# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102631**

ID профиля: **328971**

Вариант 24

черновик

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b, 10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le (\sqrt{10})^2 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b; 10) \end{cases}$$

$$x^2-2xa+a^2+y^2-2yb+b^2 \le 10$$

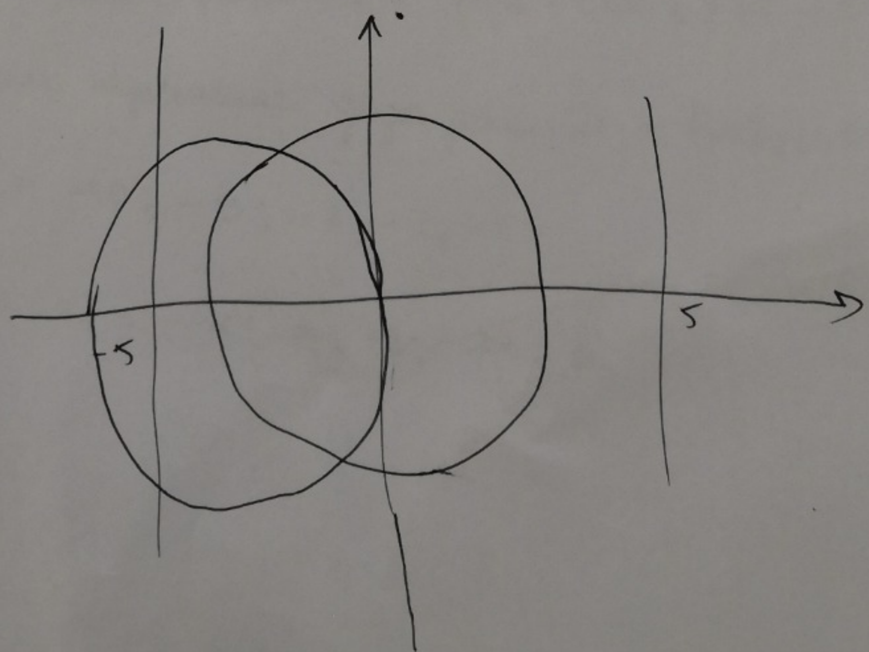
$$40d^2 < 64$$

$$- \begin{aligned} &\cancel{a_1^2} + \cancel{21a_1 \cdot d} + 108d^2 < \cancel{9a_1} + \cancel{36d} + 60 \\ &\cancel{a_1^2} + \cancel{21a_1} \cdot d + 68d^2 > \cancel{9a_1} + \cancel{36}d - 4 \end{aligned}$$

$$d^2(108-68) < 64$$

$$40d^2 < 64$$

$$x^2 + 12x + 12$$



Вариант 24. Чистовик 1

Часть 1.

№1.

Исходное условие равносильно системе:

$$\begin{cases} (a_1+4d)\cdot(a_1+17d) = a_1^2 + 21a_1\cdot d + \\ + 68d^2 > 9a_1 + 36d - 4 \\ (a_1+9d)(a_1+12d) = a_1^2 + 21a_1\cdot d + 108d^2 < \\ < 9a_1 + 36d + 60 \end{cases}$$

Вычитая из второго неравенства первое, получим:

$40d^2 < \cancel{36}\,64$

Так как все члены целые, то и разность прогрессии должна быть натуральной, натуральные $d$, удовлетворяющие неравенству, $= 1$. Подставим $d = 1$, получим:

То есть $a_1 \neq -6$

$a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0$

$a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$

То есть решение: $(-6-2\sqrt{6}; 2\sqrt{6}-6)$.

Ищем пересечение двух решений и выбираем целые.

$a_1 = -10; -9; -8; -7; -5.$

Ответ: $a_1 = -10; -9; -8; -7; -5.$

Вариант 24
Часть 1

Чистовик ②

№2.

1) Пусть $M$ – середина $AB$. Из условия задачи следует, что $DM$ и $CM$ – ~~перпендикуля~~ перпендикуляры к ребру $AB$.
Тогда $(CMD)$ – плоскость симметрии тетраэдра.

2) Так как ребро $CD$ обязано принадлежать боковой поверхности и быть параллельно оси цилиндра, то $(CMD)$ перпендикулярно основаниям цилиндра, ребро $AB$ параллельно основаниям цилиндра.

