Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102625**

ID профиля: **819945**

Вариант 24

Чистовик

№1 Вариант 24

$$\begin{cases} a_5 a_{18} > S - 4 \\ a_{10} a_{13} < S + 60 \end{cases}$$

Т. к. a_n - член арифметической прогрессии:

$a_n = a_1 + (n-1)b$, $S_9 = \frac{2a_1 + 8b}{2} 9 = 9(a_1 + 4b)$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} (a_1+4b)(a_1+17b) > 9(a_1+4b) - 4 \\ (a_1+9b)(a_1+12b) < 9(a_1+4b) + 60 \end{cases}$$

Необходимо найти все возможные целые a_1, удовлетворяющие системе неравенств.

$$\begin{cases} 9(a_1+4b) < (a_1+4b)(a_1+17b) + 4 \\ 9(a_1+4b) > (a_1+9b)(a_1+12b) - 60 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} (a_1+9b)(a_1+12b) - 60 < (a_1+4b)(a_1+17b) + 4 \\ 9(a_1+4b) < (a_1+4b)(a_1+17b) + 4 \end{cases}$$

~~$a_1^2 + 21ba_1 + 68b^2 - 60 < a_1^2 + 21ba_1$~~

$\cancel{a_1^2} + \cancel{21ba_1} + 108b^2 - 60 < \cancel{a_1^2} + \cancel{21ba_1} + 68b^2 + 4$

$40b^2 < 64$

$10b^2 < 16$ $\quad b^2 < \frac{8}{5}$ $\quad b < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

Однако все члены арифметической прогрессии целые, она возрастающая $\Rightarrow$ $b > 0$, $b \in N$, $b < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$\Downarrow$ Возможно ~~Существует~~ всего одно ~~несколько~~ значение: $b = 1$ ~~значений b.~~

Тогда уравнение ~~принимает вид~~: система принимает вид:

$$\begin{cases} (a_1+4)(a_1+17) > 9a_1 + 32 \\ (a_1+9)(a_1+12) < 9a_1 + 96 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + 32 \\ a_1^2 + 21a_1 + 108 < 9a_1 + 96 \end{cases}$$

чистовик
вариант 24

~~$(a_1+4)(a_1+7) = 9a_1+32$~~

a_1 -

$$\begin{cases} a_1^2+12a_1+36 > 0 \\ a_1^2+12a_1+12 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+6)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -6 \\ a_1^2+12a_1+12 < 0 \end{cases}$$

$D = 144-48 = 96$

$a_0 = \frac{-12\pm\sqrt{96}}{2} = \frac{-12\pm4\sqrt6}{2} = -6\pm2\sqrt6$

$-6-2\sqrt6$ $\quad -6 \quad$ $-6+2\sqrt6$ $\quad a_1$

Найдем целые значения, принадлежащие этому промежутку: $-6-2\sqrt6 > -10$, $-6-2\sqrt6 < -9$

$-6+2\sqrt6 > -3$, $-6+2\sqrt6 < -2$

$\Downarrow$

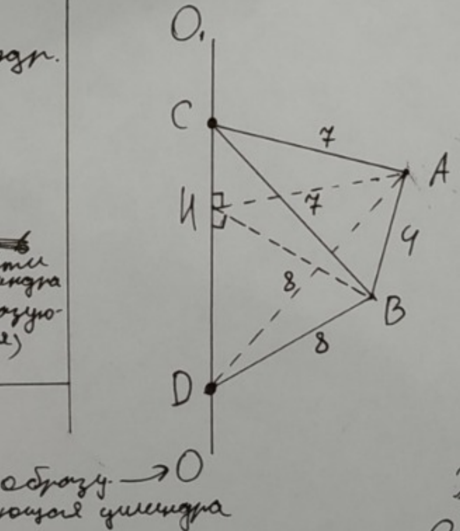
$a_1 \in \{-9;-8;-7;-5;-4;-3\}$

Ответ: $a \in \{-9;-8;-7;-5;-4;-3\}$

№2

Дано:
ABCD - тетраэдр.
$AB=4$
$AC=CB=7$
$AD=DB=8$
A, B, C, D ~~относятся к~~ ∈ поверхности ~~цилиндр.~~ цилиндра
$CD \parallel OO_1$ (образующая)
r наим.

