Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102423**

ID профиля: **846740**

Вариант 24

№1. Чистовик

Математика, 11 кл.
Вариант 24

Пусть разность прогрессии — d. Все члены прогрессии — целые, след., a_1 — целый, след., и d целое, т.к. остальные члены получаются прибавлением d к a_1. Прогрессия возрастающая, поэтому $d \geq 1$.

$S = \frac{a_1 + a_1 + 8d}{2} \cdot 9 = (a_1 + 4d) \cdot 9$

$a_5 a_{18} > S - 4$

$(a_1 + 4d)(a_1 + 17d) > S - 4$

$a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 > S - 4$

① $a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 + 4 > S$

$a_{10} a_{13} < S + 60$

$(a_1 + 9d)(a_1 + 12d) < S + 60$

$a_1^2 + 21a_1 d + 108d^2 < S + 60$

② $a_1^2 + 21a_1 d + 108d^2 - 60 < S$

$\Downarrow$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{21a_1 d} + 68d^2 + 4 > \cancel{a_1^2} + \cancel{21a_1 d} + 108d^2 - 60$

$64 > 40d^2$

$d^2 < \frac{8}{5}$

$$\begin{cases} d < \sqrt{\frac{8}{5}} < 2 \Rightarrow d = 1 \\ d \geq 1 \\ d \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1

① $a_1^2 + 21a_1 + 68 + 4 > 9a_1 + 36$

$a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0$

$(a_1 + 6)^2 > 0$

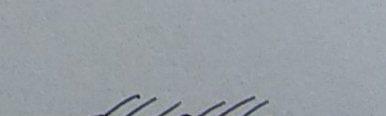
$a_1 \neq -6$

② $a_1^2 + 21a_1 + 108 - 60 < 9a_1 + 36$

$a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$

$D/4 = 36 - 12 = 24$

$a_1 = -6 \pm 2\sqrt{6}$



$-6 + 2\sqrt{6} \vee -1$ | $-6 + 2\sqrt{6} \vee -2$ | $-6 - 2\sqrt{6} \vee -10$ | $-6 - 2\sqrt{6} \vee -11$

$2\sqrt{6} \vee 5$ | $2\sqrt{6} \vee 4$ | $4 \vee 2\sqrt{6}$ | $5 \vee 2\sqrt{6}$

$24 < 25$ | $\sqrt{6} > 2$ | $2 < \sqrt{6}$ | $25 > 24$

Ответ: $a_1 \in \{-10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2\}$.

Чистовик

Математика, 11 кл.
Вариант 24

2

№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10\\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b,\,10)\end{cases}$$

Первое уравнение системы — круг радиуса $\sqrt{10}$ с центром в точке (a,b). Следовательно, второе уравнение системы задаёт множество центров кругов первого уравнения.

$$a^2+b^2\le \min(-6a-2b,\,10) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2+b^2\le -6a-2b\le 10\\ a^2+b^2\le 10<-6a-2b\end{array}\right.$$

Данная совокупность задаёт пересечение кругов радиуса $\sqrt{10}$ с центрами в точках $(0,0)$ и $(-3,-1)$ и имеющих соответственно уравнения:

$$\begin{cases}a^2+b^2=10\\ (a+3)^2+(b+1)^2=10\end{cases} \Rightarrow (a+3)^2-a^2+(b+1)^2-b^2=0 \Rightarrow 3(2a+3)+(2b+1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=-3a-5$$

$$a^2+(-3a-5)^2=10$$

$$10a^2+30a+25=10$$

$$2a^2+6a+3=0$$

$$D/4=9-6=3$$

$$a=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\\ b=-3\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)-5=\frac{-1-3\sqrt{3}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}a=\frac{-3-\sqrt{3}}{2}\\ b=-3\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right)-5=\frac{-1+3\sqrt{3}}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

Следовательно, M — объединение кругов радиуса $\sqrt{10}$, центры которых лежат на пересечении кругов радиуса $\sqrt{10}$ с центрами в точках $(0,0)$ и $(-3,-1)$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102423**

ID профиля: **846740**

Вариант 24

№4. Чистовик Математика, 11 кл.