3) Тогда, чтобы добиться минимального значения радиуса цилиндра, необходимо, чтобы ребро $AB$ и было его диаметром.

4) Итак, $AB$ – диаметр цилиндра (но не в основаниях, разумеется, а где-то внутри цилиндра), ребро $CD$ „вертикально" и принадлежит боковой поверхности, точки $A$ и $B$ тоже принадлежат боковой поверхности.

5) Получается, что расстояние от $M$ до прямой $CD$ тоже равно радиусу цилиндра.

6) $CM = \sqrt{49-4} = \sqrt{45}$, так как $CM$ – медиана, $DM = \sqrt{64-4} = \sqrt{60}$, так как $DM$ – медиана. Пусть $H$ – основание перпендикуляра из $M$ на $DC$, тогда при нашем условии $MH$ будет радиус. Значит отрезок $DC$ состоит из кусочков $DH$ и $HC$, где $DH = \sqrt{60-4} = \sqrt{56}$, $HC = \sqrt{45-4} = \sqrt{41}$

Ответ: $\sqrt{41} + \sqrt{56}$

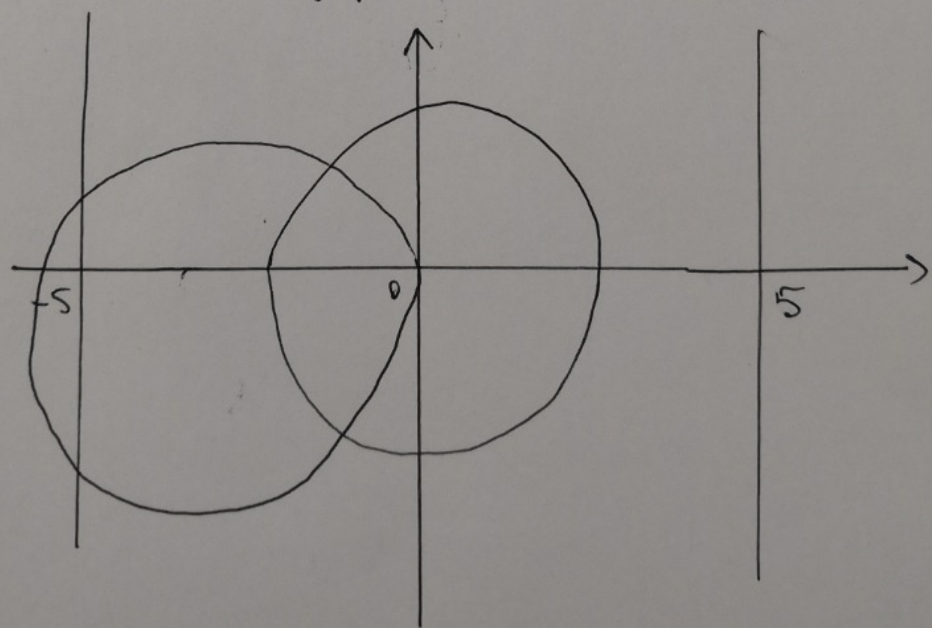
Вариант 24 Чистовик ③
Часть 1

№3.

Преобразуем исходную систему и изобразим её в осях $(a, b)$.
Второе уравнение системы равносильно системе:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \le 10 \\ a^2 + b^2 \le -6a - 2b \end{cases}$$

Второе задаёт окружность $(a+3)^2 + (b+1)^2 \le 10$.
Первое тоже задаёт окружность с аналогичным радиусом.
Первое уравнение системы воспримем, как условие этого, что расстояние от точки $(a; b)$ до точки $(x; y)$ не превосходит $\sqrt{10}$ (достаточно найти, когда оно равно $\sqrt{10}$ и взять внутренность этого множества.