$CD = ?$



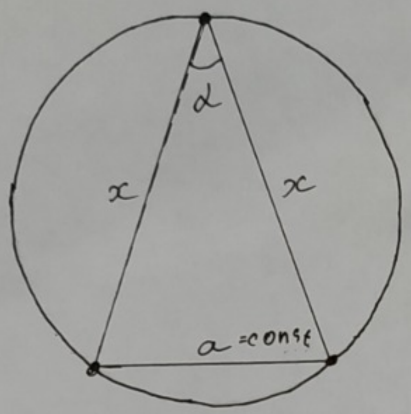
Решение:
Рассмотрим △ $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$.
CD - общ, $CB=CA$, $AD=BD$
$\Downarrow$
$\triangle ACD = \triangle BCD$
$\Downarrow$
AH - выс. $\triangle CAD$, BH - выс. $\triangle CBD$, $AH=BH$
$\Downarrow$
$(ABH) \perp O_1O$. ($AH \perp OO_1$, $BH \perp OO_1$)
Рассмотрим $\triangle ABH$
$C, D \in OO_1$
$\Downarrow$
$H \in OO_1$, A, B ∈ поверхности цилиндра.
$\Downarrow$

Чистовик
2и вариант

$\Downarrow$

r цилиндра $= R$ окр, описанной около ABH.

Рассмотрим ~~треугольник~~ равнобедренный треугольник с 1 известной стороной, вписанный в окружность:



В каком случае R окр минимален?

По т. синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

$\sin\alpha \in (0; 1]$
(в треугольнике)

$$\Downarrow$$

$$R_{min} = \frac{a}{2}$$

Значит, чтобы r цилиндра был минимален, AB - диаметр его сечения плоскостью (ABH).

$$AH = BH \overset{\Downarrow}{=} \frac{AB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \quad (\angle AHB = 90^\circ)$$

Рассм. $\triangle CBD$: $CB = 7$, $BD = 8$, $BH = 2\sqrt{2}$

$\Downarrow$

Можно однозначно определить CD: $CD = \sqrt{BC^2 - BH^2} + \sqrt{BD^2 - BH^2}$

$$CD = \sqrt{7^2 - 8} + \sqrt{8^2 - 8} = \sqrt{41} + \sqrt{56} = \sqrt{41} + 2\sqrt{14}$$

Ответ: $CD = \sqrt{41} + 2\sqrt{14}$

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 10 \\ a^2 + b^2 \leq \min(-6a - 2b, 10) \end{cases} \quad (x; y) \in M \quad S_M = ?$$

Рассмотрим 1 неравенство. Это набор окружностей с координатами центров $(a; b)$ и $r = \sqrt{10}$ => нужно найти a и b, удовлетворяющие 2 неравенству, а затем построить около каждой из этих точек ~~окружно~~ на координатной плос-

Чистовик
24 вариант

кости a, b окружность с $r=\sqrt{10}$, это и будет ~~решениям~~ фигура M.