Вариант 24

Пусть $a=a_1k$, $b=b_1k$, $c=c_1k$, где $k=НОД(a;b;c)$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} k=33 \\ a_1b_1c_1k=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases} \Rightarrow a_1b_1c_1=3^{18}\cdot 11^{14}$$

Исходная задача равносильна задаче поиска количества натуральных решений уравнения $a_1b_1c_1=3^{18}\cdot 11^{14}$, т.к. каждой тройке решений (a_1', b_1', c_1') соответствует единственная тройка (a', b', c'), где $a'=a_1'k$, $b'=b_1'k$ и $c'=c_1'k$. Пусть $a_1=3^{\alpha_1}\cdot 11^{\beta_1}$, $b_1=3^{\alpha_2}\cdot 11^{\beta_2}$, $c_1=3^{\alpha_3}\cdot 11^{\beta_3}$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=18 & ① \\ \beta_1+\beta_2+\beta_3=14 & ② \\ \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Z} \\ \alpha_n, \beta_n \geq 0 \end{cases}$$

1

Количество решений $a_1b_1c_1=3^{18}\cdot 11^{14}$ равно произведению количеств решений ① и ② в целых неотрицательных числах.

① $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=18$

Пусть есть три ящика, в которые нужно положить α_1, α_2 и α_3 яблок соответственно так, чтобы всего яблок в ящиках оказалось 18. Поставим эти ящики рядом и обозначим перегородки между первым и вторым, а также вторым и третьим ящиками цифрой 0, а яблоки — единицей. Тогда количество способов, которыми можно разложить 18 яблок равно количеству чисел, которые можно составить из двух нулей и восемнадцати единиц, которые, в свою очередь, согласно формуле перестановок с повторениями, равно $\frac{20!}{18!2!}=\frac{19\cdot 20}{2}=190$

Аналогично для ② получим: $\frac{16!}{14!2!}=\frac{15\cdot 16}{2}=120$ способов. Итак, имеем

$120\cdot 190=22800$ способов. Ответ: 22800 троек.

Чистовик

Математика, 11 кл.
Вариант 24

№5.

С учётом ограничений, приведённые числа равны:

$2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\frac{1}{2}\log_{-x-1}(29-x)$, $2\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)$. Введём новые переменные, каждая из которых положительна и не равна 1:

$$\begin{cases} a = 29-x \\ b = \frac{x}{7}+7 \\ c = -x-1 \end{cases}$$

Тогда числа равны: ① $2\log_a b$, ② $\frac{1}{2}\log_c a$ и ③ $2\log_b c$, причём ни одно из них не равно 0. Рассмотрим всевозможные случаи:

① = ② = ③ − 1 ⇒ ① · ② = (③ − 1)^2

$$2\log_a b \cdot \frac{1}{2}\log_c a = (2\log_b c - 1)^2$$

$$\log_c b = (2\log_b c - 1)^2$$

Пусть $\log_b c = t$:

$$\frac{1}{t} = (2t-1)^2$$

$$4t^3 - 4t^2 + t - 1 = 0$$

$$(t-1)(4t^2+1) = 0$$

$$t = 1 \Rightarrow \log_b c = 1 \Rightarrow b = c$$

$$\frac{x}{7} + 7 = -x - 1$$

$$x + 49 = -7x - 7$$

$$8x = -56$$

$$x = -7$$

$$a = 29 + 7 = 36$$

$$b = -1 + 7 = 6$$

$$c = 6$$

$$2\log_a b = 2\log_{36} 6 = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{2}\log_c a = \frac{1}{2}\log_6 36 = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

$$2\log_b c = 2\cdot\log_6 6 = 2\cdot 1 = 2$$

① = ③ = ② − 1 ⇒ ① · ③ = (② − 1)^2

$$2\log_a b \cdot 2\log_b c = \left(\frac{1}{2}\log_c a - 1\right)^2$$

$$4\log_a c = \left(\frac{1}{2}\log_c a - 1\right)^2$$

Пусть $\log_c a = y$:

$$\frac{4}{y} = \left(\frac{1}{2}y - 1\right)^2$$

$$y^3 - 4y^2 + 4y - 16 = 0$$

$$(y-4)(y^2+4) = 0$$

$$y = 4 \Rightarrow \log_b c = 4 \Rightarrow c = b^4$$

$$-x - 1 = \left(\frac{x}{7}+7\right)^4$$

Запишем изначальные ограничения без учёта выколотых точек:

$$\begin{cases} 29 - x > 0 \\ -x - 1 > 0 \\ \frac{x}{7} + 7 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 29 \\ x < -1 \\ x > -49 \end{cases} \Rightarrow x \in (-49; -1).$$

$f(x) = -x-1$ убывает на $(-49; -1)$ и ~~не~~ достигает наибольшего значения, равного 48, на границе интервала, не входящего в область определения.

