# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102357**

ID профиля: **354421**

Вариант 24

N1 Чистовик (1)

$S$ – сумма первых 9-ти членов возр. арифм. прогр.

$a_1, a_2, \ldots$ – целые

$a_5 \cdot a_{18} > S-4$; $a_{10} \cdot a_{13} < S+60$

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = \frac{2a_1 + d \cdot 8}{2} \cdot 9 = (a_1+4d) \cdot 9$

$d$ – разность ~~...~~ арифм. прогрессии $(a_{i+1} = a_i + d)$

$a_5 = a_1 + 4d$; $a_{10} = a_1 + 9d$; $a_{13} = a_1 + 12d$; $a_{18} = a_1 + 17d$

$$\begin{cases} a_5 \cdot a_{18} = (a_1+4d)(a_1+17d) = a_1^2 + 21a_1d + 68d^2 > S-4 \quad (1) \\ a_{10} \cdot a_{13} = (a_1+9d)(a_1+12d) = a_1^2 + 21a_1d + 108d^2 < S+60 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $(a_1+4d)(a_1+17d) > 9(a_1+4d) - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_1+4d)(a_1+17d-9) > -4$

(2) $a_1^2 + 21a_1d + 108d^2 = \underbrace{a_1^2 + 21a_1d + 68d^2}_{(a_1+4d)(a_1+17d)} + 40d^2 < \overbrace{S}^{(a_1+4d)9} + 60 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_1+4d)(a_1+17d-9) < 60 - 40d^2$

Пусть $(a_1+4d)(a_1+17d-9) = k$. Тогда

$$\begin{cases} k > -4 \\ k < 60 - 40d^2 \end{cases} \Rightarrow 60 - 40d^2 > k > -4 \Rightarrow 60 - 40d^2 > -4$$

$\Rightarrow 64 > 40d^2 \Rightarrow d < \frac{8}{\sqrt{40}}$. Вспомним, что все члены прогрессии целые (прогрессия возрастает) $\Rightarrow$

$\Rightarrow d$ может быть равно только 1. $\Rightarrow d = 1$

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \\ d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+4)(a_1+17) > 9(a_1+4) - 4 \\ (a_1+9)(a_1+12) < 9(a_1+4) + 60 \end{cases}$$

N1 (продолжение) Чистовик ②

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + 36 - 4 \\ a_1^2 + 21a_1 + 108 < 9a_1 + \underbrace{36 + 60}_{96} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \ (3) \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \ (4) \end{cases}$$

(3) $a_1^2 + 12a_1 + 36 = (a_1+6)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -6$

(4) $a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$

$D = 144 - 48 = 96 = 4 \cdot 4 \cdot 6$

$a_1 \in \left(\frac{-12-\sqrt{D}}{2}; \frac{-12+\sqrt{D}}{2}\right) \Rightarrow a_1 \in \left(\frac{-12-4\sqrt{6}}{2}; \frac{-12+4\sqrt{6}}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 \in (-6-2\sqrt{6}; -6+2\sqrt{6})$

Итого: $\begin{cases} a_1 \neq -6 \\ a_1 \in (-6\overset{*}{-}2\sqrt{6}; -6\overset{*}{+}2\sqrt{6}) \\ a_1 \in \mathbb{Z} \text{ (целые)} \end{cases} \Leftrightarrow a_1 \in \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$

* Сравним $2\sqrt{6}$ с 5 $\Rightarrow 2\sqrt{6} \overset{<}{\vee} 5 \Leftrightarrow 24 \overset{<}{\vee} 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 > 2\sqrt{6} \Rightarrow -6-2\sqrt{6} > -11$

Также, понятно, что $2\sqrt{6} - 6 < -1$

Ответ: $a_1 \in \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$

Чистовик

№ 3

3

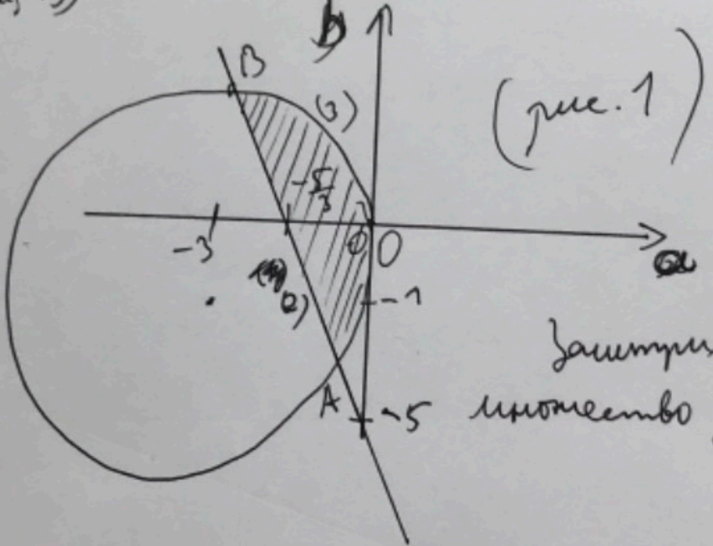
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10\\ a^2+b^2\le \min(-(6a+2b);10)\end{cases}$$

1 Случай: $-(6a+2b)<10 \Rightarrow 6a+2b>-10 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10\\ a^2+b^2\le -6a-2b\\ 6a+2b>-10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10\\ a^2+6a+9-9+b^2+2b+1-1\le 0\\ 6a+2b>-10 \mid :2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10 \ (1)\\ (a+3)^2+(b+1)^2\le 10\\ 3a+b>-5 \Rightarrow b>-3a-5\end{cases}$$

Перейдём на плоскость $(a;b)$ и рассмотрим доступные пары $(a;b)$




(рис. 1)

Заштрихованная область — множество доступных пар $(a;b)$

Заметим, что эти пары $(a;b)$ являются координатами центра окружности (1) $(x-a)^2+(y-b)^2\le 10$ с радиусом $\sqrt{10}$. Пройдём по контуру заштрихованной ~~фигуры~~ фигуры и найдём ~~нов~~ наново расположение окружностей вида (1) с центрами на этом контуре.

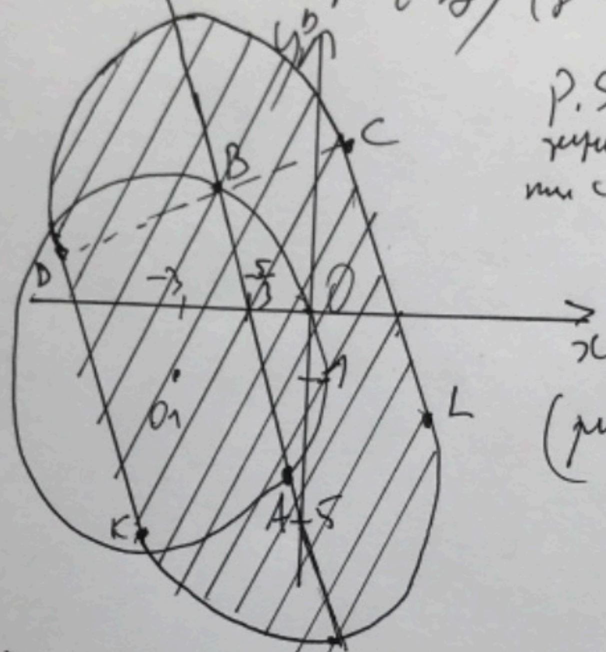
(2) $b=-3a-5 \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2\le 10 \equiv$

$\equiv (x-a)^2+(y+3a+5)^2\le 10$

Пройдёмся по отрезку AB (т.е. есть центры окружностей типа (1) лежат на отрезке AB)

21102357 (U354421 M1304506)

По сути, вот что происходит: центр окружности (1) бегает по отрезку $AB$. Т.к. нам подходят все пары $x$ и $y$ такие, что $(x-a)^2+(y+3a+5)^2 \le 10$ (то есть ограниченные окружностью), делаем вывод что условию удовлетворяет следующее множество пар $(x;y)$ (заштриховано)




P.S.: две крайние полуокружности — полуокружности с центрами в т-ках $A$ и $B$.

