a+b<-5$

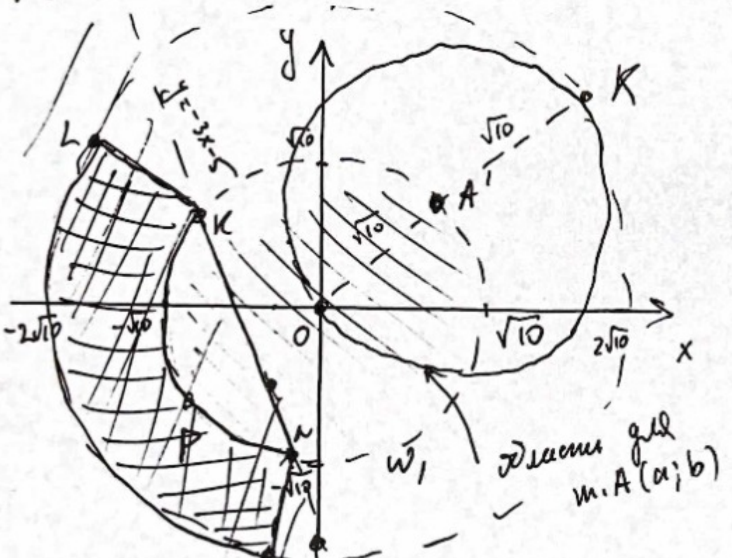
Тогда (2): $a^2+b^2\le 10$, обе части $\ge 0 \Rightarrow$ ~~воз~~ извлечем кв. корень:

$\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}\le\sqrt{10}$ – ~~расстояние~~ отрезок ~~между т. $A(a;b)$ и $O(0;0)$~~

т.е. расстояние между т. $A(a;b)$ и $O(0;0)$

$\le\sqrt{10}$, т.е. $AO\le\sqrt{10}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ центр окружности O должен находиться внутри или на границе круга $R=\sqrt{10}$ с центром в т. $O(0;0)$, чтобы у системы были решения.



Значит ~~и~~ x и y могут принимать знач внутри круга w_1 с центром $O(0;0)$ и $R_1=2\sqrt{10}$, поскольку тогда найдется ≥ 1 ~~ед~~ круг центром с $A(a;b)$ и $R=\sqrt{10}$, ~~которое~~ внутри которого окажется т. $C(x_0;y_0)$

Но у нас есть ограничения

$3a+b<-5$

$b<-3a-5$ – рассмотрим как область под прямой

$y=-3x-5$

x	0	-1
y	-5	-2

Значит подходящая область для $A(a;b)$ – это сегмент w_1 (KNP), получ. пересеч. w_1 и $y=-3x-5$, а

область фигуры M – это заштрихованная (KLMN) дважды часть (прямая $y=-3x-5$ пересе. w_1, т.к

т. $(-\frac{5}{3};0)\in w_1$ $-\frac{5}{3}>-\sqrt{10}$ $10>\frac{25}{3}$)

Чистовик 6

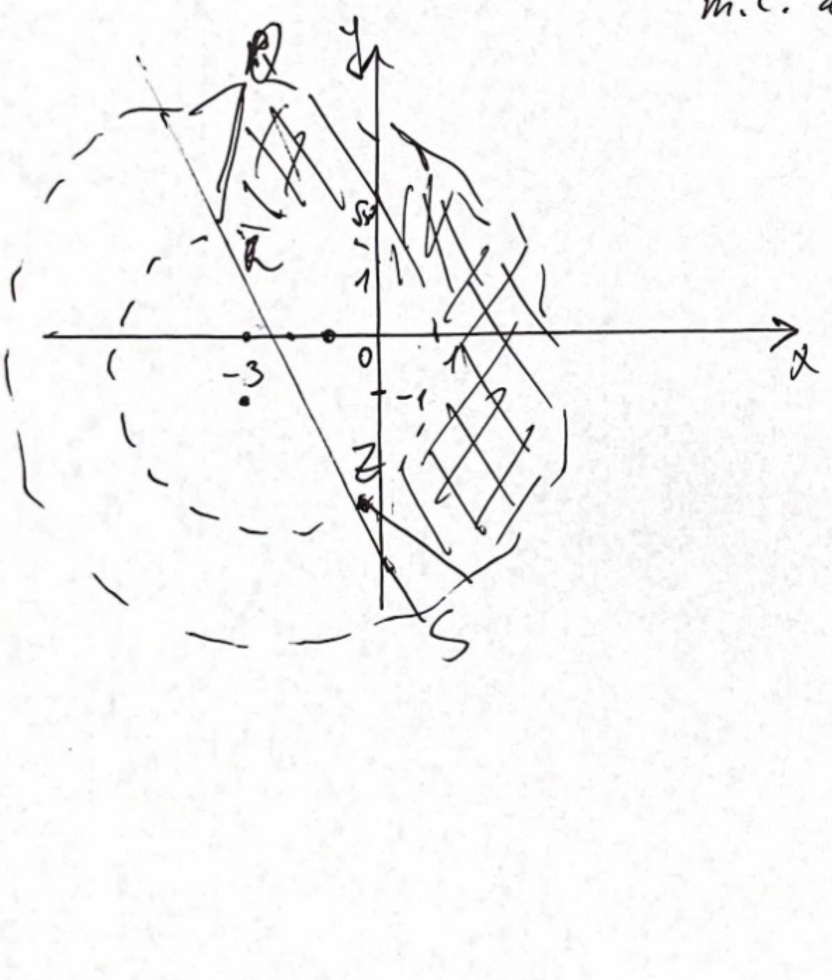
~~Найдем S этой части KLMN:~~

2) Если $\exists$ $10 \geq -6a-2b \Rightarrow 3a+b \geq -5$

(2): $a^2+b^2+6a+2b+9+1 \leq 10$

$(a+3)^2+(b+1)^2 \leq 10$ — ~~ур-е круга~~ т.е расстояние между т. A (a;b) и B(-3;-1) ≤ 10

