Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102378**

ID профиля: **281577**

Вариант 24

№1

$$\begin{cases} S = 9a + 36d = 9(a+4d) \\ (a+4d)(a+19d) > 9(a+4d) - 4 \\ (a+9d)(a+12d) \leq 9(a+4d) + 60 \end{cases}$$

$a \in Z$
$d \in N$
$d \neq 0.$

$a_5 + a_{18} = a_{10} + a_{13}$ Чистовик

$2a_5 a_{18} > 2S - 8$

$2a_{10} a_{13} \leq 2S + 120$ $> 2S - 8$ $< 2S + 120$

$a_5^2 + a_{18}^2 + 2a_5 a_{18} = a_{10}^2 + a_{13}^2 + 2a_{10} a_{13}$

$a_5^2 + a_{18}^2 - a_{10}^2 - a_{13}^2 = -2a_{15} a_{18} + 2_{10} a_{13}$ (3)

Черновик

$99 \times 2 = 198$ $28 \times 4 = 112$ $36 \times 4 = 144$ $121 - 112 = 9$ $144 - 19$ $198 - 144 = 54$ $81 - 16 = 65$

$(20+1)^2 = 400 + 40 + 1$

$42 \times 9 = 378$ $108 \times 4 = 432$

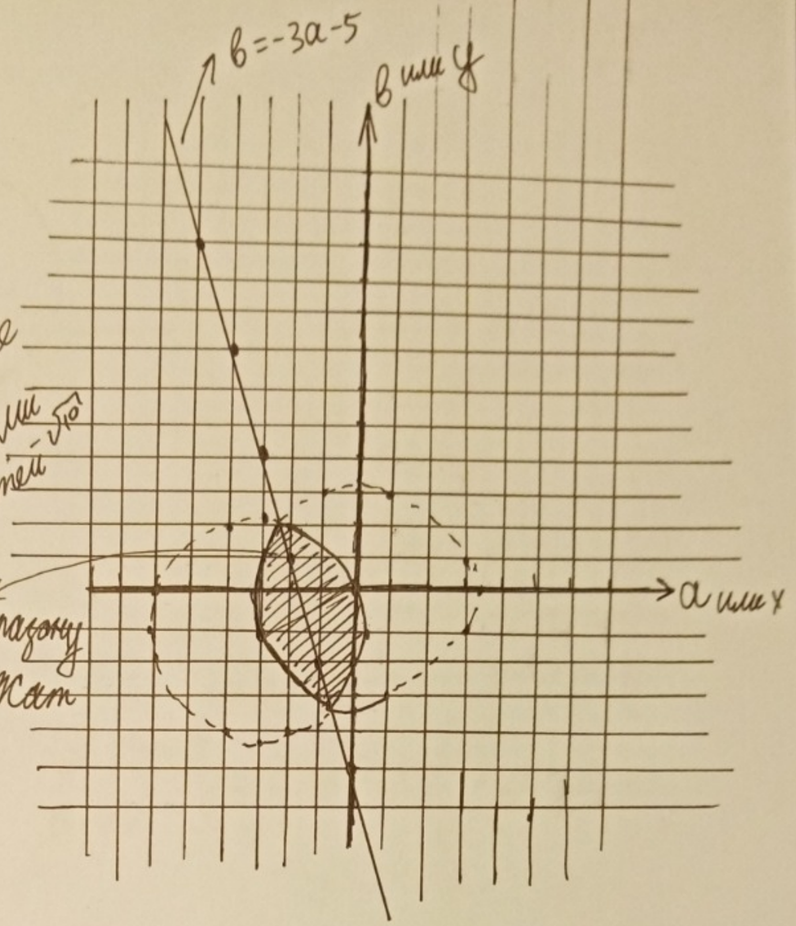
$378 - 144 = 234$

$378 :$ 240 81 321

21102378 (U281577 M1296695)

№3 Чистовик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10 \quad ① \\ a^2+b^2\le \min(-2b-6a,10) \quad ②\end{cases}$$



2) $$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}a^2+b^2\le -2b-6a\\ -2b-6a\le 10\end{cases}\\ &\begin{cases}a^2+b^2\le 10\\ -2b-6a\ge 10\end{cases}\end{aligned}\right.$$