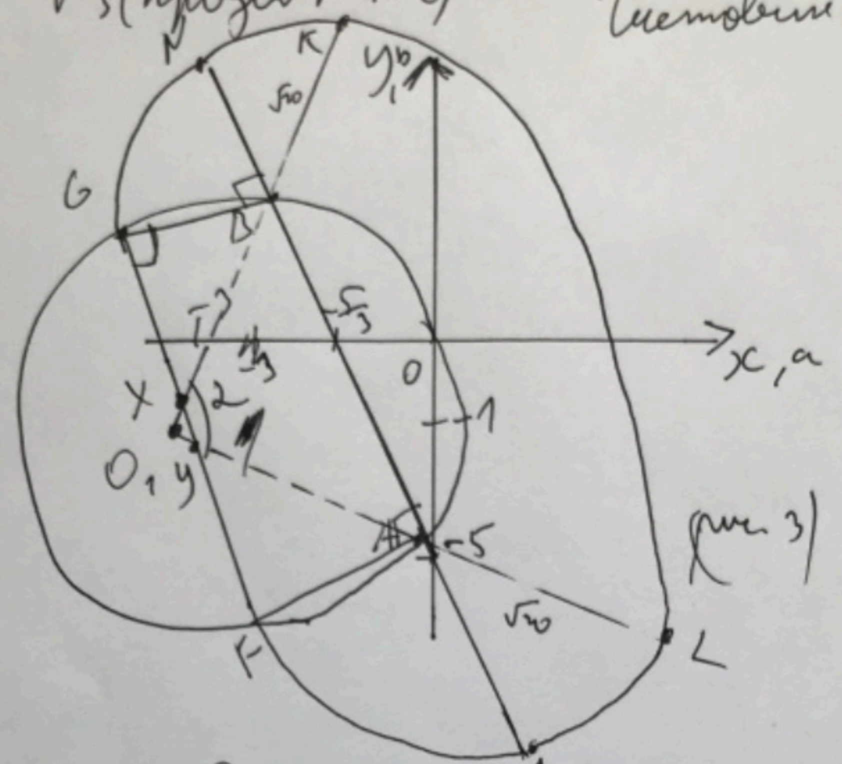
(рис. 2)

При чём $CD$ и $KL$ — диаметры окружностей типа (1) с центрами в т-ках $A$ и $B$. При чём $DC \perp AB$; $KL \perp AB$.

Теперь вернёмся к (рисунку 1) и пройдём по дуге $AB$, которая ограничивает заштрихованное множество на (рис. 1) (То есть нарисуем множество $(x;y)$, таких, что они заключены в окружности с центрами на дуге $AB$). Так как дуга $AB$ — дуга окружности с радиусом $\sqrt{10}$, и мы откладываем от этой окружности другие окружности с таким же радиусом, равным $\sqrt{10}$, то мы получаем так называемую Сумму Минковского этих окружностей (конечно ограниченную допустимыми $a$). Нарисуем.

21102357 (U354421 M1304506)

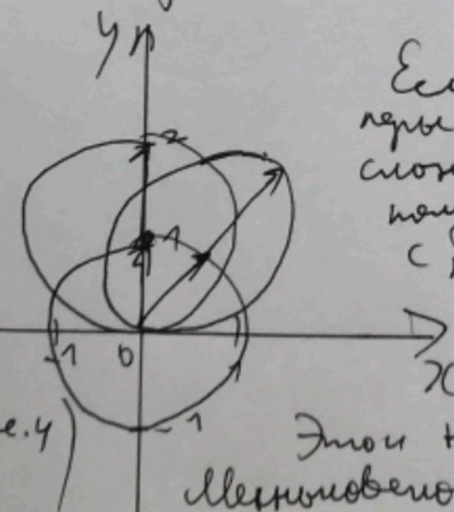
№3 (продолжение) Чистовик (5)




(рис. 3)

Сумма Минковского для двух равных окружностей это окружность с центром в точке (−3;−1), но с радиусом в 2 раза большим, чем у исходных окружностей. (Это интуитивно понятно из сложения всех пар векторов точек обеих окружностей). К примеру:

Есть две единичные окружности, и от одной из них строится вторая с центром на первой:




(рис.4)

Если прочертить все пары таких векторов и сложить, то видно, что получится окружность с радиусом 2.

Это и называется Суммой Минковского, и это то, что мы видели в нашей задаче

№3 (продолжение) Честовет ⑥

Перейдём к (рисунку ~~ном 3~~).

Дуга $\overset{\frown}{KL}$ – дуга окружности ~~образованной~~ радиуса $\sqrt{40}$ (то есть той самой дуги Миньковского)

~~Найдём~~ GK и FL – дуги окружностей радиуса $\sqrt{10}$ с центрами в точках A и B. (как было сказано ранее $FA \perp AB$; $GB \perp AB$)

Найдём точки A и B:

AB: $b = -3a - 5$

окружность с ц. в т. $O_1$: $(a+3)^2 + (b+1)^2 = 10$

$$(a+3)^2 + (\underbrace{-3a-5+1}_{-3a-4})^2 = 10$$

$$a^2 + 6a + 9 + 9a^2 + 24a + 16 = 10$$

$$10a^2 + 30a + 15 = 0 \quad |:5$$

$$2a^2 + 6a + 3 = 0$$

$$D = 36 - 24 = 12 = (2\sqrt{3})^2$$

$$a = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_B = \frac{-3-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b_B = \frac{9+3\sqrt{3}}{2} - 5 = \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}-1}{2}$$

$$a_A = \frac{\sqrt{3}-3}{2} \Rightarrow b_A = \frac{9-3\sqrt{3}}{2} - 5 = \frac{-1-3\sqrt{3}}{2}$$

$$AB = \sqrt{(a_A-a_B)^2 + (b_A-b_B)^2} = \sqrt{3 + 27} = \sqrt{30}$$

$\triangle O_1BA$: $AB^2 = O_1B^2 + O_1A^2 - 2\cos\alpha \cdot O_1B \cdot O_1A$

$$30 = 10 + 10 - 2\cos\alpha \cdot 10 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{10}{-20} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{\triangle O_1BA} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\text{сектора } O_1KL} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \underbrace{R^2}_{(2\sqrt{10})^2} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 40 = \frac{40}{3}\pi \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ площадь ограниченная дугой KL и отрезком AB