Значит т. A может лежать только внутри или на границе круга с центром B(-3;-1) и $R=\sqrt{10}$ $\Rightarrow$ окруж. с радиусом $R_2 = 2\sqrt{10}$ и ц. B(-3;-1) это место точек (x;y), удовл. системе, однако есть огранич. $b \geq -3a-5$ т.е. часть QRSZ ← т.е это



$64-8=(x+\sqrt{41})^2$

$56= x^2+2\sqrt{41}x+41$

$\begin{array}{r}164\\60\\\hline 224\end{array}$

$x^2+2\sqrt{41}x-15=0$

$D=4\cdot41+60=4\cancel{8}\cdot56=4\cdot4\cdot14$

64

$56\,|\,\cancel{4}$

4

$8+7>$

$\overset{<8}{\sqrt{56}}-\overset{>6}{\sqrt{41}}>2$

$\sqrt{56}-\sqrt{41}\vee1$

$56\vee41+1+\overset{<14}{2\sqrt{41}}$

$a^2+b^2\leq \cancel{\sqrt{10}}\,10$

$(a+b)^2\leq\sqrt{10+2ab}$

$3a+b<-5$

$b<-5-3a$

$2\sqrt{10}$

$-5-\cancel{3}\sqrt{10}$

$-5-3\sqrt{10}$

21102637 (U208580 M1302730)

$0=$

$S_9 = S$ $d>0$ $a_1, a_2, ... \in \mathbb{Z}$

$\exists a_1 = a$

$a_5 \cdot a_{18} > S-4$

$a_{10} \cdot a_{13} < S+60$ $a_1 - ?$

$\frac{(a+a+8d)9}{2}$

$(a+4d)(a+17d) > S-4$

$(a+9d)(a+12d) < S+60$

$12 \times 9 = 108$

$(a+4d)9 = S$

a_5

$a^2 + 21ad + 68d^2 >$

$a^2 + 21ad + 108d^2$

$9a = S - 36d$

$d = \frac{S-9a}{36}$

$-a_5 \cdot a_{18} < 4-S$

$a_{10} \cdot a_{13} < S+60$

$9a_5 = S$

$a_{10} \cdot a_{13} - a_5 \cdot a_{18} < 64$

$\cancel{68d^2 - 108d^2}$

$(a+4)9 = S$

$\cancel{a^2 + 21ad + 68d^2}$

$40d^2 < 64$

$9a = \frac{S-36}{9}$

4

$d^2 < \frac{64}{40} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$

$a^2 + 21d + 68$

108

$144 - 36 \cdot 4$

96

$d < \sqrt{\frac{8}{5}}$

$144 - 32 =$

32

36

$12 \times 9 = 108$

$d = 1$

-32

112

$112 \mid 4$

-8

32

28

$4\sqrt{7}$

$-6 - 2\sqrt{7} \overset{<}{\vee} -11$

$-2\sqrt{7} \overset{<}{\vee} -5$

$5 \overset{<}{\vee} 2\sqrt{7}$

$25 \overset{<}{\vee} 4 \cdot 7$

$-6 - 2\sqrt{7}$

$-6 + 2\sqrt{7} \vee >$ 3

$4 - 6$

-2 0

$-6 + 2\sqrt{7} \overset{>}{\vee} -1$

$2\sqrt{7} \overset{>}{\vee} 5$

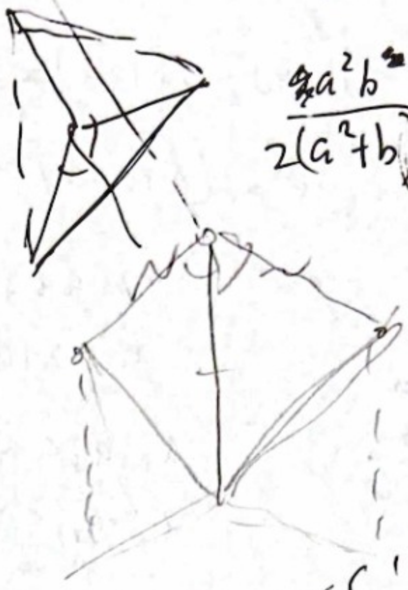
$\begin{array}{r} 68 \\ -32 \\ \hline 36 \end{array}$ $\begin{array}{r} 108 \\ -96 \\ \hline 12 \end{array}$ $< -6+2\sqrt{6}-1$