расстояние между центрами окружностей $\sqrt{10}$

этому диапазону принадлежат a и b

$-2b-6a\le 10$

$\Rightarrow 2b\ge -6a-10$

$\Rightarrow b\ge -3a-5$

$a^2+6a+9+b^2+2b+1\le 10$

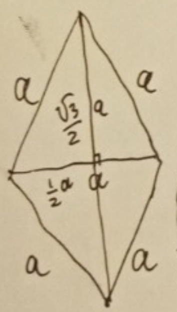
$(a+3)^2+(b+1)^2\le 10$ → окружность с центром $a=-3$ $b=-1$

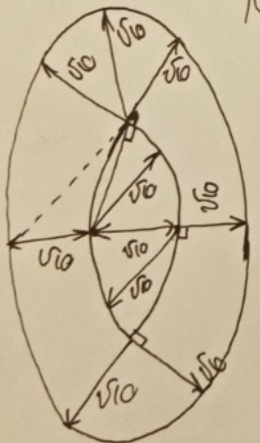
$(x-a)^2+(y-b)^2\le 10$ - окружность (круг радиусом 10

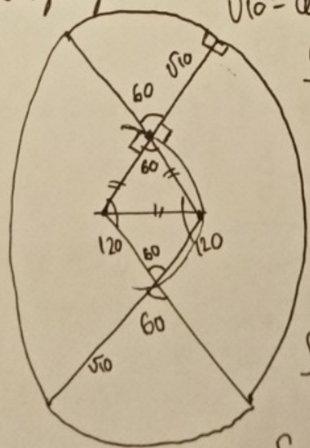
фигура представляет из себя множество кругов радиусом 10, чьи центры лежат внутри выделенной области

изобразим эту фигуру

Площадь можно посчитать как







$\sqrt{10}=a$

$$S=2\pi a^2\cdot\frac{60}{360_6}+2\pi(2a)^2\cdot\frac{120}{360_3}-\ominus$$

$\ominus$ площадь ромбика посередине

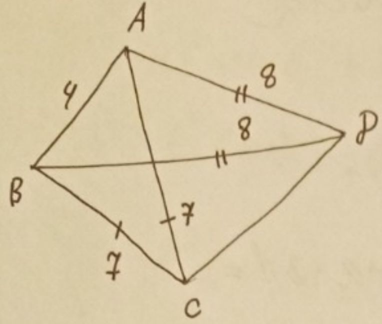
$S_p=\sqrt{3}a\cdot a\cdot\frac{1}{2}$ → полупроизведение диагоналей

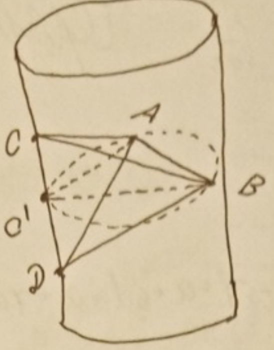
$$S=\frac{1}{3}\pi a^2+\frac{2}{3}\pi\cdot 4a^2-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$S=a^2\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{8}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=a^2\left(3\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ ответ: $S=10\left(3\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

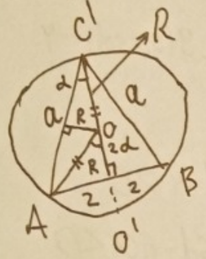
№2 Чистовик





Рассмотрим плоскость ABC' такую, что $(ABC') \parallel$ торцам цилиндра, понятно, что BC' - это проэкции BC или BD

Аналогично и AC; AD; $\Rightarrow AC' \in [0;7]$ назовем $AC' = a$ и рассмотрим треугольник ABC



$\angle ACO' = \alpha$ тогда $\angle AOO' = 2\alpha$ как вписаный и центральный углы

$$\Rightarrow \begin{cases} R\cos\alpha = \frac{a}{2} \\ R\sin 2\alpha = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R\cos\alpha = \frac{a}{2} \\ 2R\sin\alpha\cos\alpha = 2 \end{cases} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{a}$$