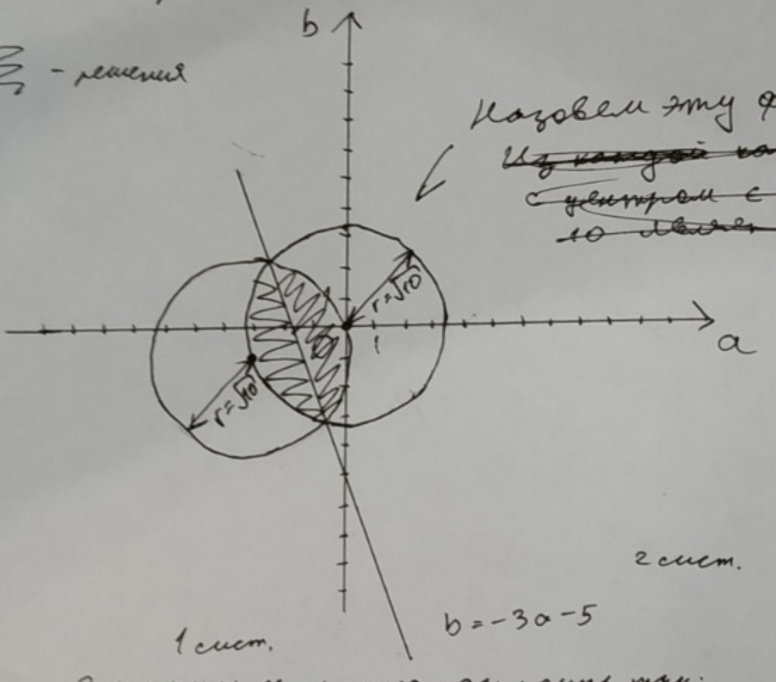
$$a^2+b^2 \le \min(-6a-2b, 10)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} a^2+b^2 \le 10 \\ -6a-2b \ge 10 \end{cases} \quad \text{1 сист.} \quad \to -3a-b \ge 5 \to b \le -3a-5 \\ &\begin{cases} a^2+b^2 \le -6a-2b \\ -6a-2b < 10 \end{cases} \quad \text{2 сист.} \quad \to (a^2+6a+9)-9+(b^2+2b+1)-1 \le 0 \\ &\qquad\qquad (a+3)^2+(b+1)^2 \le 10 \end{aligned}\right.$$

Построим графики на плоскости ab:

⦚ – решения



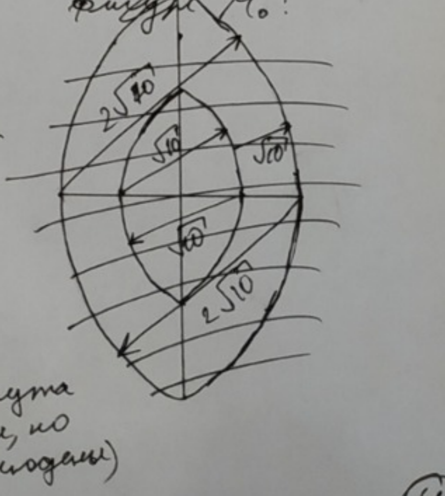
Назовем эту фигуру M_0.

~~Из каждой каждая окружность с центром в M_0 и радиусом 10 левее~~

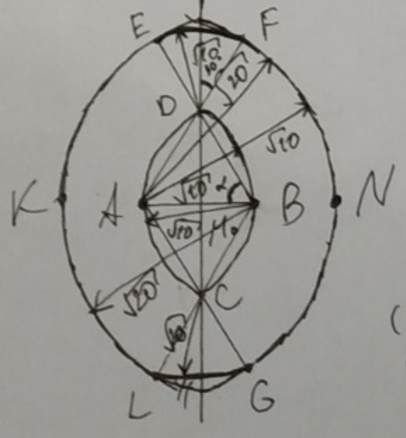
Все ~~окружности~~ круги с центром в M_0, $r=\sqrt{10}$ образуют фигуру M.

Т.е. каждая точка M удалена от M_0 не более, чем на r.

Фигура M подобна фигуре M_0:



Значит её можно построить так:



$AB=r$,
$AD=DB=BC=AC=r$
$\Downarrow$
$ADBC$ ромб.