$\sqrt{a^2b} \geq \dfrac{2}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b}} \geq b$ $\dfrac{2ab}{a+b}$

$144 - 12\cdot 4$

$12\cdot 8$

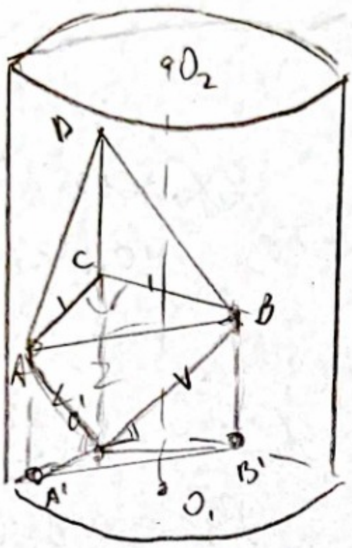
$4\cdot 4\cdot 2\cdot 3$ $4\sqrt{6}$

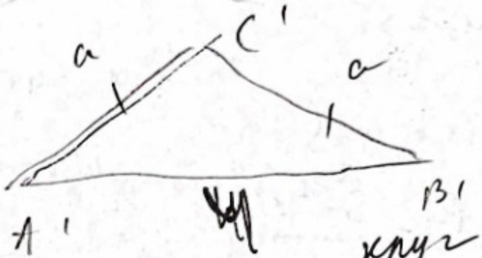


$\dfrac{a^2b}{2(a^2+b)S_\Delta}$

$R = \dfrac{a^2b}{4S_\Delta} \geq$

$R = \dfrac{b}{2\cdot\sin\alpha} \geq$

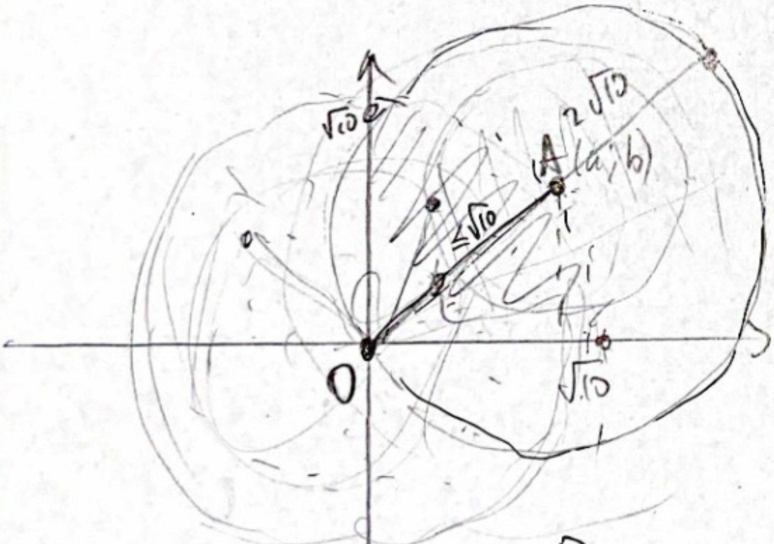




$R \geq \dfrac{2}{\sin\alpha}$

круг $(a;b)$ $R=\sqrt{10}$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 10 \\ a^2+b^2 \leq \min(-6a-2b;\ 10) \end{cases}$$