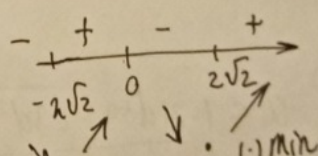
($a > 2$ иначе треугольника не существует)

$$R = \frac{a}{2\cos\alpha} = \frac{a}{2\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{a}{2\sqrt{1-\frac{4}{a^2}}} = \frac{a}{2\sqrt{\frac{a^2-4}{a^2}}} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-4}} = R(a)$$

$$R'(a) = \frac{4a\sqrt{a^2-4} - 2a^2\frac{1}{\sqrt{a^2-4}}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a}{4(a^2-4)} = 0 \Rightarrow 4a(a^2-4) - 2a^2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a = 0$$

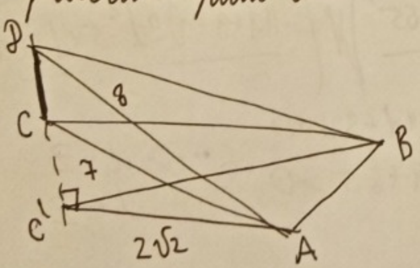
$$4a^3 - 16a - 2a^3 = 0 \Rightarrow a = 0;\ a = 2\sqrt{2}$$

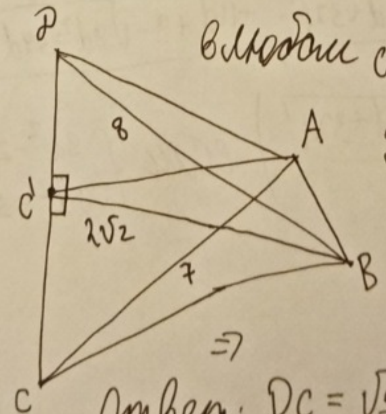
$$(a^2-8)a = 0$$



$\Rightarrow R$ минимально когда $a = 2\sqrt{2}$

Теперь возможны два случая расположения C и D относительно точки D' рассмотрим их





В любом случае по Т. Пифагора

$DC' = \sqrt{64-8} = \sqrt{56} =$

$CC' = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$

$\Rightarrow$

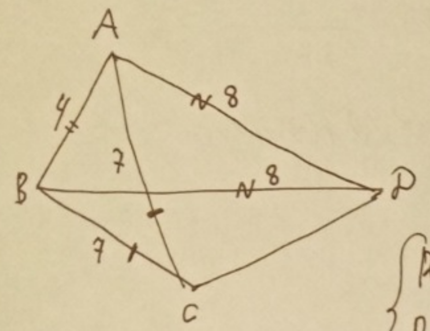
Ответ: $DC = \sqrt{56} - \sqrt{41}$

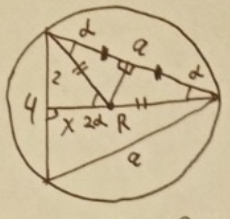
или $DC = \sqrt{56} + \sqrt{41}$

1

№2

черновик





$a \in (0; 7]$

$4 + x^2 = R^2$

$R^2 + 2x + x^2 = a^2 + 4$

$R\cos\alpha = \frac{a}{2}$

$R \sin 2\alpha = 2$

16

$\begin{cases} R\cos\alpha = \frac{a}{2} \\ R\sin 2\alpha = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} R\cos\alpha = \frac{a}{2} \\ 2R\sin\alpha\cos\alpha = 2 \end{cases}$

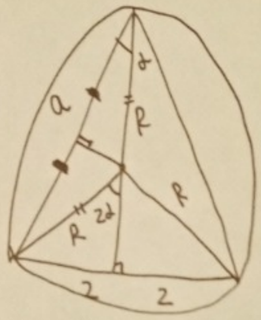
$\frac{8}{2\cdot 2} = 4$

$\frac{\cancel{R\sin\alpha\cos\alpha}}{\cancel{R\cos\alpha}} = \frac{1}{\frac{a}{2}}$ $\quad \sin\alpha = \frac{2}{a}$ $\quad 2^2 +$

R

$\frac{9}{2\sqrt{5}}$

$\begin{cases} 4 + x^2 = R^2 \\ R^2 + x^2 + 2Rx + 4 = a^2 \end{cases}$



$R^2\cos^2\alpha \sin\alpha = \frac{a}{2}$

$\frac{81}{4\cdot 5} = 4$

$R^2\sqrt{1-\frac{4}{a^2}} \cdot \frac{2}{a} = \frac{a}{2}$

$R^2 = \frac{a^2}{4} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{a^2}}} = \frac{a^2}{4} \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2-4}{a^2}}}$