Расстояние между центрами равно радиусу окружности, значит нам нужно посчитать площадь сектора с углом $120^\circ$, так как

Вариант 24 Черновик ④
Часть 1

№3. продолжение

треугольники правильные, радиусом $2\sqrt{10}$.
Площадь равна: $\pi \cdot \frac{40}{3}$, берём её 2 раза, так
как фигура симметричная, но тогда мы
2 раза посчитаем площадь ромба ~~[illegible]~~

21102631 (U328971 M1299373)

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102631**

ID профиля: **328971**

Вариант 24

Черновик

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 33 \\ НОК(a;b;c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \end{cases}$$

$33^{15} \cdot 3^{4}$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(29-x)$, $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 9 \\ \hline 153 \\ \times\ 13 \\ \hline 459 \\ +153\ \ \\ \hline 1989 \end{array}$$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$a=3^{a}\cdot 11^{b}$

$a=3^{c}\cdot 11^{d}$

$a=3^{e}\cdot 11^{f}$

$$\begin{cases} a+c+e=19 \\ b+d+f=15 \end{cases}$$ ~~+ 34~~

$a = \underline{b+c+d}$

$a+c+e=19$

$b+d+f=15$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 6 \\ \hline 102 \\ +\ \ 6 \\ \hline 108 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ \times\ 6 \\ \hline 78 \\ +\ 6 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 108 \\ \times\ 84 \\ \hline 432 \\ +864\ \ \\ \hline 9032 \end{array}$$

21102631 (U328971 M1299374)

[redacted] 2

Черновик

[redacted]

№4.

Если НОД макс, то из первого следует, что каждое из чисел делится на 3 и на 11 и наименьшая степень 3 и 11* в разложении равна 1 в каком-то из этих чисел. Из второго получается, что никаких делителей, кроме 3 и 11 в разложении чисел нет.

ТБ есть $a = 3^a \cdot 11^b$; $a = 3^c \cdot 11^d$; $a = 3^e \cdot 11^f$, значит

$a + c + e = 19$

$b + d + f = 15$

В каждой из строк одно из чисел должно быть единицей, сделать так 9 способов (любой из трёх в первой строке и любой из трёх во второй).

Далее получим, что сумма оставшихся равна 18 и 14, нужно подсчитать количество их натуральных решений. Будет решений 17 и 13 соответственно. Если выбрать натуральным числом, меньшим правой части, какую-то из переменных, что вторая определится однозначно, а количество способов сделать это равно 17 и 13 соответственно. Итого: $3 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 13 = 1989$

[redacted] ~~кодв^a~~ $\frac{1}{\text{кодв}^a} \cdot \text{кода}^c$

21102631 (U328971 M1299374)

Вариант 24

Часть 2

Чистовик ①

№4.

Если НОД такой, то из первого следует, что каждое из чисел делится на 3 и на 11. При этом существует число, у которого степень 3 и 11 в разложении равна 1. Из второго следует, что никаких делителей, кроме 3 и 11 в разложении чисел нет.

Из второго следует, что у какого-то из чисел в разложении есть степень 19 у 3 и степень 15 у 11. Тогда задача равносильна тому, что нужно подсчитать количество троек чисел по степеням так, что в одной из них есть число 1; число 19 и третье число находится от 1 до 19 и количество троек чисел так, что в одной из них есть число 1, число 15 и третье число находится от 1 до 15.

Если единицы две, или 19 встречается 2 раза, то таких вариантов 6, аналогично для 15.

Если третье число не совпадает с первыми двумя, то мы выбираем 3-мя способами позицию для 1, двумя способами позицию для старшей степени, и остаётся один вариант для позиции третьего числа (в случаях со степенями 11 будет 13 вариантов) и 17 вариантов для степеней троек. В итоге: $(6+6\cdot17)\cdot(6+6\cdot13)=108\cdot84=9072$

Ответ: 9072

21102631 (U328971 M1299374)

Вариант 24

Часть 2

Чистовик ②

№5.

Заменим $29-x=a$, $-(x+1)=b$,

$\frac{x}{7}+7=c$. Тогда:

$\underbrace{2\log_a c}_{=n}$, $\underbrace{\frac{1}{2}\log_b a}_{=m}$, $\underbrace{2\log_c b}_{=\frac{1}{m\cdot n}}$

Значит: $2n=\frac{1}{2}m=\frac{2}{m\cdot n}-1$

$2n-1=\frac{1}{2}m=\frac{2}{m\cdot n}$

$2n=\frac{1}{2}m-1=\frac{2}{m\cdot n}$

21102631 (U328971 M1299374)