a^2+b^2

$6a+2b<-10$

1) $10 < -6a-2b$ $3a+b<-5$

$\sqrt{a^2+b^2} \leq \sqrt{10}$ $b+5<-3a$

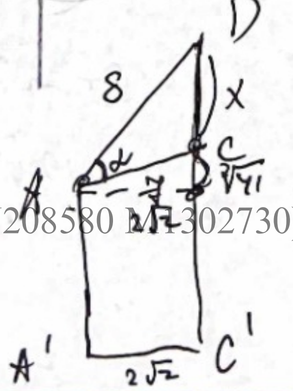
$b<-5-3a$

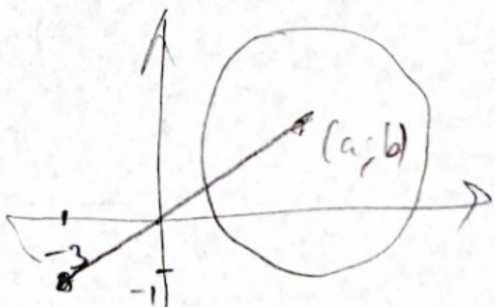
$(x-4)^2$

$a \in I$

2) $3a+b \geq -5$

$(a+3)^2+(b+1)^2 \geq 10$





$64-8 = x$

$49-8$

$x+\sqrt{41}$

$\sqrt{2}x = y$

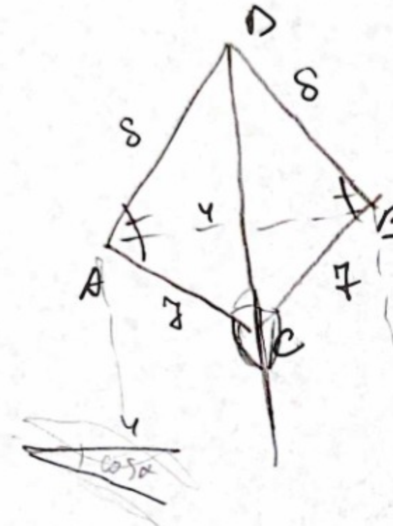
~~Чистовик~~ 2 Черновик

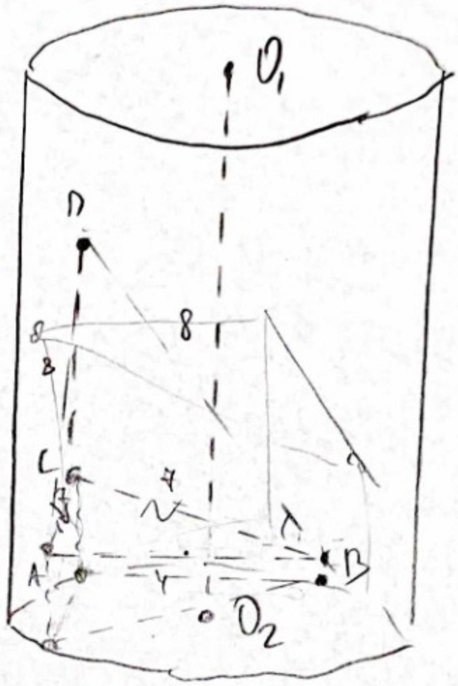
$-6+2\sqrt{7} \overset{>}{\vee} -1$

$2\sqrt{7} > 5$

$-6+2\sqrt{7} < -6+2\cdot 3 = 0$ $\Rightarrow -6+2\sqrt{7} \in (-1;0)$

Значит $\begin{cases} a\in[-10;-1] \\ a\in\mathbb{Z} \\ a\neq -6\end{cases} \Rightarrow a\in\{-10;-9;-8;-7;-5;-4;-3;-2;-1\}$





$p=\frac{14+4}{2}=9$

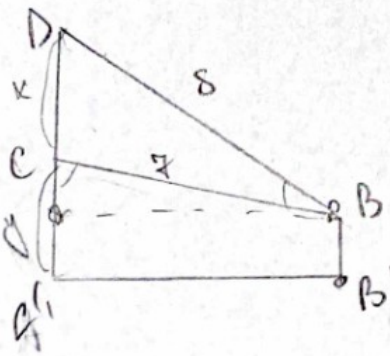
$S_{ABC}=\sqrt{9\cdot2\cdot2\cdot5}=$
$=6\sqrt{5}$

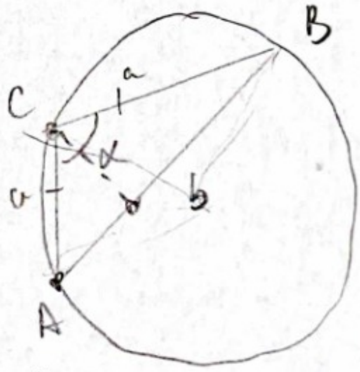
$S_{пр}=S_{осн}\cdot\cos\varphi$

$R \geq 2\cdot49-2\cdot49\cdot\cos\alpha=16$

$(1-\cos\alpha)\cdot 49=8$

$\cos\alpha=\frac{41}{49}$





$\frac{AB}{2\sin\angle BCA}=R$

$\frac{b}{2\cdot\sin\alpha}\le R$

$\sin\alpha\uparrow,\ AB\downarrow$

$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$

$-2\sqrt{6}<$

$abc\le\frac{(a+b+c)^2}{9}$

$-6-2\cdot3$ $\quad \pi R^2\cdot l$

$S_\Delta=\frac{abc}{4R}$

sin opr ↓

$\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\sin\alpha=\frac{a^2b}{\cancel{8\sin}\,4R}$

$R=\frac{abc}{4S_\Delta}\le\frac{a+b+c}{36}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102637**

ID профиля: **208580**

Вариант 24

Чистовик 1

№1.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 33 = 3\cdot 11 \\ НОК(a;b;c) = 3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$$

~~$НОД(a;b;c)\cdot НОК(a;b;c) = abc$, т.е. $abc = 3^{20}\cdot 11^{16}$~~

Поскольку в НОД и НОК входят только 3^{α} и 11^{β} => каждое из чисел a, b, c можно представить как ~~ак~~ произв. степеней простых чисел 3 и 11.

~~Нам также~~, Поскольку $НОД(a;b;c) = 33$ => $a = 3\cdot 11\cdot k$, $b = 3\cdot 11\cdot l$, $c = 3\cdot 11\cdot m$, причем

≥1 число ~~делится ровно~~ имеет в своем разложении на простые множители 3^1, а еще одно 11^1, т.к. иначе НОД был бы больше.

Рассмотрим 2 случая: 1) ∃ ~~нужная обязательно~~ $a = 3\cdot 11$

$b = 3\cdot 11\cdot l = 3^{x+1}\cdot 11^{y+1}$

$c = 3\cdot 11\cdot m = 3^{a+1}\cdot 11^{b+1}$

Тогда чтобы НОК этих чисел $= 3^{19}\cdot 11^{15}$ b и c в своем разложении должны иметь ≤19 степень 19 (причем одна из степеней 3 в точности 19) и ≤15 степень 11 (одна в точности 15). a, b, x, y ∈ N или 0.