(фигура повернута в пространстве, но пропорции соблюдены)

Чистовик

24 вариант

Посчитаем площадь фигуры M:

$AB = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} = \cancel{\ } \Rightarrow \cos\angle = \frac{1}{2} \quad \angle = 60^\circ$

Тогда: $S_M = S_{\text{сектора } AFNG} + S_{\text{сектора } BEKL} - S_{\text{ромба } ABCD} + S_{\text{сектора } DEF} + S_{\text{сектора } CLG}$

Площадь всех этих фигур можно найти (известен угол для сектора, все радиусы, стороны и диагонали ромба. ($r=\sqrt{10}$, $R=2\sqrt{10}$, $\angle = 60^\circ$.)

$\cancel{S_M = \frac{2\cdot 60^\circ}{360^\circ}}$ $S_M = 2\cdot\frac{2\angle}{360}\cdot\pi R^2 - 2\left(\frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) + 2\cdot\frac{2(90^\circ-\angle)}{360^\circ}\pi r^2$

Подставим:

$S_M = \frac{240^\circ}{360^\circ}\cdot\pi\cdot 40 - 2\cdot\frac{10\sqrt{3}}{4} + 2\cdot\frac{2\cdot 30^\circ}{360^\circ}\pi\cdot 10$

$S_M = \frac{40\pi\cdot 2}{3} - 5\sqrt{3} + \frac{10\pi}{3}$

$S_M = 30\pi - 5\sqrt{3}$

Ответ: $S_M = 30\pi - 5\sqrt{3}$

5

21102625 (U819945 M1299101)

черновик

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9

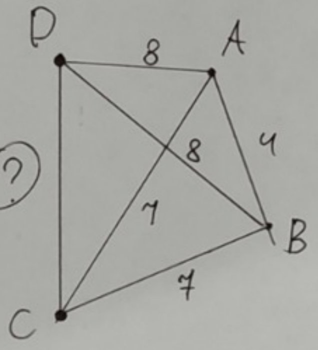
$+b$ $+b$

$$\begin{cases} (a_1+4b)(a_1+17b) > \dfrac{a_1+a_1+8b}{2}9-4 \\ (a_1+9b)(a_1+12b) < (a_1+4b)9+60 \end{cases}$$

$(a_1+4b)(a_1+17b) > (a_1+4b)9-4$

$(a_1+9b)(a_1+12b) < (a_1+4b)9+60$

3 $\frac{8}{5}$



?

1 2 . $4 > \frac{8}{5}$

96 48

24 $\cdot 4$

$6 \cdot 4^2$

-7

-8 ?

-10 $-8 < -6-2\sqrt{6}$

-9 $-2 < -2\sqrt{6}$

$-3 < -2\sqrt{6}$

$\frac{AB}{\sin\alpha}=2R$

№3 -3

черновик

$$\begin{cases} -6a-2b > 10 \\ a^2+b^2 \le 10 \end{cases}$$

окружности в ~~координа-~~ ~~ках~~ с к. центров ~~АВ~~. $(a;b)$

$-3a-b<10$

~~сами~~

$$\begin{cases} -6a-2b<10 \\ a^2+b^2 \le -6a-2b \end{cases}$$

$-3a-b$

$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

для ромба

$2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102625**

ID профиля: **819945**

Вариант 24

чистовик

24 вариант

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=33 \\ НОК(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение. Из него следует, что $a \vdots 33$, $b \vdots 33$, $c \vdots 33$,

Из 2 уравнения $a=3^{n}\cdot 11^{k}$, $b=3^{n_1}\cdot 11^{k_1}$, $c=3^{n_2}\cdot 11^{k_2}$

⇓

чтобы НОД по прежнему оставался 33 $\min(n,n_1,n_2)=1$; $\min(k,k_1,k_2)=1$. (min - минимальное значение из данных в скобках)

чтобы НОД по прежнему оставался $3^{19}\cdot 11^{15}$, $\max(n,n_1,n_2)=19$; $\max(k,k_1,k_2)=15$

При этих условиях a, b, c удовлетворяют систему решений. Найдем количество таких троек чисел:

Распределений k_{max}, k_{min}, n_{max}, n_{min}:

: $1\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2=36$

При этом для каждого из этих распределений существует $17\cdot 13$ ~~18·14~~ уникальных распределений степеней для оставшихся незаданными n и k.