21102357 (U354421 M1304506)

Чистовик ③

№3 (продолжение)

То есть $ADKL = \boxed{\frac{40\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2} = S_1}$

$\angle O_1BA = \frac{1}{2}(180^\circ - 2) = 30^\circ \Rightarrow \angle NDK = 30^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\text{сектор } NDK} = \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r_1^2 = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot 20 = \frac{5}{6}\pi$ $\quad (\sqrt{20})^2$

Такую же равна площадь сектора $AML$ $\left(\frac{5}{6}\pi\right)$

Площадь сектора $GBN = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 20 = \frac{5}{2}\pi$

Такую же равна площадь сектора $FAM$ $\left(\frac{5}{2}\pi\right)$

~~$\angle GBO_1$ ... $180^\circ + 90^\circ - 30^\circ - 60^\circ$ ... так же видно, что $FG = AB \Rightarrow \angle GXB = 30^\circ \Rightarrow$~~

$GBAF$ – параллелограмм (т.к. $FG \parallel BA$; $GB \parallel FA$),

т.к. $\angle FGB = 90^\circ \Rightarrow FGBA$ – прямоугольник.

$GB = FA = r = \sqrt{20}$ ; $AB = FG = \sqrt{30} \Rightarrow S_{ABGF} = \sqrt{30} \cdot \sqrt{20} = 10\sqrt{6}$

Сложим все полученные площади и найдем площадь ~~фигуры~~ фигуры, ограниченной $FGNKLM$.

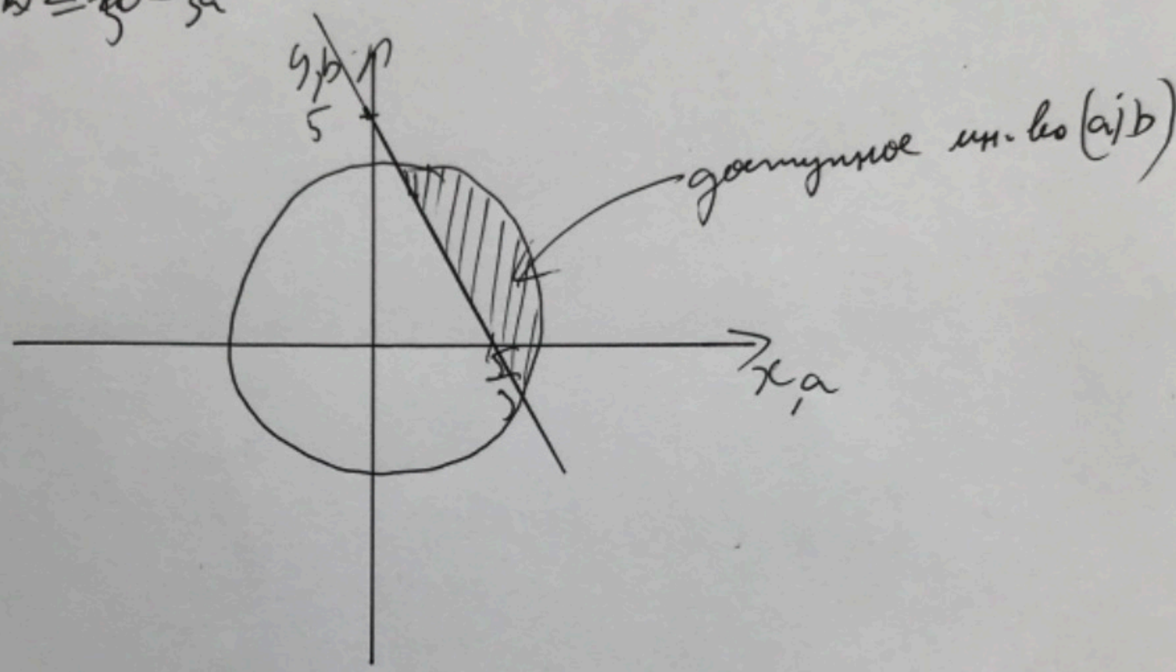
$S = \frac{40\pi}{3} - \frac{\sqrt{3} \cdot 5}{2} + \frac{5}{6}\pi \cdot 2 + \frac{5}{2}\pi \cdot 2 + 10\sqrt{3} =$

$= \frac{40\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} + 5\pi + 7{,}5\sqrt{3} = \boxed{20\pi + 7{,}5\sqrt{3}}$

№3 (продолжение) Чистовик 9

2 случай $-6a-2b \geq 10 \Rightarrow 3a+b \leq \cancel{10}\,5 \Rightarrow b \leq \cancel{10}\,5-3a$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 10 \\ a^2+b^2 \leq 10 \\ b \leq \cancel{10}\,5-3a \end{cases}$$



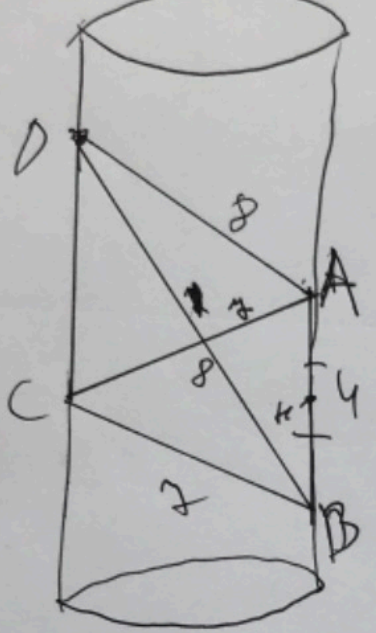

Как видим, здесь абсолютно аналогично рассматривается расположение точек $(x;y)$ и семьи Минковского, и по тому же принципу находится площадь. После, нужно вычесть из суммы площадей в 1 и 2 случаях ту площадь, которую наложение со 2-ого случая не перекрывает. Таким образом, мы найдём ответ.

21102357 (U354421 M1304506)

Чистовик (ЯА) (9)

№2

Рассмотрим, какой тетраэдр можно вписать в цилиндр таким образом:




В силу симметрии того, что $AC = CB$ и $AD = BD$ делаем вывод что ~~DC ⊥ (ABC), что AH ⊥ (ABC)~~