~~Тогда если ∃ не нужная обязательно~~ $b = 3^{19}\cdot 11^{y+1}$, $c = 3^{a+1}\cdot 11^{b+1}$ =>

~~=> возможны 2 варианта: 1) у b в b входит 11^{15} => у c можно выбрать степень для 3 от 1 до 19, для 11 от 1 до 14 => 19·14 – способов~~

~~2) в c входит 11^{15} => у b выбрать степень 11: от 1 до 15, у c выбрать степень 3: от 1 до 19 => = 19·15 способов => всего 19·15·2 –~~

21102637 (U208580 M1302731)

Чистовик

2

Есть 2 способа выбрать в b или c степень 3 ~~часть~~ равна 19; а также 2 способа для степени 11 (15) $\Rightarrow$ оставшиеся степени запомним:

- для 3: от 1 до 18
- для 11: от 1 до 14 $\Rightarrow$ способов $2\cdot2\cdot18\cdot14$, но еще нужно учесть

способы, когда обе степени 3 равны 19 и обе степени 11 равны 15:

1) $2\cdot14$ когда $b=3^{19}\cdot p$, $c=3^{19}\cdot q$

где 11^{15}; оставшаяся степень 11 у b или c.

2) $2\cdot18$ когда $b=11^{15}\cdot z$, $c=11^{15}\cdot r$

где 3^{19}; ост.

3) +1 способ когда $b=c=3^{19}\cdot11^{15}$

Значит всего способов: $1008+28+36+1=1073$

Но мы могли выбрать $b=3\cdot11$ или $c=3\cdot11$ $\Rightarrow$ получаем в 3 раза больше способов: $3\cdot1073$

2)] $a=3\cdot11^{\alpha}$, $b=11\cdot3^{\beta}$, $c=11^{\gamma}\cdot3^{\psi}$

Тогда $\left[\begin{array}{l}\alpha=15\\ \gamma=15\end{array}\right.$ и $\left[\begin{array}{l}\psi=19\\ \beta=19\end{array}\right.$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ как в прошлом случае получаем 1073 способа

Выбрать показатели, однако пар чисел, каждое из которых имеет 1 степень 3 или 11: $3\cdot2=6$ $\Rightarrow$ в этом случаев:

3 — выбрать 3^1; 2 — выбрать 11^1

$6\cdot1073$.

Значит всего пар троек чисел будет: $9\cdot1073=9657$.

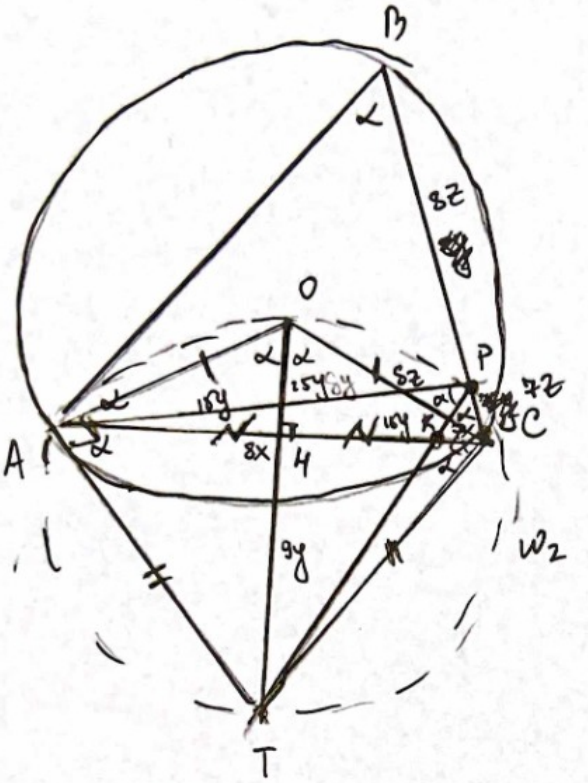
Ответ: 9657 троек.

21102637 (U208580 M1302731)

Чистовик

3

№3.



1) Проведем $OA, OC \Rightarrow \angle OAT = \angle OCT = 90°$ — радиусы провед. в т. касания $\perp$ к касат. $\Rightarrow \angle OAT + \angle OCT = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow AOCT$ — впис., но т.к. т. $A, O, C \in \omega_2$, то и $T \in \omega_2$

2) Проведем $OH \perp AC$, $OH \cap AC = H \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $OA = OC \Rightarrow AH = HC \Rightarrow$ проведем TH, и поскольку $AT = TC$ — по т. об отрезках касат., выход. из одной точки $\overset{\Rightarrow \angle THC = 90°}{\Rightarrow}$ T, H, O — лежат на одной прямой, т.к. ~~$\angle OHC + \angle THC = 180°$~~

$\angle OHC = \angle AHT = 90°$ — вертикальные.

3) Пусть $\angle ACT = \alpha \Rightarrow \angle APT = \angle ACT = \alpha$ — т.к. $APCT$ — впис. в ω_2

$\angle AOT = \angle ACT = \alpha$ — т.к. $AOCT$ впис. в $\omega_2 \Rightarrow$ т.к. OH — высота, провед. к основ. в равноб. ΔAOC, то $\angle AOH = \angle HOC = \alpha$ — т.к. OH — бис-са.