$\min(-6a-2b, 10)$

$-6a-2b < 10 \Rightarrow$

$R^2 = \frac{a^2}{4}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-4}}$

$2b > -6a - 10$

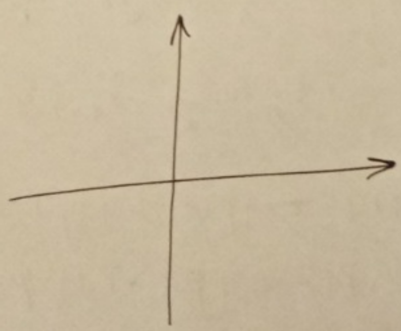
$\Rightarrow a^2 + b^2 \leq -6a - 2b$

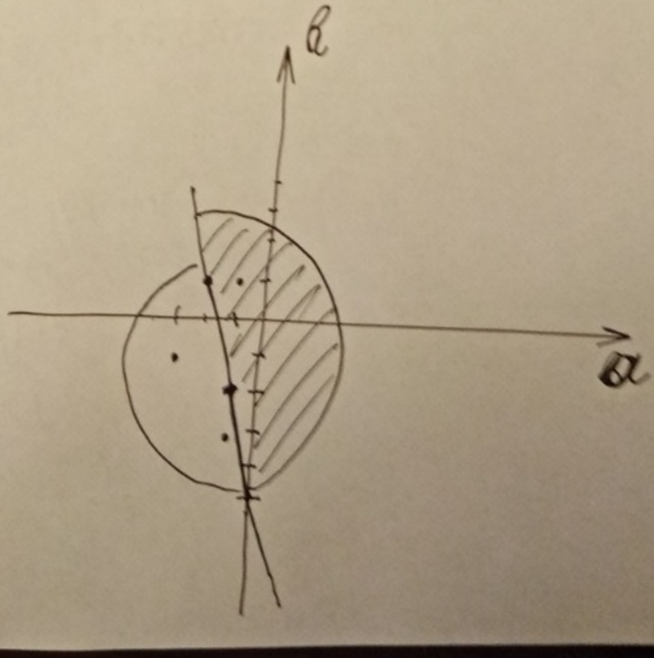
$b > -3a - 5$

$R^2 = \frac{a^3}{4\sqrt{a^2-4}}$

$a^2 + 6a + 9 + b^2 + 2b + 1 \leq 10$

$(a+3)^2 + (b+1)^2 \leq 10$





N1

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$

$12 \cdot 9 = 108$

Черновик

$a_5 a_{18} > S - 4$

$a_{10} a_{13} < S + 60 \qquad a;\ d \in Z$

$$S = a + d + a + a + 2d + a + 3d + a + 4d + a + 5d + a + 6d + a + 7d + a + 8d =$$

$$= 9a + 36d = 9(d + 4d) \to \text{опечатка}$$

$$\begin{cases} (a+4d)(a+7d) > 9(a+4d) - 4 \\ (a+9d)(a+12d) < 9(a+4d) + 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a^2 + 4da + 7da + 28d^2 > 9(a+4d) - 4 \\ a^2 + 9da + 12da + 108d^2 < 9(a+4d) - 4 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a^2 + 11da + 28d^2 > 9a + 36d - 4 \\ a^2 + 21da + 108d^2 < 9a + 36d + 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + (11d - 9)a + 28d^2 - 36d + 4 > 0 \\ a^2 + (21d - 9)a + 108d^2 - 36d - 60 < 0 \end{cases}$$

Корни первого уравнения:

$$D = (11d - 9)^2 - 4 \cdot 28d^2 + 36 \cdot 4d - 16 = 121d^2 - 198d + 81 - 112d^2 + 144d - 16$$

$$D = 9d^2 - 54d + 65 \Rightarrow a \in \left(-\infty; \frac{-11d + 9 - \sqrt{9d^2 - 54d + 65}}{2}\right) \vee \left(\frac{-11d + 9 + \sqrt{9d^2 - 54d + 65}}{2}; +\infty\right)$$