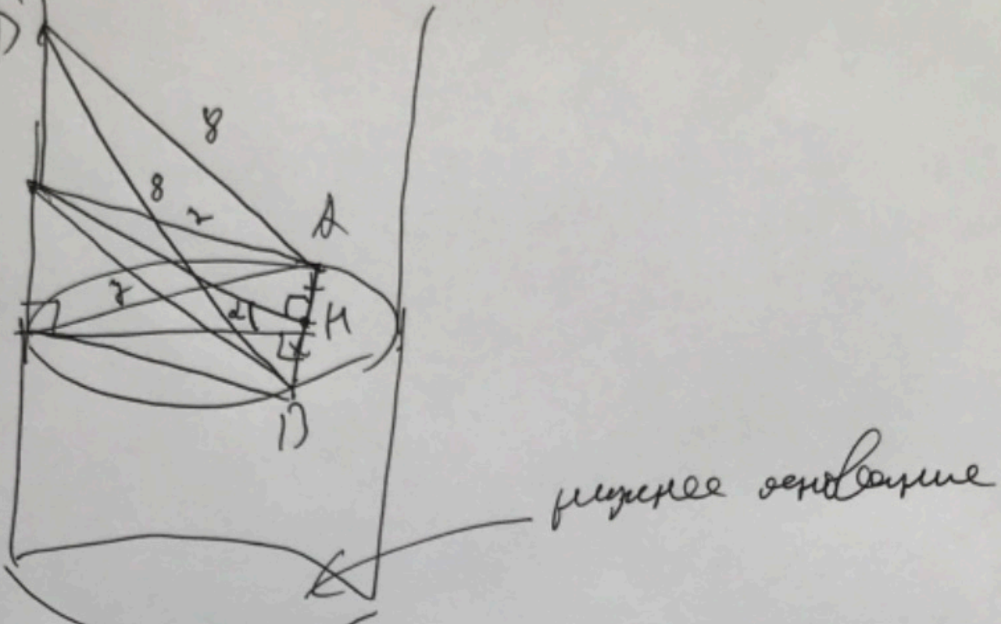
~~DH ⊥ AB.~~ D лежит на плоскости, которая проходит через CH и ⊥(ABC) (такая своеобразная ось симметрии конструкции) ~~...~~ Т.к. DC // оси цилиндра, у ~~...~~ виде картинки можно сделать вывод что $DC \in$ образующей цилиндра

~~... можно сделать вывод, что~~

Рассмотрим на окружность // основанию ~~...~~ внутри цилиндра и содержащую точки A и B (в силу симметрии такая найдётся)

21102357 (U354421 M1304506)

№2 (продолжение) Чистовик ~~9~~ 10




$AB=4 \Rightarrow AH=2=HB$; $AC=CB=7 \Rightarrow CH=\sqrt{49-4}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

В силу симметрии $H'A=H'B$

$\angle\alpha$ = угол между $(ABC)$ и $(AH'B)$; $\sin\alpha=\frac{CH'}{CH}=\frac{CH'}{3\sqrt{5}}$

$\cos\alpha = 1-\frac{CH'^2}{45}=\frac{45-CH'^2}{45}$

Найдём $S_{BAC}=\sqrt{p(p-AC)(p-AB)(p-BC)}$, где $p=\frac{1}{2}(8+8+4)=10$

$\Rightarrow S_{ABC}=\sqrt{10\cdot 2\cdot 2\cdot 6}=4\sqrt{15}$

$H'B^2=64-(H'C+DC)^2$. $S_{H'AB}=\frac{H'B\cdot H'A\cdot AB}{4R} \Rightarrow$

$\Rightarrow R=\frac{H'B\cdot H'A\cdot AB}{4S_{ABH'}}=\frac{H'B^2\cdot 4}{4S_{ABH'}}=\frac{H'B^2}{S_{ABH'}}$ так как $H'B=H'A$

$S_{ABH'}=S_{ABC}\cdot\cos\alpha=4\sqrt{15}\cdot\frac{45-CH'^2}{45} \Rightarrow R=\frac{H'B^2\cdot 45}{4\sqrt{15}(45-CH'^2)}$

Вспомним $\begin{cases} H'B^2=64-(H'C+DC)^2 \\ H'C^2=49-H'B^2 \Rightarrow H'B^2=49-H'C^2 \end{cases}$

$R=\frac{\cancel{45(}(49-H'C^2)45}{4\sqrt{15}(45-H'C^2)} \Rightarrow \min$

21102357 (U354421 M1304506)

№2 (продолжение) Чистовик (11)

$$R = \frac{(45 - H'C^2)\cdot 45}{4\sqrt{15}\,(45 - CH'^2)} \to \min$$

$$R' = \frac{-90H'C\cdot 4\sqrt{15}(45 - CH'^2) + 8\sqrt{15}\,CH'\,45\,(45 - H'C^2)}{\left(4\sqrt{15}\,(\cancel{45 - CH'^2})\right)^2} = 0$$

$\neq 0$

~~Делим на $45\cdot\sqrt{15}\cdot 4$~~

~~Получаем~~

$$\cancel{-2H'C(45 - CH'^2) + 2CH'(45 - H'C^2) = 0}$$

$$\cancel{H'C = a}$$

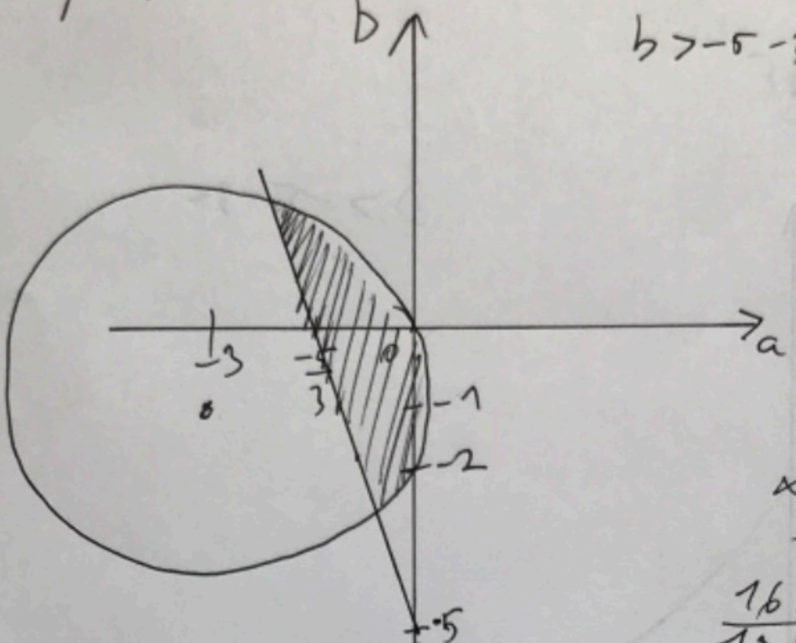
$$\cancel{-90a + 2a^3 + 90a - 2a^3 = 0}$$

Минимизируем, находим CH' и т.д. ..