4) $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \alpha$ — впис. угол равен половине центрального, опирающ. на ту же дугу

ΔACT — равноб. $\Rightarrow \angle TAC = \angle ACT = \alpha$

$\angle TAC = \angle TPC = \alpha$ — т.к. $APCT$ впис. в $\omega_2 \Rightarrow \angle APC = 2\alpha$ — внешний для $\angle ABP \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAP = \angle APC - \angle ABP = \alpha \Rightarrow \angle BAP = \angle APK = \alpha$ — н.л.у. при AB и PK и секущ. $AP \Rightarrow AB \parallel KP$.

5) $$\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AK\cdot KP\cdot \sin\angle AKP}{\frac{1}{2}\cdot KC\cdot KP\cdot \sin(180° - \angle AKP)} = \frac{AK}{KC} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7} \Rightarrow \text{Пусть } AK = 8x \Rightarrow$$

$\Rightarrow KC = 7x$

Чистовик ④

6) $\triangle ABC \sim \triangle KPC$ – по 2 углам ($\angle PKC = \angle CAB$ – соотв. при $AB \parallel KP$ и секущ. AK

$\angle ACB$ – общий) $\Rightarrow$ $\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = \left(\frac{15x}{7x}\right)^2 \Rightarrow$

$\frac{CP}{BC} = \frac{7}{15} \Rightarrow 7PC = 7z, BP = 8z \Rightarrow AP = BP = 8z$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{225}{49} \cdot S_{KPC} = \frac{225 \cdot 14^2}{49_7} = \frac{450}{7}$

7) Из условия $\angle ABC = \alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$. $\Rightarrow$ в прямоуг. $\triangle OHC$: $tg\alpha = \frac{HC}{OH} = \frac{3}{5}$
в прямоуг. $\triangle HCT$: $tg\alpha = \frac{TH}{HC}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{TH}{OH} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow$ $\rfloor TH = 9y \Rightarrow OH = 25y$

$HC = AH = \frac{15}{2}x$

$\frac{HC}{OH} = \frac{3}{5} = \frac{15x}{2 \cdot 25y} \Rightarrow x = 2y \Rightarrow HC = AH = 15y$

OT – диаметр $\omega_2 \Rightarrow 36y = OT \Rightarrow r = 18y$ – радиус ω_2

$OA = R^2 = 15^2y^2 + 625y^2 = 850y^2 \Rightarrow R = \sqrt{850}y = 5\sqrt{34}y$, где R – радиус ω

8) ~~ОБЗ~~ $S_{APC} = S_{APK} + S_{PKC} = 30$
$S_{APC} = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot 56z^2 = 28z^2 \cdot \sin 2\alpha$ $\Bigg\} \Rightarrow 15 = 14z^2 \cdot \sin 2\alpha$

$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + ctg^2\alpha = 1 + \frac{1}{tg^2\alpha} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{1+\frac{1}{tg^2\alpha}} = \frac{25}{36} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{5}{6}$

$\alpha \in (0°; 90°)$ т.к. $\triangle ABC$ – остроуг.

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{11}}{6} > 0$, т.к. $\alpha \in (0°, 90°)$

$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{2 \cdot 5\sqrt{11}}{36} = \frac{5\sqrt{11}}{18} \Rightarrow z^2 = \frac{15 \cdot 18}{14 \cdot 5\sqrt{11}} = \frac{27}{7\sqrt{11}}$

Чистовик 5

№2.

Заметим ограничения: $\begin{cases} \frac{x}{7}+\cancel{7}>0 \\ 29-x>0 \\ -x-1>0 \\ 29-x\neq 1 \\ (x+1)^2\neq 1 \\ \frac{x}{7}+7\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-49 \\ x<29 \\ x<-1 \\ x\neq 28 \\ x\neq 0 \\ x\neq -42 \end{cases}$ $\Rightarrow x\in(-49;-1)\setminus\{-42\}$

$\Rightarrow a>0, b>0, c<0$ на ограничения.

] $29-x=a$; $\frac{x}{7}+7=b$; $x+1=c$ $\Rightarrow$ имеем знаки: $\log_{\sqrt{a}} b = 2\log_a b$

$\log_{c^2} a = \frac{1}{2}\log_{|c|} a$

$\log_{\sqrt{b}}(-c)=2\log_b(-c)$

$a \vee b$

$29-x \vee \frac{x}{7}+7$

$29\cdot 7-7x \vee x+7$

$\cancel{28}\cdot 7 \vee \overset{2}{\cancel{8}}x$

$\frac{49}{2} > x \Rightarrow a>b$

$b \overset{>}{\vee} c$

$\frac{x}{7}+7 \vee x+1$

$x+49 \vee 7x+1$

$48 \vee 6x$

$8>x \Rightarrow$ $\underline{a>b>c}$

Сравним $\frac{1}{2}\log_{|c|} a+1 \vee 2\log_a b$

$\log_{|c|} a+\cancel{2} \vee 4\overset{<1}{\log_a b}-2<2$

$\log_{|c|} a \geq 2 \Rightarrow (x+1)^2 \geq 29-x$

$x^2+2x+1\geq 29-x$

$x^2+3x-28\geq 0$

$\left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=4 \end{array}\right.$, т.е. $x\in(-\infty;-7)\cup(4;+\infty)$

Значит при $x\in(-\infty;-7)$

~~Чистовик~~ ~~2~~ Черновик

Тогда степень 3 в c изменяется от 1 до 19 => 19 способов
Далее 2 способами выберем в c или в b 11^{15}; в оставшейся ~~тогда~~ степень 11 принимает любое значение от 1 до 15.