Корни второго уравнение (если корней нет $a \in R$)

$$D = (21d - 9)^2 - 108 \cdot 4d^2 + 36 \cdot 4d + 60 \cdot 4 = 441d^2 - 378d + 81 - 432d^2 + 144d + 240$$

$$D = 9d^2 - 234d + 321 \Rightarrow a \in \left(\frac{-21d + 9 - \sqrt{9d^2 - 234d + 321}}{2}; \frac{-21d + 9 + \sqrt{9d^2 - 234d + 321}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow a \in \left(\frac{-21d + 9 - \sqrt{9d^2 - 234d + 321}}{2}; \frac{-11d + 9 - \sqrt{9d^2 - 54d + 65}}{2}\right) \vee \left(\frac{-11d + 9 + \sqrt{9d^2 - 54d + 65}}{2}; \frac{-21d + 9 + \sqrt{9d^2 - 234d + 321}}{2}\right)$$

если $\begin{cases} 9d^2 - 234d + 321 > 0 \\ 9d^2 - 54 + 65 > 0 \end{cases} \langle \dots \rangle \begin{matrix} a \in Z \\ d \in Z \end{matrix}$

$\sim$

19^2

$19 \cdot 19 = 171$, 19, 361

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102378**

ID профиля: **281577**

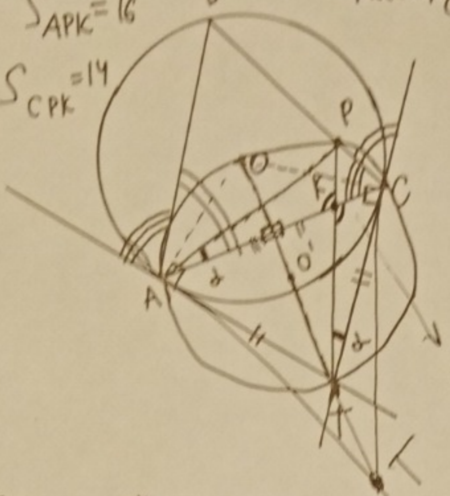
Вариант 24

ABC-Мб

1) T · лежит на окружности O'

$S_{APK}=16$

$S_{CPK}=14$



$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{16}{14} = \frac{AK}{KC} = \frac{8}{7}$

$||| \frac{1}{2} + || =$

черновик

1) $x = z \quad y = x-1$

$x^2 = \frac{1}{2(x+1)}$

$2(x^2(x+1)) = 1$

$||| \frac{1}{2} =$

2)

$\ln^2 \gamma = \ln\beta \ln\alpha$

$\frac{1}{2}\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)$; $2\log_{(x+1)}(29-x)$; $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

2) $y = z \quad x = y+1$

$\frac{x}{7}+7>0 \quad x>-49 \quad -x-1>0 \Rightarrow -x>1 \Rightarrow x<-1 \quad x<29$

$y^2 = \frac{1}{2(y+1)}$

$x \neq 28;\ x \neq 0 \quad x \neq -2 \quad x \neq$

$29-x=\alpha \quad \alpha>0 \quad \alpha\neq1$

$-x-1=\beta \quad \beta>0 \quad \beta\neq1$

$\frac{x}{7}+7=\gamma;\ \gamma>0;\ \gamma\neq1$

$\frac{1}{2}\log_\alpha\gamma$; $2\log_\beta\alpha$; $\frac{1}{2}\log_\gamma\beta$

$\quad\ \, \| \qquad\quad \| \qquad\quad \Downarrow$

$\quad\ \, x \qquad\quad y \qquad\quad z$

$y = x \quad x = y-1$

$y^2 = \frac{1}{2(y+1)}$

предположим $x = z$ $= \log_\alpha\gamma = \log_\gamma\beta \Rightarrow \log_\alpha\gamma \cdot \log$

1

$\frac{\ln\gamma}{2\ln\alpha}$; $\frac{2\ln\alpha}{\ln\beta}$; $\frac{1\ln\gamma}{2\ln\beta}$

x	y	z
$\frac{\ln\gamma}{2\ln\alpha}$	$\frac{2\ln\alpha}{\ln\beta}$	$\frac{\ln\beta}{2\ln\gamma}$
1	3	2