⇓

$N_{общ.} = 36\cdot \cancel{18\cdot 14}\,17\cdot 13 + N$не уник. случаи

~~Найдем случаи, когда не уникальные случаи возникают~~, когда один или оба из ~~двух~~ "свободных" (не max и не min) n или k : $n=n_{max}$ или $n=n_{min}$ или $k=k_{max}$ или $k=k_{min}$. Найдем количество решений для всех таких случаев: если одно условие выполняется, $N_1 = \frac{\quad}{2}$

Чистовик

24 вариант

Не уникальными случаями я назвал те случаи, когда „свободное" число $n = n_{max}$ или n_{min}, $k = k_{min}$ или k_{max}

• (не необходимо для соблюдения системы с заданным распределением $n_{min}, n_{max}, k_{min}, k_{max}$.

Найдем кол-во таких случаев:

$N_{не\ ун.} = N_1 + N_2$

N_1 — только n или только k принимает граничные значения

N_2 — оба n и k своб. принимают граничные значения

$$N_{не\ ун.} = \frac{36(2\cdot 13 + 2\cdot 17)}{2} + \frac{36(\cdot 4)}{4}$$

$N_{не\ ун.} = 36(13+17) + 36$

$N_{не\ ун.} = 36 \cdot 31$

$\Downarrow$

$N_{общ.} = 36 \cdot 17 \cdot 13 + 36 \cdot 31 = 7956 + 1116 = 9072$

Ответ: $N_{общ.} = 9072$.

№5

$\underset{a}{\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)}, \underset{b}{\log_{(x+1)^2}(29-x)}, \underset{c}{\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)}$

Назовем эти числа a, b, c

Рассмотрим поочередно, когда равна между собой каждая пара; при этом $\sqrt{29-x}$ обозначим t, $-x-1$ обозначим l, $\sqrt{\frac{x}{7}+7}$ обозначим k

$a = b$: $\log_t k^2 = \log_{l^2} t^2$

$$\begin{cases} 2\log_t k = \log_l t \\ \log_l t + 1 = \log_k l \end{cases}$$

$b = c$: $\log_{l^2} t^2 = \log_k l$

$$\begin{cases} \log_l t = \log_k l \\ \log_k l + 1 = 2\log_t k \end{cases}$$

$a = c$: $\log_t k^2 = \log_k l$

$$\begin{cases} 2\log_t k = \log_k l \\ \log_k l + 1 = \log_l t \end{cases}$$

Чистовик

24 вариант

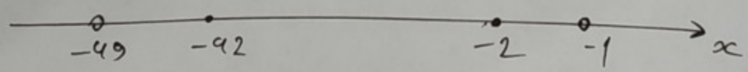
$$\begin{cases} 2\log_t k = \log_l t \\ \log_l tl = \log_k l \end{cases} \quad \begin{cases} 2\log_t k = \log_k l \\ \log_k kl = \log_l t \end{cases} \quad \begin{cases} \log_l t = \log_k l \\ \log_k lk = 2\log_t k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2\ln k}{\ln t} = \frac{\ln t}{\ln l} \\ \frac{\ln t + \ln l}{\ln l} = \frac{\ln l}{\ln k} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2\ln k}{\ln t} = \frac{\ln l}{\ln k} \\ \frac{\ln k + \ln l}{\ln k} = \frac{\ln t}{\ln l} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\ln t}{\ln l} = \frac{\ln l}{\ln k} \\ \frac{\ln l + \ln k}{\ln k} = \frac{2\ln k}{\ln t} \end{cases}$$

Рассмотрим числа: ОДЗ:

$$\begin{cases} 29 - x > 0 \\ 29 - x \neq 1 \\ \frac{x}{7} + 7 > 0 \\ x + 1 \neq 0 \\ -x - 1 > 0 \\ \frac{x}{7} + 7 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > -49 \\ x \neq -42 \end{cases}$$

Рассмотрим числа на промежутках:



черновик

$\begin{cases} \text{НОД}(\cancel{33}\ a, b, c) \\ \text{НОК}(a; b; c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \end{cases}$

у всех log

пост и ... (>1) всегда!