3^{19} 11^{19}

3^{α} 11^{α} 3^{19} 11^{β}

19 3^{α} 11^{15}

$\frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot 8z \cdot KP = 16$

3^{19} 11^{19}

3^{19}

$58z^2 \cdot$

1073 · 6

$\frac{7x \cdot z}{8x \cdot z} =$ $\frac{15x}{\sin\alpha} = 2R$

$\sin\alpha\ (\mathrm{arcctg}\,\alpha) =$

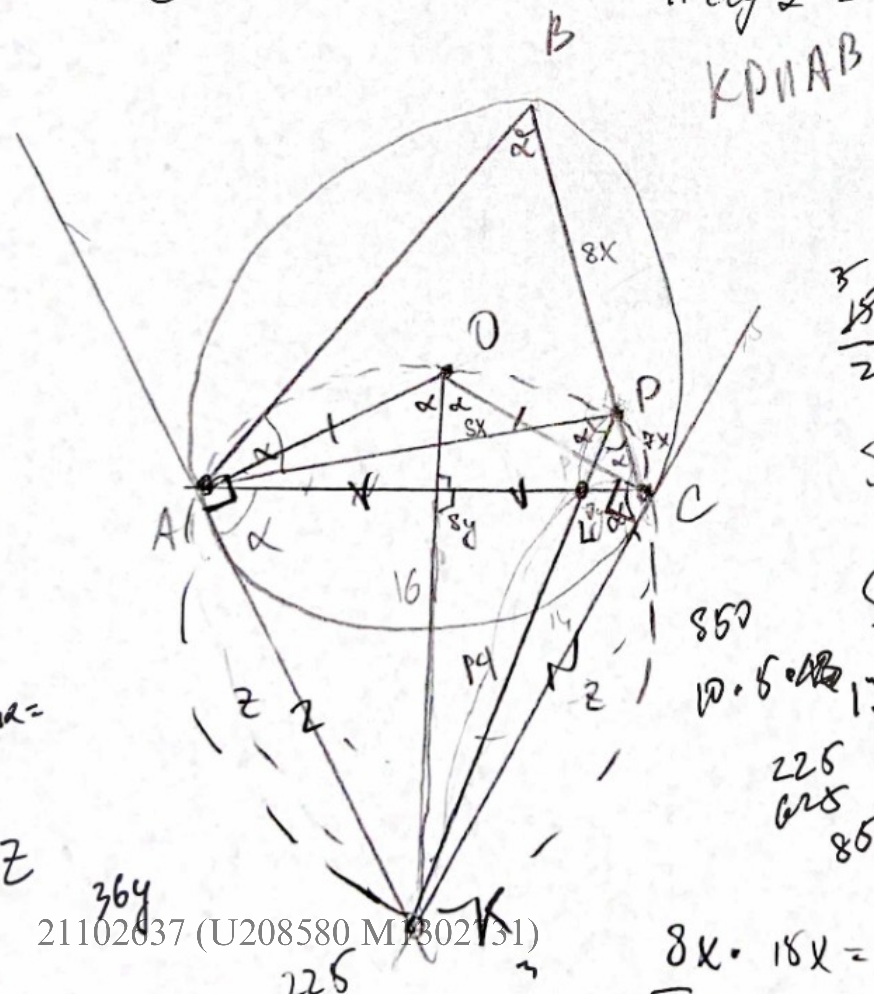
$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

KP ∥ AB

14 · 4 = 56

56 · 18 = 448, 56 → 1008

1072



$\frac{\overset{3}{\cancel{15}}x}{2 \cdot \frac{25y}{4}} = \frac{3}{5}$

$S_{APK} = \frac{1}{2} AP \cdot PK \cdot \sin\alpha$

$S_{CPK} = \frac{1}{2} PC \cdot PK \cdot \sin\alpha$

850

10 · 8 · ~~10~~ 17

226
~~625~~
850

$\frac{AP}{PC} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$

$\sin\alpha =$

7z

36y

225

$8x \cdot 18x =$

$5 \cdot 5 \cdot 2^{11}$

$z \cdot$ $\frac{30y}{\sin\alpha} = \cancel{10}\frac{\sqrt{34}y}{3}$ $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$ $\frac{56y^2}{3} = p^2 q$ $\frac{9}{25}$

$\frac{15x}{\sin\alpha} = 2R$

210

$S_{ABC} = \frac{450}{7} - 16 - 14 = \frac{240}{7}$

3^{19} 11^{8}

3^{19} 11^{19}

$\frac{8y \cdot 7y \cdot 15x}{4Rr} = 30$

$\frac{15}{2}$

$\frac{HC}{OH} = \frac{3}{5}$

$OH = \frac{15 \cdot 5}{2 \cdot 3}$

28
36
1

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 18 \\ \hline 448 \\ 56 \\ \hline 1008 \end{array}$$