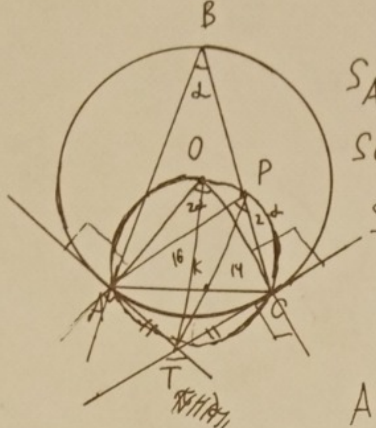
1) 1=2

$\frac{\ln\gamma \cdot \ln\beta}{2\ln\gamma \ln\alpha\, 2} = \frac{\ln\beta}{4\ln\alpha} \Rightarrow xz = \frac{1}{8y}$

$x^2 = \frac{1}{8(x+1)}$

21102378 (U281577 M1296696)

№6 Чистовик



$S_{APK} = 16$

$S_{CPK} = 14$

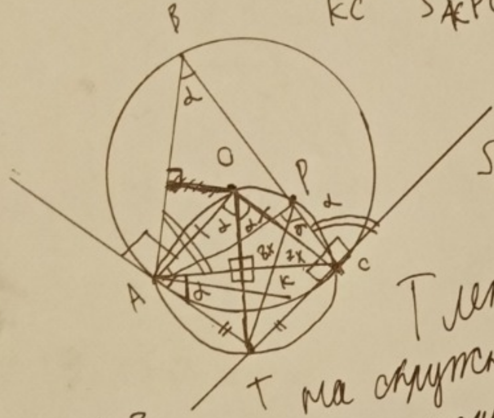
$S_{APC} = 30$

т.к в треугольнике одна высота

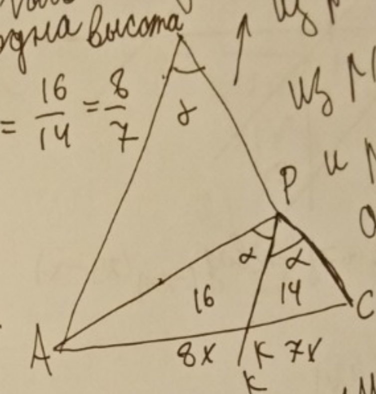
Равенство углов следует из рисунка

из п/б треугольников P и равенства дуг, на которые они опираются

$$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$$



S=



T лежит на окружности т.к $ATC + AOC = \pi$

OT - радиус

$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{5}$

треугольники ABC и PKC подобны по двум углам => площадь треугольника

$$S_{ABC} = \left(\frac{15x}{7x}\right)^2 \cdot 14 = \frac{15^2 \cdot 14}{7^2}$$

N5

① $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\left(\frac{\cancel{2}\ln(29-x)}{2\ln\left(\frac{x}{7}+7\right)}\right)^{-1}=\frac{2a}{b}$

② $\log_{(x+1)^2}(29-x)=\frac{1}{2}\log_{(-x-1)}(29-x)=\frac{\ln(29-x)}{2\ln(-x-1)}=\frac{b}{2c}$

③ $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)=\frac{2\ln(-x-1)}{\ln\frac{x}{7}+7}=\frac{2c}{a}$

① = ② $\quad \frac{2a}{b}=\frac{b}{2c} \quad \frac{2c}{a}-1=\frac{2a}{b} \Rightarrow \left(\frac{2c-1}{a}\right)^2=\frac{2^2a^2}{b^2}=\frac{\cancel{2}a}{\cancel{b}}\cdot\frac{\cancel{b}}{\cancel{2}c}=\frac{a}{c}$

$\Rightarrow \frac{c}{a}=\alpha \Rightarrow (2\alpha-1)^2=\frac{1}{\alpha}$ при $\alpha<0$ - решений нет

аналогично ② = ③ и ③ = ①

② = ③ $\quad \frac{b}{2c}=\frac{2c}{a} \quad \left(\frac{2a}{b}-1\right)=\frac{b}{2c} \Rightarrow \frac{b}{a}=\left(\frac{2a}{b}-1\right)^2$

③ = ① $\quad \frac{2c}{a}=\frac{2a}{b} \quad \left(\frac{b}{2c}-1\right)=\frac{2c}{a} \Rightarrow \frac{4c}{b}=\left(\frac{b}{2c}-1\right)^2$