2

Чистовик

Математика, 11 кл.
Вариант 24

№5 (продолжение)

$② = ③ = ① - 1 \Rightarrow ② \cdot ③ = (① - 1)^2$

$\frac{1}{2}\log_c a \cdot 2\log_b c = (2\log_a b - 1)^2$

$\log_b a = (2\log_a b - 1)^2$

Пусть $\log_a b = z$:

$\frac{1}{z} = (2z-1)^2$

$4z^3 - 4z^2 + z - 1 = 0$

$(z-1)(4z^2+1) = 0$

$z = 1 \Rightarrow \log_a b = 1 \Rightarrow a = b$

$29 - x = \frac{x}{7} + 7$

$22 = \frac{8x}{7}$

$11 = \frac{4x}{7}$

$x = \frac{77}{4}$

$c = -\frac{77}{4} - 1 < 0 \Rightarrow x = \frac{77}{4}$ не подходит.

Ответ: $x = -7$.

3

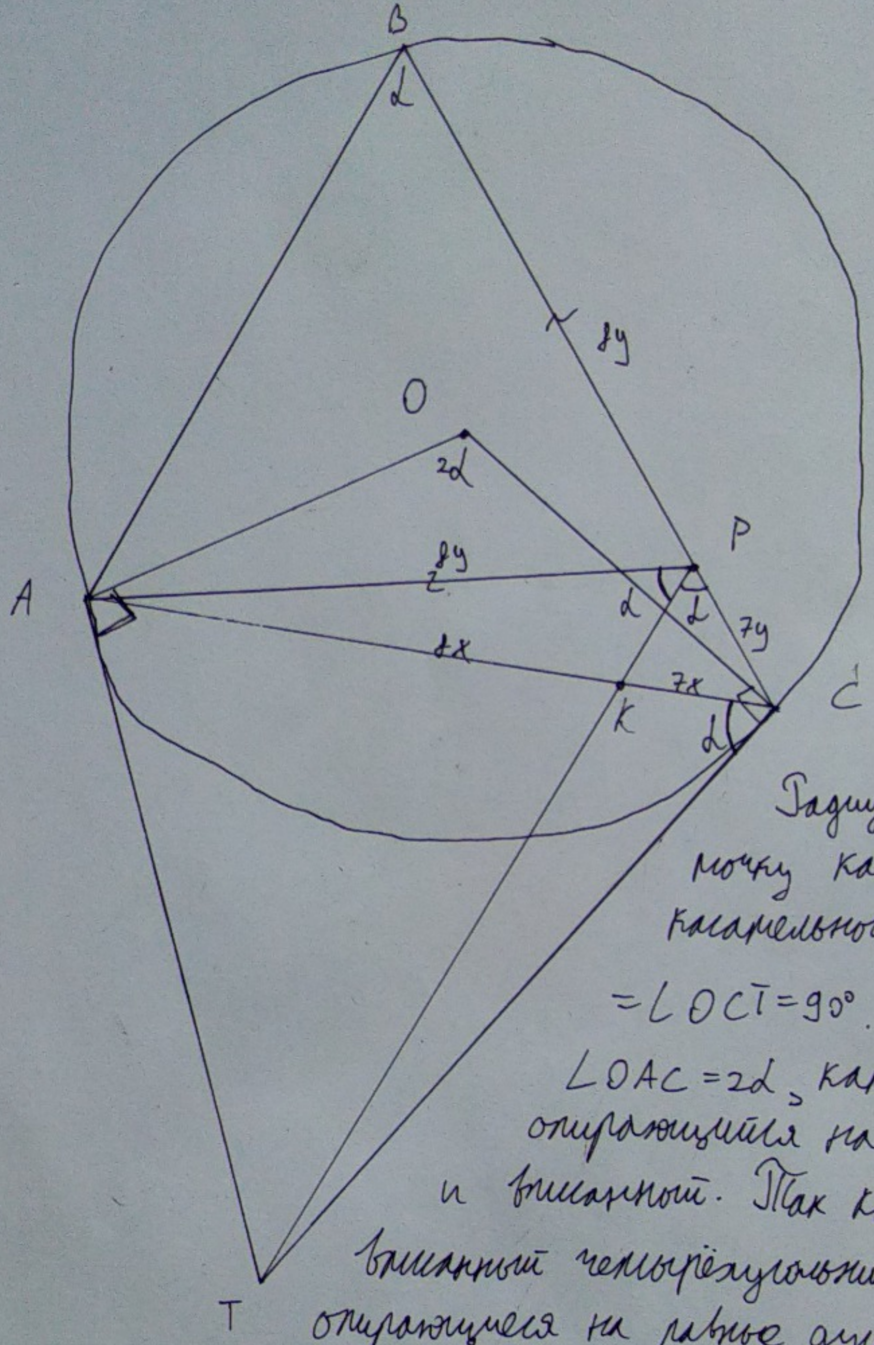
Продолжение случая $① = ③ = ② - 1$:

$g(x) = \frac{x}{7} + 7$ возрастает на $(-49; -1)$ и достигает наименьшего и наибольшего значений, равных 5 и $\frac{48}{7}$ на границах интервала, не входящих в область определения. Так как $g(x)$ монотонна, а её меньшее по модулю значение > 5, то наименьшее значение $h(x) = (\frac{x}{7}+7)^4 > (5)^4 = 625$. Следовательно, максимальное значение $f(x)$ на $(-49; -1)$ меньше минимального значения $h(x)$ на $(-49; -1)$, след., они не имеют общих точек на этом множестве, а значит и на более узком множестве, содержащем вдобавок выколотые точки.

Чистовик

Математика, 11 кл.
Вариант 24

№6.



4

Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, поэтому $\angle OAT = \angle OCT = 90°$. Пусть $\angle ABC = \alpha$.

$\angle OAC = 2\alpha$, как центральный, опирающийся на ту же дугу, что и вписанный. Так как $P \in \omega$, $AOPC$ — вписанный четырёхугольник. Вписанные углы, опирающиеся на равные дуги, равны, поэтому $\angle APC = \angle AOC = 2\alpha$. $\angle BAP = 180° - \angle ABP - \angle APB = 180° - \alpha - 180° + \angle APC = \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta APB$ равнобедренный и $AP = PB$. $\angle OAT + \angle OCT = 180° \Rightarrow AOCT$ — вписанный четырёхугольник. Точки T и P лежат на ω — описанной окружности $\Delta AOC \Rightarrow$ все точки A, O, P, C, T лежат на ω. ~~Угол между касательной и хордой равен~~ Величина угла между касательной и хордой равна величине вписанного угла, опирающегося на дугу, которую стягивает данная хорда, поэтому $\angle ACT = \alpha$. $\angle APT$ и $\angle ACT$ опираются на одну дугу, след., они равны и $\angle APT = \angle ACT = \alpha$

Чистовик

Математика, 11 кл.

Вариант 24

№6 (продолжение)

$\angle TPC = \angle APC - \angle APT = \alpha \Rightarrow PT$ – биссектриса угла APC.

$S_{APK}/S_{PKC} = AK/KC = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$. Пусть $KC = 7x$, тогда $AK = 8x$. По свойству биссектрисы в $\triangle APC$ $AP/PC = AK/KC = \frac{8}{7}$. Пусть $PC = 7y$, тогда $AP = PB = 8y$. $S_{APC} = S_{APK} + S_{PKC} = 30 = \frac{1}{2}\cdot PC\cdot AP\cdot \sin 2\alpha = 28y^2\sin 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 \sin 2\alpha = \frac{30}{28} = \frac{15}{14}$. $S_{APC} = \frac{1}{2}\cdot AP\cdot PB\cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = 32y^2\sin 2\alpha =$

$= \frac{32\cdot 15}{14} = \frac{16\cdot 15}{7} = \frac{240}{7}$. $S_{ABC} = S_{APB} + S_{APC} = \frac{240}{7} + 30 = \frac{450}{7}$.

5

а) Ответ: $\frac{450}{7}$.

$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$. $\begin{cases} \alpha < 90^\circ \\ \operatorname{tg}\alpha < 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha < 45^\circ$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{9}{25}} = \frac{25}{34}$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\frac{25}{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{5\cdot 3}{34} = \frac{15}{17} \Rightarrow \cos 2\alpha = \sqrt{1-\frac{225}{289}} = \frac{8}{17}$

$y^2 \sin 2\alpha = \frac{15}{14} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{15}{14\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{15\cdot 17}{14\cdot 15}} = \sqrt{\frac{17}{14}}$

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP\cdot PC\cdot\cos 2\alpha = \left(8\sqrt{\frac{17}{14}}\right)^2 + \left(7\sqrt{\frac{17}{14}}\right)^2 - \cancel{2}\cdot 8\cdot 7\cdot\frac{\cancel{17}}{\cancel{14}}\cdot\frac{8}{\cancel{17}} =$

$= \frac{64\cdot 17}{14} + \frac{49\cdot 17}{14} - 64 = \frac{17}{14}(64+49) - 64 = \frac{113\cdot 17}{14} - 64 = \frac{113\cdot 17 - 14\cdot 64}{14} =$

$= \frac{1921-896}{14} = \frac{1025}{14}$

б) Ответ: $AC = \frac{1025}{14}$.

21102423 (U846740 M1301114)