$\frac{HT}{HC} = \frac{3}{5}$

a	3	3	11	1
b	11		3	3
c		11		11

$\frac{HT}{OH} = \frac{9}{20}$

$9y \cdot 25y = \left(\frac{15}{2}\right)^2 x$

3
11

$$\begin{array}{r} 1048 \\ + 28 \\ \hline 1073 \end{array}$$

$3 \cdot 3$

3 11^{8}

$$\begin{array}{r} 1073 \\ \times 9 \\ \hline 9657 \end{array}$$

3^{a} 11

31^{3} 11^{4}

21102637 (U208580 M1302731)

$a > c$ $\quad$ $a > b$

$c < b$ $\quad$ $29 - x \vee \frac{x}{7} + 7$

$x+1 \vee \frac{x}{7} + 7$ $\quad$ $29 \cdot 7 - 7x \vee x + 7$

$7x + \cancel{7} \vee x + \cancel{7}$ $\quad$ $28 \cdot 7 \vee \frac{8x}{2}$

$6x < 0$ $\quad$ 7

$\frac{49}{2} > x$ $\quad$ $t \quad t \quad t+1$

$\underline{\overset{70}{a} > b > \overset{40}{c}}$

$\log_a b^* = \log_b -c^*$ $\quad$ $2\log_a \overset{<1}{b} \vee \log_b \overset{<1}{-c}$

$\frac{1}{4} \log_{|c|} \overset{>1}{\sqrt{a}} \vee \frac{1}{2} \log_a \overset{<1}{b^4}$

6^4

-7

$\left(\frac{x}{7}+7\right)^4 \overset{>}{\vee} 29 - x$

$\log_a b^2 + 4 = \log_{|c|} \sqrt{a}$

$\log_a b^2$ наиб.

$\log_{|c|} \sqrt{a}$ $\quad$ ab^2 $\quad$ $\frac{1}{2} \log_{|c|} a + 2 = 4 \log_a \overset{<1}{b^*}$

$\log_b c^2$ $\quad$ $c^2 > a$

$(x+1)^2 \vee 29 - x$ $\quad$ $\frac{28 \times 4}{42}$

$x^2 + 2x + 1 \vee 29 - x$

$\log_{|c|} \overset{>2}{a} + 2 = 4 \log_b c^{**}$ $\quad$ $x^2 + 3x - 28 \vee 0$

$D = 9 + 28 \cdot 4 = 121$

3^{19} $\quad$ $3^{19} \cdot 11^{15}$ $\quad$ 3^{19} $\quad$ $x = \frac{-3+11}{2} = 4$

$3^\beta \quad 11^{14}$ $\quad$ $\frac{225}{49}$ $\quad$ $x = \frac{-3-11}{2} = -7$

3 $\quad$ $1 \cdot 19$

$3^{19} \cdot 11^\alpha$ $\quad$ $b \quad 11^{15}$ $\quad$ $\frac{450}{7}$

$c \quad 3^{19} \quad 11^{14}$

$11^{15} \quad 3^\beta$ $\quad$ $3^{19} \quad 11^{15}$

21102637 (U208580 M1302731)

$3^{15} \quad 11$

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 33 = 3\cdot 11 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$$

$abc = 3^{20}\cdot 11^{16}$

$(a;b;c)$

$2^2\cdot 3 = 12$

$2\ 3\ 2^2$

$(2;3;4) = 1$

a 3, 11 ~~11~~

b 3, 11

c 3, 11

нет 3^{20} и 11^{16}

3^{19}

$3\ \ 2^2\cdot 3\cdot 1$

1)] $a \vdots 3^1$ 3^{19} 3 11^k

$b \vdots 11^1$

3^l 11

3^{19-l}

sin α

7,5

$\frac{HC}{OH} = \frac{3}{5}$

$\log_{\sqrt{29-x}}^{a}\left(\frac{x}{7}+7\right)^{b}$;

$\log_{(x+1)^2}^{c}(29-x)^{a}$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}\left(-(x+1)\right)$

$\overset{u}{b}$

$$\begin{cases} \frac{x}{7}+7>0 \\ 29-x>0 \\ -x-1>0 \\ 29-x\neq 1 \\ (x+1)^2\neq 1 \\ \frac{x}{7}+7\neq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>-49 \\ x<29 \\ x<-1 \\ x\neq 28 \\ x\neq 0 \\ x\neq -42 \end{cases}$$

$x\in(-49;-1)\setminus\{-42\}$

$\log_{\sqrt{a}} b$ $\quad 2\log_a b$

$\log_{c^2} a$ $\quad \frac{1}{2}\log_{|c|} a$

$\log_{\sqrt{b}}(-c)$ $\quad 2\log_{|b|}(-c)$

$\log_a b^2 = k$

$\log_{|c|}\sqrt{a} = l$

$\log_{|b|} c^2 = m$

$\frac{1}{2\log_a c} \vee 4\log_a b$

$1 \vee 4\log_a c\,\log_a b$

$\underset{x+1}{c} < \underset{\sqrt{29-x}}{a}$

$2x \overset{<}{\vee} 28$

$x+1$

$\frac{1}{2\log_a c} = 2\log_a b$

$\log_c a = \log_a b$

$2\log_c a = 2\log_a b$