рассмотрим первые два случая и последний

$\frac{b}{a}=\frac{4a^2}{b^2}-\frac{4a}{b}+1 \quad |\cdot ab^2$

$b^3=4a^3-4a^2b+ab^2$

$\Rightarrow b^3-4a^3=ab(b-4a)$

Чистовик

$\alpha=\frac{4}{\alpha^2}-\frac{4}{\alpha}+$

$\frac{4c}{b}=\frac{b^2}{4c^2}-\frac{b}{c}+1 \quad |\cdot bc^2$

$4c^3=\frac{b^3}{4}-b^2c+bc^2$

$16c^3-b^3=4bc(c-b)$

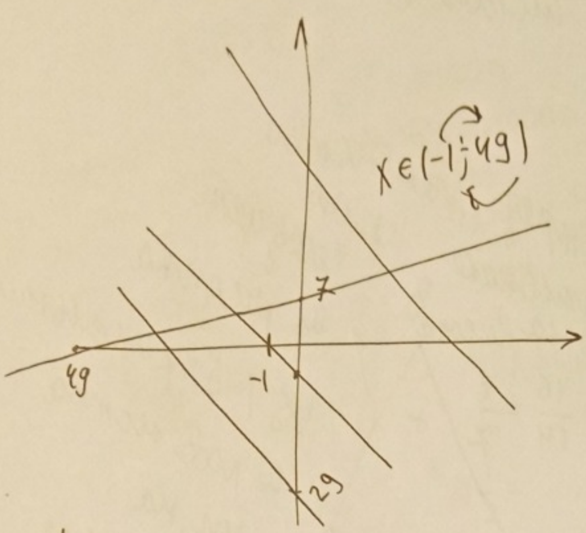
$4\alpha=\frac{1}{4\alpha^2}-\frac{1}{\alpha}+1$

решая эти уравнения можно найти отношения $\frac{b}{c}$ и $\frac{a}{b}$; вспомнив, что

$b=\ln(29-x)$ $\quad a=\ln\frac{x}{7}+7 \quad c=\ln(-x-1)$

можно найти x

4



$$\frac{1}{2}\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 2\log_{(-x-1)}(29-x)$$

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}|x|$$

$$\frac{1}{2}\log_{(29-x)}\left|\frac{x}{7}\right| \cdot \log_{(29-x)}7$$

x y z

$x = z$

$\frac{\ln|\frac{x}{7}+7|}{\cancel{\log}\ln\sqrt{}}$

$$\frac{\ln|\frac{x}{7}+7|}{\ln\sqrt{29-x}} = \frac{\ln|-x-1|}{\ln\sqrt{\frac{x}{7}+7}}$$

$$\frac{\ln|\frac{x}{7}+7|}{\cancel{\ln}\log(29-x|} = \frac{\ln|-x-1|}{\ln\frac{x}{7}+7}$$

$x^2 = \frac{1}{2(x+1)}$

$\log_a b = \log_c d$

$2(x+1)x^2 = 1$

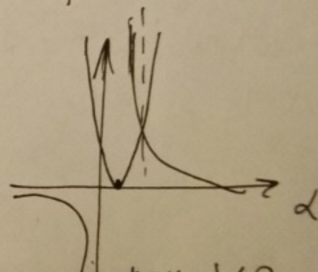
$2x^2+2x^3=1$

$2x^3+2x^2=1$

$x^3+x^2=\frac{1}{2}$

$$\underbrace{\frac{2\ln|\frac{x}{7}+7|}{\ln(29-x)}}_{a} ; \underbrace{\frac{1\log(29-x}{2\ln|-x-1|}}_{b} ; \underbrace{\frac{2\log|-x-1|}{\ln\frac{x}{7}+7}}_{c}$$

$\frac{2a}{b}$ $\frac{b}{2c}$ $\frac{2c}{a}$



1) $\left(\frac{2a}{b}+1\right)^2 = \left(\frac{2a}{b}-1\right)^2 = \frac{b}{\cancel{2c}}\cdot\frac{\cancel{2c}}{a}$

2) $4\alpha^2-4\alpha+1=\frac{1}{\alpha}$

$(2\alpha-1)^2$

при $\alpha<0$ решений нет