21102357 (U354421 M1304506)

черновик

$b > -5 - 3a$




$$\begin{array}{r} \times\, 42 \\ 42 \\ \hline 84 \\ 168\phantom{0} \\ \hline 1764 \end{array}$$

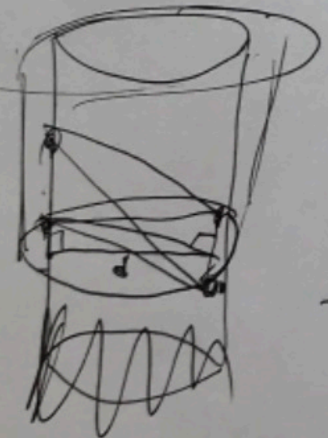
$b = 5 + 3a \Rightarrow (a+3)^2 + (3a+6)^2 \le 10$

$a^2 + 6a + 9 + 9a^2 + 36a + 36 \le 10$

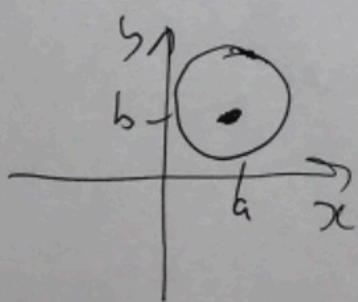
$10a^2 + 42a + 35 \le 0$

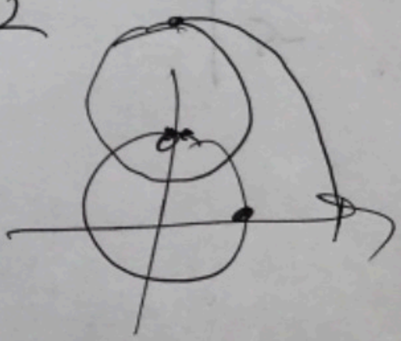
$D = 42^2 - 350 \cdot 4 = 1764 - 1400 = 364 = 4 \cdot 91$

$a = \dfrac{-42 \pm 18}{20} = -3, -1{,}2$



$50 - 126 + 35 \le 0$



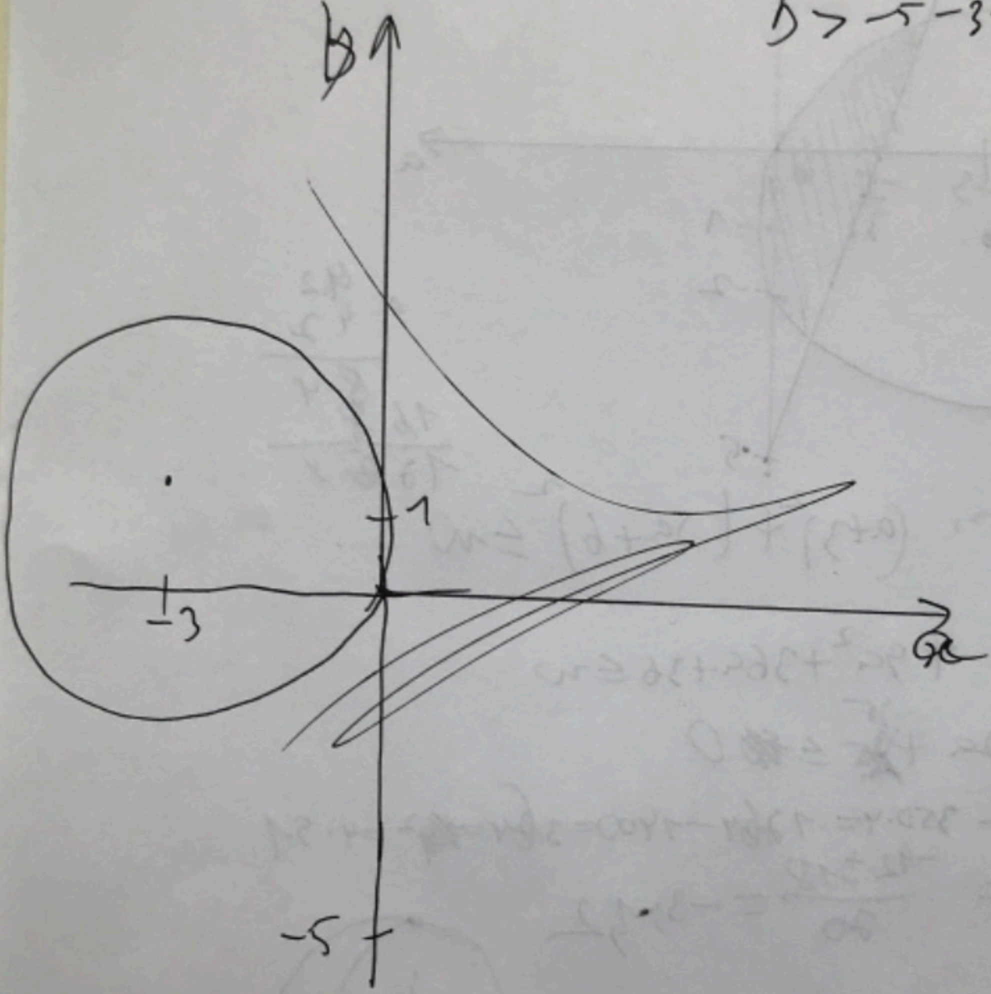
21102357 (U354421 M1304506)

Черновик

$2\sqrt{6}$ $\sqrt{15}$

$24 \vee 25$

$b > -5 - 3a$



# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102357**

ID профиля: **354421**

Вариант 24

Черновик

$49^2(x^2+2x+1) = x^2+98x+49^2$

$49^2 \cdot x^2 + 49^2 \cdot 2x + \cancel{49^2} = x^2 + 98x + \cancel{49^2}$

$49^2 x + 49^2 \cdot 2 = x + 98$

$-x-1 = \left(\frac{x}{7}+7\right)^2$

~~6; 13; 20; 27; 34; 41; 48~~

$x^2 + 142x + 49 \cdot 50$

$D = (49 \cdot 3)^2 - 200 \cdot 49 =$

15 (продолжение)

1) $2\log_a b = \frac{1}{2}\log_c a = 2\log_b c + 1$

Посмотрим на условие: $2\log_a b = 2\log_b c + 1$

$2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 2\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1) + 1 = \log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(x+1)^2 + 1$

Заметим, что $2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)$ на $x \in (-49;-1)/\{-42;-2\}$

~~убывает~~ возрастает, т.к. $29-x \downarrow$; $\frac{x}{7}+7 \uparrow$ (меньшее $29-x \in (30;78)/(30;71)$

число $(29-x)$ нужно возводить всё в бо́льшую степень, чтобы получить большее число $\left(\frac{x}{7}+7\right) \in \left(0; 7-\frac{1}{7}\right)/\left\{1; 7-\frac{2}{7}\right\}$)

Значит левая часть уравнения монотонно возрастает

Посмотрим на правую часть:

$\frac{x}{7}+7 \uparrow$; $(x+1)^2 \downarrow$ ~~$\log_{\frac{x}{7}+7}(x+1)^2 \downarrow$~~

при $x \in (-49;-2)/\{-42\} \Rightarrow \log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(x+1) \downarrow$

При $x \in (-2;-1) \Rightarrow (x+1)^2 < 1 \Rightarrow \log_{\frac{x}{7}+7}(x+1)^2 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{x}{7}+7}(x+1)^2 + 1 < 1$, в то время как левая часть при $x \in (-2;-1)$

$$\begin{array}{r} \times\ 56 \\ 56 \\ \hline 336 \\ 250\phantom{0} \\ \hline 2836 \end{array}$$

21102357 (U354421 M1304507)

чернови

$\log_a b \cdot \log_a c = 1$

$\log_a b = k \; ; \log_a c = \frac{1}{k}$

$b = a^k \; ; \; c = a^{\frac{1}{k}}$

$b = c^{k^2}$

$c \downarrow \; ; \; b \uparrow \; ; \; a \downarrow$

$29 \times 29 = 261 + 58 = 841$

$841 - 49 = 792$

$792 : 12 = 66$

---

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{y}+y\right) = \log_{(x+1)^2}(29-x)$

$$\frac{\log_{(x+1)^2}\left(\frac{x}{y}+y\right)}{\log_{(x+1)^2}\sqrt{29-x}} = 2\frac{\frac{1}{2}\log_{(x+1)}\left(\frac{x}{y}+y\right)}{\frac{1}{4}\log_{(x+1)}\sqrt{29-x}} = \frac{1}{2}\log_{(x+1)}(29-x)$$