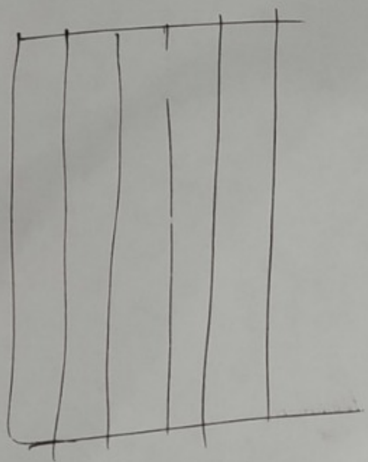
Это задает след. условия:

$a, b, c \,\vdots\, 33$, но $1 \,\vdots\, 3$, $1 \,\vdots\, 11$

и далее либо 3, либо 11

Также из НОК:

$a^{\log_b c} \Leftrightarrow \boxed{c^{\log_b a}}$



$a \quad b \quad c$

– min k

$2^{\log_3 9} = 4$

$9^{\log_3 2} = 4$

$$\begin{array}{r} 36 \times \\ 13 \\ \hline 108 \\ 36 \\ \hline 468 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 468 \\ 17 \\ \hline 3276 \\ 468 \\ \hline 7956 \end{array}$$

$7956 + 36 \cdot 31$

$$\begin{array}{r} \times\ 36 \\ 31 \\ \hline 36 \\ 108 \\ \hline 1116 \end{array}$$

$1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot$

$c^{2\log_t k} = c^{\log_c t}$

$c^{2\log_t k}\ \ \cancel{t}$

$t^{2\log_t k} = k^{\log_c t}$

$t^{2\log_t k} = \cancel{\log}$

$t^{\log_c t}$

	a	b	c
3	·	o	×
11	×	·	o

$1 - \cancel{19}\ 18$

$1 - \cancel{15}\ 14$

$2 - 1$

$7956 + 116$

$$\begin{array}{r} +\ 7956 \\ 1116 \\ \hline 9072 \end{array}$$

Черновик

$x \in [$

$-x-1>0$

$29-x>0$

$x<-1$

$\boxed{y+1}$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)+1=$

$=\log\sqrt{\frac{x}{7}+7}$

$2\log_a b \cdot \log_c a \cdot \log_b c$

$\log_a b^2 = \log_c a^2$

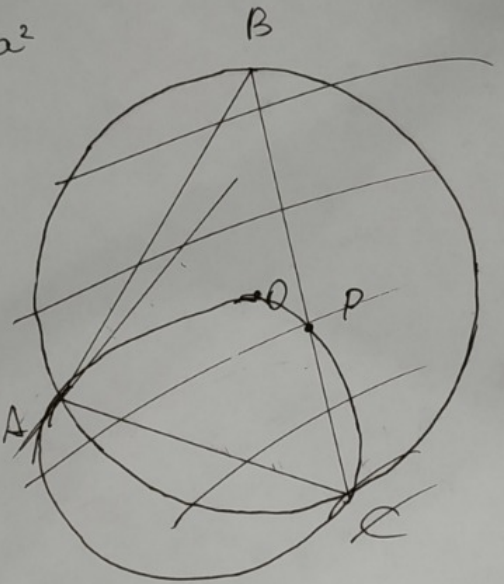
$\begin{cases} a=c \\ b^2=a^2 \end{cases}$

$\boxed{b=a=c}$

$\log_a b^2 a = \log_b a$

$\cancel{\boxed{a=b}}$

+1 не выйдет



-20 ?