$4\log_{(x+1)}\left(\frac{x}{y}+y\right) = \left(\log_{(x+1)}(29-x)\right)^2$

$\cancel{(x+1)^k = \frac{x}{y}+y \; ; \; (x+1)^{\sqrt{k}} = 29-x}$

---

$2\log_a b = 2\log_b c + 1 = \frac{2\log_a c}{\log_a b} + 1$

$2(\log_a b)^2 = 2\log_a c + 1 = 2\log_a c^2 a$

$\log_a b = k \qquad \log_a c^2 a = k^2$

$b = a^k \qquad c^2 a = a^{2k}$

$b^2 = c^2 a$

$\left(\frac{x}{y}+y\right)^2 = (x+1)^2(29-x)$

21102357 (U354421 M1304507)

№4 Чистовик (1)

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 33 = 3^1 \cdot 11^1 \Rightarrow a, b, c \vdots 33 \quad (1) \\ НОК(a;b;c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \Rightarrow 3^{19} \cdot 11^{15} \vdots a;\ 3^{19} \cdot 11^{15} \vdots b;\ 3^{19} \cdot 11^{15} \vdots c \quad (2) \end{cases}$$

Из (2) получаем, что $a = 3^{\alpha_1} \cdot 11^{\beta_1}$; $b = 3^{\alpha_2} \cdot 11^{\beta_2}$; $c = 3^{\alpha_3} \cdot 11^{\beta_3}$, то есть разложение чисел $a, b, c$ на простые множители состоит только из произведения 3 в некоторой степени на 11 в некоторой степени. (других простых делителей нет)

Из (1) делаем вывод, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 1$ и хотя бы одно из $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $(\beta_1; \beta_2; \beta_3) = 1$.

(Т.к. если хоть бы одно меньше 1, то НОД $\neq 3^1 \cdot 11^1$ и если хотя бы одно ~~не равно единице~~ из $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ и $(\beta_1; \beta_2; \beta_3)$ не равно единице, то $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 1$ или $\beta_1; \beta_2, \beta_3 > 1 \Rightarrow$ НОД $= 3^k \cdot 11^f$, где $k$ или $f > 1$)

Из (2) делаем вывод, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < 19$ и $\beta_1, \beta_2, \beta_3 < 15$ (иначе НОК $\neq 3^{19} \cdot 11^{15}$, а равен $3^k \cdot 11^f$, где $k > 19$ или $f > 15$). Также одно из $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3) = 19$ и одно из $(\beta_1; \beta_2; \beta_3) = 15$, иначе все $\alpha$ будут меньше 19 или/и все $\beta$ будут меньше 15 и НОК будет равен $3^k \cdot 11^f$, где $k < 19$; $f < 15$.

Таким образом, вот, что имеем: каждое $\alpha \geq 1$;

1) $\alpha$: одно из $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3) = 1$, одно из $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3) = 19$, последнее $\in [1; 19]$ (19 вариантов). Всего вариантов выбрать такую тройку $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3) = 3! \cdot 19 = 6 \cdot 19 = 114$

21102357 (U354421 M1304507)

№4 (продолжение) Черновик ②

Это варианты: $(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)=(1;19;\alpha_3)$, где $\alpha_3\in[1;19]$

$(19;1;\alpha_3)$, где $\alpha_3\in[1;19]$; $(1;\alpha_2;19)$, где $\alpha_2\in[1;19]$;

$(19;\alpha_2;1)$, где $\alpha_2\in[1;19]$; $(\alpha_1;1;19)$, где $\alpha_1\in[1;19]$;

$(\alpha_1;19;1)$, где $\alpha_1\in[1;19]$ => всего $19\cdot6=114$

2) $\beta$: НОД $(\beta_1;\beta_2;\beta_3)=1$; ~~одно~~ каждое $\beta\geq1$;

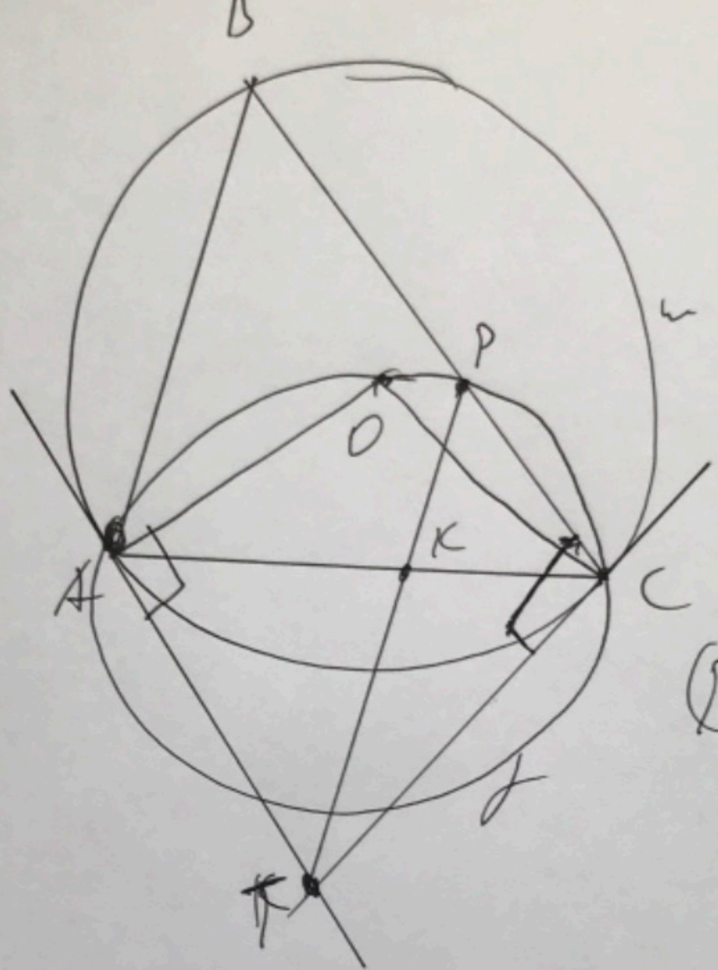
НОК $(\beta_1;\beta_2;\beta_3)=15$; последнее $\beta\in[1;15]$ (15 вариантов),

по аналогии, кол-во расстановок здесь равно $15\cdot3!=$
$=15\cdot6=90$

Итого, вариантов выбрать тройку $(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)=114$,
вариантов выбрать тройку $(\beta_1;\beta_2;\beta_3)=90$ =>
=> всего вариантов выбрать набор $(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\beta_1;\beta_2;\beta_3)=$
$=90\cdot114=\boxed{10260}$

Ответ: 10260

№6 Чистовик ①



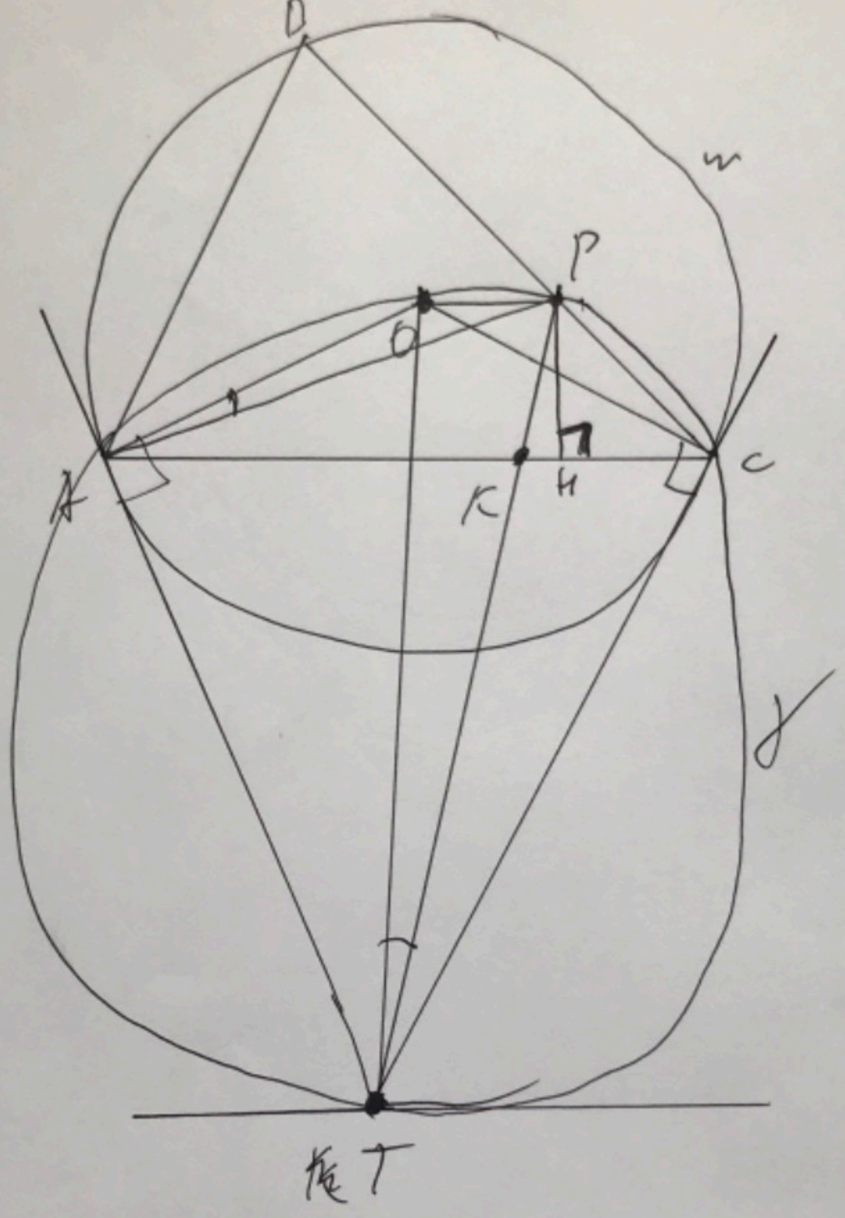

$S_{APK}=16$

$S_{CPK}=14$

а) Заметим, что $OA$ — радиус $\omega$; $AT$ — касательная к $\omega$ $\Rightarrow OA \perp AT$. Аналогично $OC \perp CT \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle OAT + \angle OCT = 180^\circ \Rightarrow \angle AOC + \angle ATC = 180^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow AOCT$ — вписанный четырёхугольник. Заметим, что через точки $A, O, C$ можно провести единственную окружность, и это $J \Rightarrow T \in J$. Перерисуем

21102357 (U354421 M1304507)

№6 (продолжение) Чистовик ④




$S_{APK}=16$; $S_{CPK}=14 \Rightarrow S_{\triangle APC}=30$

$S_{APK}=\frac{1}{2}PH\cdot AK=16 \Rightarrow PH\cdot AK=32$; $S_{KPC}=\frac{1}{2}\cdot PH\cdot KC=14 \Rightarrow$
$\Rightarrow PH\cdot KC=28$

$\frac{PH\cdot AK}{PH\cdot KC}=\frac{32}{28}=\frac{8}{7} \Rightarrow \frac{AK}{KC}=\frac{8}{7}$

В силу симметрии, касательная к $\gamma$ $\parallel AC$.

Заметим, что $TP\parallel AD \Rightarrow \frac{CP}{PD}=\frac{KC}{KA}=\frac{7}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{APC}}{S_{ADP}}=\frac{7}{8} \Rightarrow S_{ADP}=\frac{30\cdot 8}{7}=\frac{240}{7} \Rightarrow S_{ADC}=\frac{240}{7}+30=\frac{450}{7}$

Ответ: $\frac{450}{7}$

21102357 (U354421 M1304507)

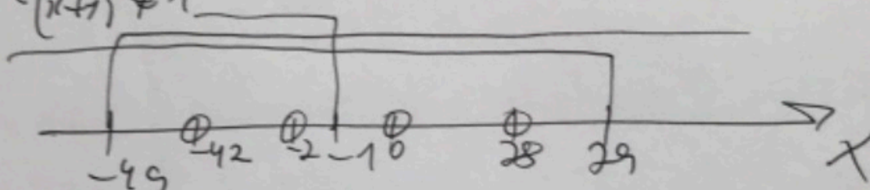
№5 чистовик ⑤

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right),\ \log_{(x+1)^2}(29-x),\ \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}\left(-(x+1)\right)$

$\sqrt{29-x}=a;\ \frac{x}{7}+7=b;\ -(x+1)=c$

$\log_{\sqrt{a}}b=2\log_a b;\ \log_{c^2}a=\frac{1}{2}\log_c a,\ \log_{\sqrt{b}}c=2\log_b c$

ОДЗ: $\begin{cases}29-x>0\\ \sqrt{29-x}\neq 1\\ \frac{x}{7}+7>0\\ \sqrt{\frac{x}{7}+7}\neq 1\\ -(x+1)>0\\ (x+1)^2\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<29\\ x\neq 28\\ x>-49\\ x\neq -42\\ x<-1\\ x\neq -2;0\end{cases}$




$x\in(-49;-1)/\{-42;-2\}$

Случай; $2\log_a b=\frac{1}{2}\log_c a \Rightarrow 4\log_a b=\log_c a \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\frac{1}{4}\log_{-x-1}29-x$

$\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{(x+1)^4}29-x$

$\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\frac{1}{4\log_{(29-x)}(x+1)}$

$4\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\log_{(29-x)}(x+1)=1$

$\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\log_{(29-x)}(x+1)^4=1$

$\log_a b\cdot\log_a c^4=1$

21102357 (U354421 M1304507)

15 (продолжение)

чистовик (6)

1) $2\log_a b = \frac{1}{2}\log_c a$

$\log_a b^2 = \log_{c^2} a$

$\log_a b^2 = \frac{\log_c b^2}{\log_c a} \Rightarrow \frac{\log_c b^2}{\log_c a} = \frac{1}{2}\log_c a$