$x<-1$

a b c

1

0

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$$\frac{\ln t+\ln l}{\ln l}=\frac{\ln l}{\ln k}$$

Найд. границы:

$\sqrt{29-x}^{+8}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\sqrt{29-x}^{\log_{(x+1)^2}(29-x)}$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)+\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$\cancel{\frac{2\ln\left(\frac{x}{7}+7\right)}{\ln(29-x)}+\frac{\ln(29-x)}{2\ln(x+1)}}=0$

Черновик

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

При каких они пересекут 1?

$\sqrt{29-x} = \left(\frac{x}{7}+7\right)$

$\boxed{29-x = \frac{x^2}{49} + \frac{2x}{1} + 49}$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$\cancel{\log}$

$\cancel{\log_{\sqrt{29-x}} x}$

$\sqrt{29-x}$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$x < 4$?

$\log_5$

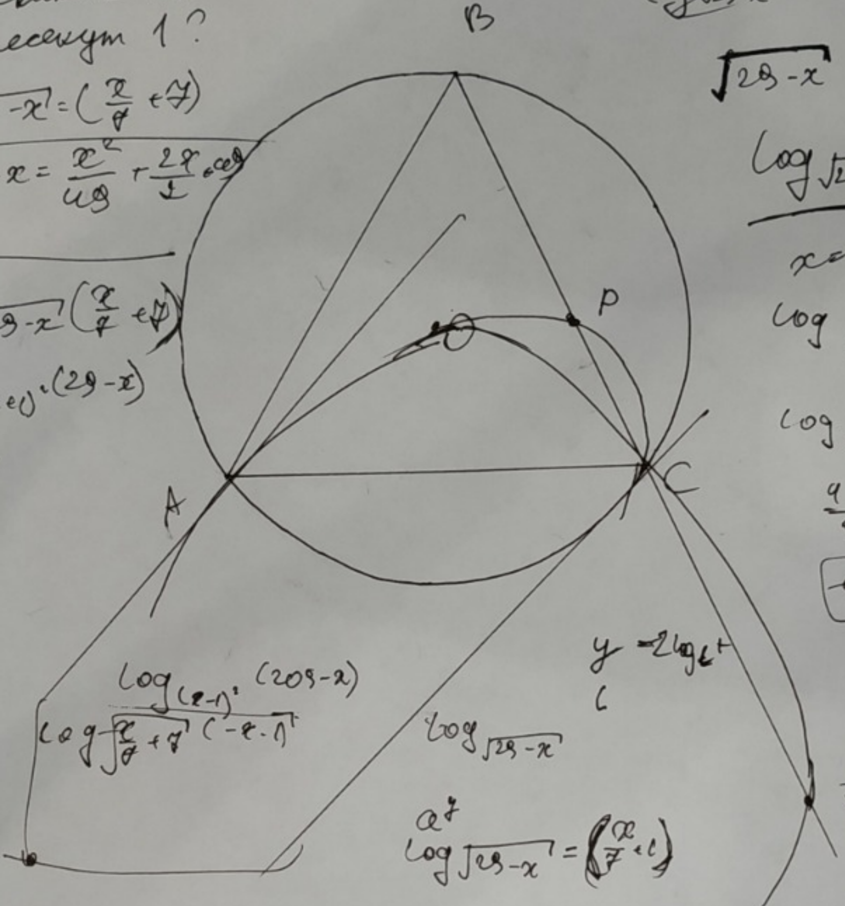
$\log_{25}$

$\frac{4}{7} + 28 \cdot \left(\frac{32}{7}\right)$

$\boxed{0 - 1}$

$x = -1$

7



$\log_{(x-1)^2}(209-x)$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

$y = 2\log_c t$

c

$\log_{\sqrt{29-x}}$

a^7

$\log \sqrt{29-x} = \left(\frac{x}{7}+1\right)$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) \quad \log_{(x+1)^2}(29-x) \quad \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

$\boxed{\log_a b^2 \quad \log_{c^2} a^2 \quad \log_b c}$

$\boxed{2\log_a b \quad \log_c a \quad \log_b c}$

$\cancel{2\log_a b + \log_b c}$

$(abc)^{2\log_a b}$ $\cancel{\log_c a}$ $\log_b c$

$b^2 \cdot b^{2\log_a b} \cdot c^{2\log_a b} = abc$

c

$c^{\log_b c}$

~~$\log_{\sqrt{29-x}}$~~ черновик

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(29-x)$, $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

~~Ко~~ $\sqrt{29-x}$ $\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$\log_b a = \log_c d$ $y = \log_b a$

$\frac{\ln a}{\ln(b)} = \frac{\ln(d)}{\ln(c)}$ $y = \log_c d$

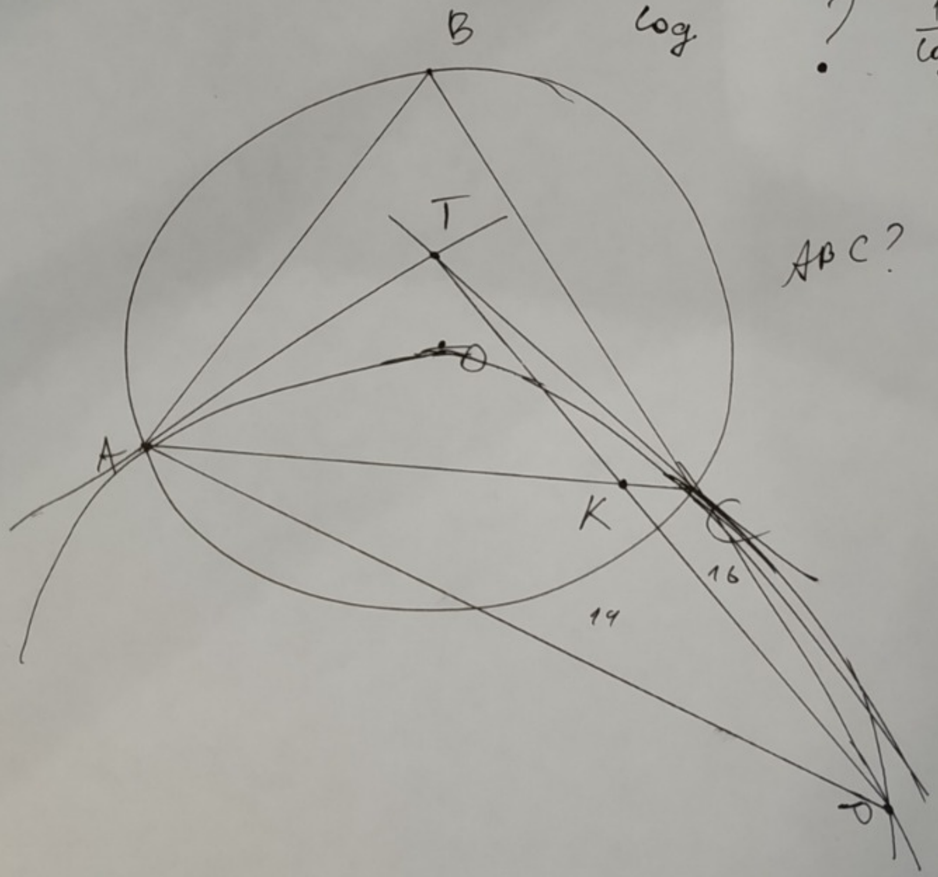
$c^{\boxed{y}} = d$

$b^{\boxed{y}} = a$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}$ ~~$(-x-1)\left(\sqrt{\frac{x}{7}+7}\right)$~~

№3

log ? $\frac{1}{\log_a a}$



ABC?