$2\log_c b = \frac{1}{2}(\log_c a)^2$

$4\log_c b = (\log_c a)^2$

$\log_{-(x+1)}\left(\frac{x}{y}+y\right)^4 = \left(\log_{-(x+1)}(29-x)\right)^2$

Пусть $\log_{-(x+1)}\left(\frac{x}{y}+y\right)^4 = k$, $k \geq 0$, тогда $(-(x+1))^k = \left(\frac{x}{y}+y\right)^4$

Тогда $\log_{-(x+1)} 29-x = \sqrt{k} \Rightarrow (-(x+1))^{\sqrt{k}} = 29-x \Rightarrow$

$\Rightarrow (-(x+1))^k = (29-x)^2$

Имеем: $(29-x)^2 = \left(\frac{x}{y}+y\right)^4$

~~Левая часть монотонно убывает, левая возрастает $\Rightarrow$ корень один и это $x =$~~

~~$29-x$ и $\frac{x}{y}+y$ не отрицательны $\Rightarrow 29-x = \left(\frac{x}{y}+y\right)^2$~~

~~$49(29-x)^2 = (x+49)^2$~~

~~$49\cdot 29^2 - 49\cdot 29\cdot 2\cdot x + 49x^2 = x^2 + 49\cdot 2x + 49^2$~~

~~$48x^2 - 49\cdot 2x\cdot 30 + 49\cdot 29^2 - 49^2 = 0 \quad |:12$~~

~~$4x^2 - 245x + 66 = 0$~~

не ОДЗ.

Левая часть монотонно ↓, правая ↑ $\Rightarrow$ один корень

$29-x$ и $\frac{x}{y}+y$ не отрицательны $\Rightarrow 29-x = \left(\frac{x}{y}+y\right)^2$

корень $\boxed{x = -7}$ $\Rightarrow 29-x = \left(\frac{x}{y}+y\right)^2 = 36$

№5 (продолжение) Чистовик 7

$2\log_a b = \frac{2}{2}\log_c a = 2\cdot\log_{36} 6 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\log_b c = 2$ (должен быть)

$2\log_b c = 2\cdot\log_{\frac{x}{3}+3}(-(x+1)) = 2\cdot\log_6 6 = 2$

Верно $\Rightarrow$ $x=-3$

2) $\cancel{2}\log_a b = \cancel{2}\log_b c$

$\log_a b = \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} \Rightarrow (\log_a b)^2 = \log_a c$

Пусть $\log_a b = k \Rightarrow a^k = b$. Тогда $\log_a c = k^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^{k^2} = c$

$\begin{cases} a^{k^2} = c \\ a^k = b \end{cases} \Rightarrow c = b^2 \Rightarrow -(x+1) = \left(\frac{x}{3}+3\right)^2$

~~Левая часть монотонно убывает, а правая~~

$-49(x+1) = (x+49)^2$

$49^2x^2 + 49^2\cdot 2x + 49^2 = x^2 + 98x + 49^2$

$(49^2-1)x^2 + (49^2\cdot 2 - 98)x = 0$

$48\cdot 50x^2 + 49\cdot 48\cdot 2x = 0 \mid :48$

~~$x=0$~~

$50x^2 + 98x = 0$

$\begin{cases} x=0 \text{ не уд. ОДЗ} \\ x = -\frac{98}{50} = -\frac{49}{25} = -1{,}96 \end{cases} \Rightarrow 2\log_a b = 2\cdot\log_{29-x}\left(\frac{x}{3}+3\right) =$

$= 2\log_{\cancel{31{,}04}\,30{,}96} 6{,}72$

№5 (продолжение)

Чистовик (8)

~~$-49x-49 = x^2+98x+49^2$~~

~~$x^2+$~~

~~Левая часть монотонно убывает, а правая $\uparrow$ не ОДЗ $\downarrow$ $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow$ не более 1 корень~~

~~Докажем, что подходит $x=$~~

$-49x-49 = x^2+98x+49^2$

$x^2+147x+49(49+1)=0$

$D = 147^2-49^2\cdot 50\cdot 4 = 49\cdot 49\cdot 9 - 49\cdot 200 < 0 \Rightarrow$ нет корней в этом случае

3) $2\log_b c = \frac{1}{2}\log_c a = \dfrac{\frac{1}{2}\log_b a}{\log_b c}$

$4(\log_b c)^2 = \log_b a$

~~Пусть $\log_b c = k$~~ $\Rightarrow b^k = c$ Тогда $\dfrac{\log_b a}{4} = k^2$

$(\log_b c^2)^2 = \log_b a$

Пусть: $\log_b c^2 = k \Rightarrow \log_b a = k^2$. Тогда

$\begin{cases} b^k = c^2 \\ b^{k^2} = a \end{cases} \Rightarrow \quad c^4 = a \Rightarrow \quad (x+1)^4 = 29-x$

~~До этого не ...~~

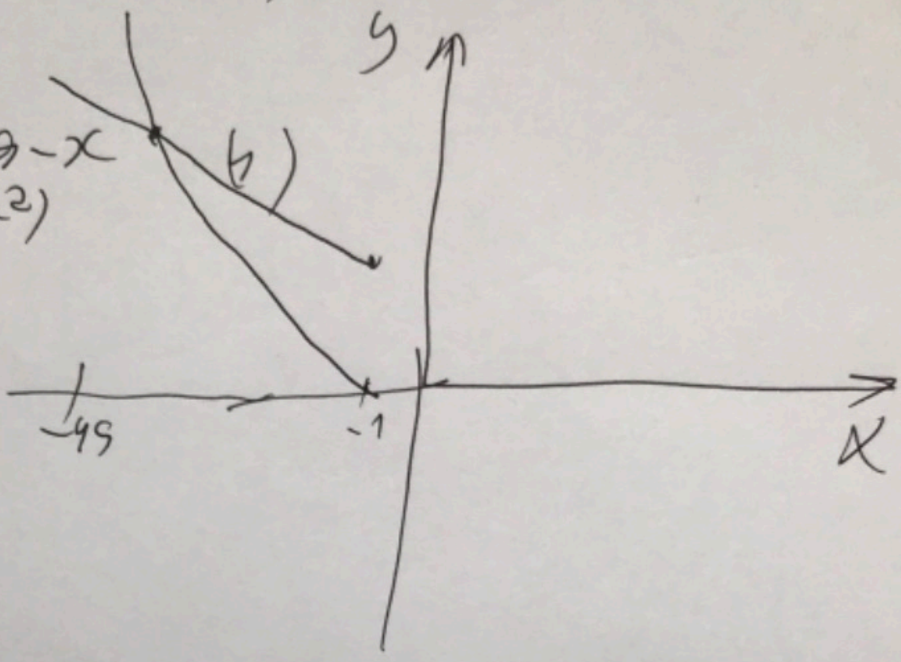
№5 (продолжение)

Шестовин (9)

[illegible]

$(x+1)^4 = 29 - x$

(1) (2)




Корень есть => он подходит при проверке

21102357 (U354421 M1304507)